

## 非同次ポテンシャルを持つ非線形格子の積分不可能性

NTT コミュニケーション科学基礎研究所 吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)  
 NTT Communication Science Laboratories

### 1 はじめに

$N$  自由度ハミルトン系  $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  が,  $N$  個の関数的に独立な第一積分  $f_1 = H, f_2, \dots, f_N$  で, 包合的 ( $\{f_i, f_j\} = 0, i, j = 1, \dots, N$ ) なものを持つとき, 系は完全可積分であると言われる. ただし,  $\{f, g\}$  はポアソン括弧で,  $\{f, g\} = \sum_{k=1}^N (\partial f / \partial q_k)(\partial g / \partial p_k) - (\partial f / \partial p_k)(\partial g / \partial q_k)$  と定義される. このとき, 系の時間発展は, 周期的もしくは準周期的となる. 一方, 完全可積分でない場合には, 系はカオス的な振舞いを示すと予想される. ハミルトン系の解の性質を特徴づける上で, 可積分性の判定は基本的な問題の一つである.

本研究で対象とする非線形格子系は, Fermi 達による数値実験 [1] に始まる非平衡初期状態から平衡状態への緩和過程の研究と関連して, 大自由度ハミルトン力学系の一つとして重要な位置を占めるモデルである. 戸田格子 [2] 等の特殊な例を除く種々の非線形格子について, カオス的な解の挙動が数値的に観測されており, その積分不可能性が予想される. しかしながら, 大自由度の非線形格子の場合, 厳密に積分不可能性が証明されている格子モデルは非常に限られている. 同次ポテンシャルを持つ非線形格子 [3, 4] および, 2 次と 4 次のポテンシャルを持つ Fermi-Pasta-Ulam (FPU)  $\beta$  格子 [5] に対してのみ積分不可能性が証明がされているに過ぎない. よって, 本研究では, より広いクラスの非同次ポテンシャルを持つ非線形格子に対し, 積分不可能性に関する厳密な結果を得ることを目的とする. 以下のハミルトニアンで定義される非線形格子を扱う.

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i=1}^N [U(q_i) + V(q_i - q_{i-1})] \quad (1)$$

上式の  $U, V$  は以下の様な非同次多項式ポテンシャルとする.

$$U(X) = \sum_{k=2}^{2m} \frac{\mu_k}{k} X^k \quad (2)$$

$$V(X) = \sum_{k=2}^{2m} \frac{\kappa_k}{k} X^k \quad (3)$$

ただし, 奇数の  $k$  に対しては  $\mu_k = 0$  と仮定する. すなわち, オンサイトポテンシャル  $U$  に対し, 対称性  $U(X) = U(-X)$  を仮定する. (1) 式で定義される  $N$  粒子非線形格子の積分不可能性に関し, 本研究で示した結果概要は以下の通りである.

- 2 自由度不変部分空間  $\mathcal{I}_1$  と,  $\mathcal{I}_1$  上のベクトル場を記述する部分ハミルトニアンを与えた.
- 2 自由度部分ハミルトン系の積分不可能性を証明した.

- 部分系の積分不可能性に基づき、全系の包摂的な  $N$  個の解析的積分  $f_i, i = 1, \dots, N$  で  $\mathcal{I}_1$  上のある点で  $df_i, i = 1, \dots, N$  が一次独立なものは存在しないことを証明した。

## 2 Ziglin 解析

ハミルトン系の運動方程式は通常は実数領域で扱われるが、ここでは、座標、運動量、時間の各変数  $q_i, p_i, t$  は複素数として扱う。ハミルトン系の解析的な積分の非存在を証明する方法として、Ziglin 解析 [6, 7] が知られている。Ziglin 解析とは、系の特殊解に沿った直交変分方程式のモノドロミー群を調べて、系の積分不可能性を判定する方法である。2 自由度系の場合、モノドロミー行列  $g$  は 2 行 2 列の行列であり、その固有値は  $\rho$  と  $\rho^{-1}$  で与えられる。任意の整数  $k (\neq 0)$  に対して  $\rho^k \neq 1$  となるとき、モノドロミー行列  $g$  は非共鳴であると定義する。2 自由度系の場合、Ziglin の定理は以下の様に述べられる。

**定理 1.** [6]  $H$  を 2 自由度のハミルトニアン、 $\Gamma(t)$  をその特殊解とする。ハミルトニアン  $H$  と関数的に独立、かつ、 $\Gamma$  の連結な近傍において解析的な第一積分が存在すると仮定する。さらに、 $\Gamma(t)$  に沿った直交変分方程式のあるモノドロミー行列  $g_1$  が非共鳴であると仮定する。このとき、他の任意のモノドロミー行列  $g_2$  に対して、(i)  $g_1$  と  $g_2$  は可換であるか、もしくは、(ii)  $\text{tr } g_2 = 0$  である。

以下では、多項式ポテンシャル系への定理 1 の適用について述べる。まず、モノドロミー行列を陽に計算できる特殊な場合として、以下の微分方程式系を考える。

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \alpha_{2m} \varphi^{2m-1} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \beta_{2m} \varphi(t)^{2m-2} \xi = 0 \quad (5)$$

ここで、 $m \geq 2$  は整数、 $\alpha_{2m}$  と  $\beta_{2m}$  は実数のパラメータであり  $\alpha_{2m} > 0$  と仮定する。パラメータ  $\lambda_{2m}$  を次式で定義する。

$$\lambda_{2m} = \frac{\beta_{2m}}{\alpha_{2m}} \quad (6)$$

方程式 (4) は、 $2m$  次の同次ポテンシャル中の粒子の運動方程式と見なすことができ、次の積分を持つ。

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\alpha_{2m}}{2m} \varphi^{2m} = h \quad (7)$$

ただし、 $h$  は積分定数である。積分 (7) より、解  $\varphi(t)$  は以下の積分の逆関数として求められる。

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} dw / \sqrt{P(w)} \quad (8)$$

ここで、 $\varphi_0$  は初期点に対応する定数であり、 $P(w)$  は次式で定義される関数である。

$$P(w) = 2 \left[ h - (\alpha_{2m}/2m) w^{2m} \right] \quad (9)$$

$z = \sqrt{P(w)}$  で定義されるリーマン面の分岐点を  $\hat{\sigma}_k$  で表すと、

$$\hat{\sigma}_k = \left( \frac{2mh}{\alpha_{2m}} \right)^{1/2m} \exp \left[ i \frac{\pi k}{m} \right], \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1 \quad (10)$$

となる。

リーマン面上に、2つのループ  $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$  を定める。  $\hat{\gamma}_1$  は  $\hat{\sigma}_0$  と  $\hat{\sigma}_m$  を反時計回りに一周するもの、  $\hat{\gamma}_2$  は  $\hat{\sigma}_1$  と  $\hat{\sigma}_{m+1}$  を反時計回りに一周するものとする。共通の始点  $w_0$  は、  $w$ -平面の実軸上0と  $\hat{\sigma}_0$  の間を取るものとする。独立変数の変換  $z = \{\varphi(t)\}^{2m}$  により、方程式(5)は超幾何方程式に変換されることが知られている。この事実により、(5)式の本ドロミー行列を陽に計算することが可能となる。先に定義したループ  $\hat{\gamma}_1$  と  $\hat{\gamma}_2$  に対応する本ドロミー行列を、それぞれ、  $\hat{g}_1, \hat{g}_2$  とする。方程式(5)のある基本解系に対し、  $\hat{g}_1$  と  $\hat{g}_2$  は次式で与えられる。

$$\hat{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -BC \\ A & ABC - 1 \end{pmatrix}^2 \quad (11)$$

$$\hat{g}_2 = \begin{pmatrix} -1 - \Omega AB & -B(ABC + \Omega AB + \Omega^{-1}C) \\ \Omega A & ABC + \Omega AB - 1 \end{pmatrix}^2 \quad (12)$$

ここで、

$$A = 1 - \Omega^{-1}e^{-i2\pi a}, \quad B = 1 - \Omega^{-1}e^{-i2\pi b}, \quad C = 2\Omega/(\Omega - 1) \quad (13)$$

である。ただし、

$$\Omega = e^{i\pi/m}, \quad a + b = 1/2 - 1/2m, \quad ab = -\lambda_{2m}/4m \quad (14)$$

である。本ドロミー行列  $\hat{g}_1, \hat{g}_2$  は、積分定数  $h$  に依存しないことを注意しておく。表式(11),(12)を用いて、  $\hat{g}_1$  と  $\hat{g}_2$  の跡を計算すると次式を得る。

$$\text{tr } \hat{g}_1 = \text{tr } \hat{g}_2 = F_{2m}(\lambda_{2m}) \quad (15)$$

ただし、関数  $F_{2m}(\lambda_{2m})$  は以下の様に定義する。

$$F_{2m}(\lambda_{2m}) = \frac{4}{\sin^2(\pi/2m)} \cos^2 \left[ (\pi/2m) \sqrt{(m-1)^2 + 4m\lambda_{2m}} \right] - 2 \quad (16)$$

本ドロミー行列  $\hat{g}_1, \hat{g}_2$  が可換な場合は、  $\lambda_{2m}$  が  $F_{2m}(\lambda_{2m}) = \pm 2$  を満たすときに限ることが示される。加えて、  $\lambda_{2m}$  が以下で定義される領域  $S_{2m}$  に含まれるときに限り、  $F_{2m}(\lambda_{2m}) > 2$  となることが示される。

$$S_{2m} = \{ \lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda < 0, 1 < \lambda < 2m - 1, 2m + 2 < \lambda < 6m - 2, \dots, \\ j(j-1)m + j < \lambda < j(j+1)m - j, \dots \}. \quad (17)$$

上述の同次ポテンシャル系に関する本ドロミー行列の計算の詳細については、文献[8]を参照されたい。

同次ポテンシャル系の本ドロミー行列の計算結果と併せて、Ziglinbの定理を2自由度非同次ハミルトン系に適用して得られる吉田の定理[9]について述べる。次の2自由度ハミルトン系を考える。

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \sum_{k=2}^{2m} \Phi_k(x, y) \quad (18)$$

ただし、  $\Phi_k(x, y)$  は  $k$  次の同次式ポテンシャルとする。系(18)は、  $x(t) = 0, y(t) = \varphi(t)$  なる形をした特殊解(直線解)を持ち、  $\varphi(t)$  は次の運動方程式を満たすと仮定する。

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + W'(\varphi) = 0, \quad W(X) = \sum_{k=2}^{2m} \frac{\alpha_k}{k} X^k \quad (19)$$

ここで,  $\alpha_2 > 0, \alpha_{2m} > 0$  と仮定しておく. 直線解  $\varphi(t)$  はエネルギー積分

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + W(\varphi) = h \quad (20)$$

より決定され, 積分

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} dw / \sqrt{2[h - W(w)]} \quad (21)$$

の逆関数として定まる多重周期関数となる. 直線解  $\varphi(t)$  に沿う直交変分方程式は, 以下の様な形となる.

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \left[ \sum_{k=2}^{2m} \beta_k \varphi(t)^{k-2} \right] \xi = 0. \quad (22)$$

ここで,  $\xi$  は  $x$  方向の変分である. パラメータ  $\lambda_k$  を,

$$\lambda_k = \frac{\beta_k}{\alpha_k}, \quad k = 2, \dots, 2m \quad (23)$$

で定義する.

方程式 (22) に関して, モノドロミー行列を陽に求める解析的手法は知られていない. しかしながら, 極限  $h \rightarrow \infty$  および  $h \rightarrow 0$  ではモノドロミー行列を計算可能であることが, 文献 [9] で指摘されている. (19) と (22) の両式において,  $h \rightarrow \infty$  では最高次の項,  $h \rightarrow 0$  では最低次の項が支配的になる. したがって, これらの極限では, (22) 式の任意のモノドロミー行列は, 最高次もしくは最低次の項のみからなる同次ポテンシャル系の対応するモノドロミー行列に収束する.  $z = \sqrt{2[h - W(w)]}$  で定まるリーマン面の分岐点, すなわち代数方程式  $W(w) - h = 0$  の解を,  $\sigma_k(h)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2m - 1$  で表す. 極限  $h \rightarrow \infty$  では  $W(w)$  の最高次の項が支配的となるので, 各  $\sigma_k(h)$  は (10) 式で与えられる同次ポテンシャル系の分岐点の一つに漸近する. いま,  $\sigma_k(h)$  は  $\hat{\sigma}_k$  に漸近し,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \sigma_k / \hat{\sigma}_k = 1$  となるものとする. 以下では, 任意の  $h > 0$  に対し, 方程式  $W(w) - h = 0$  の解  $\sigma_k(h)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2m - 1$  は全て異なると仮定する. エネルギー値  $h$  に依存して変形する 2 つのループ  $\gamma_1(h)$ ,  $\gamma_2(h)$  を定義できる.  $\gamma_1(h)$  は  $\sigma_0(h)$  と  $\sigma_m(h)$  を反時計回りに一周するもの,  $\gamma_2(h)$  は  $\sigma_1(h)$  と  $\sigma_{m+1}(h)$  を反時計回りに一周するものとする. ループ  $\gamma_1(h)$ ,  $\gamma_2(h)$  に対応する (22) 式のモノドロミー行列を, それぞれ,  $g_1(h)$ ,  $g_2(h)$  とする. 極限  $h \rightarrow \infty$  で,  $g_1(h)$ ,  $g_2(h)$  は, それぞれ,  $\hat{g}_1$ ,  $\hat{g}_2$  に収束するので次式を得る.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{tr } g_1(h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \text{tr } g_2(h) = F_{2m}(\lambda_{2m}) \quad (24)$$

さらに, 交換子について次式を得る.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [g_1(h), g_2(h)] = [\hat{g}_1, \hat{g}_2] \quad (25)$$

一方, 極限  $h \rightarrow 0$  において, 直線解の実数周期に対応するモノドロミー行列  $g_1(h)$  を考える.  $h \rightarrow 0$  では, (19) と (22) の両式において, 2 次の項が支配的となる. 方程式  $W(X) - h = 0$  の解が単根であるという仮定より, ループ  $\gamma_1(h)$  内部の特異点  $\sigma_0$  と  $\sigma_m$  は, 任意の  $h > 0$  に対して実軸上にあり,  $h \rightarrow 0$  で  $w = \pm(2h/\alpha_2)^{1/2}$  に漸近する. したがって,  $g_1(h)$  は 2 次の同次ポテンシャル系の実数周期に対応するモノドロミー行列に収束する. よって,  $g_1(h)$  の跡に関して次式を得る.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{tr } g_1(h) = 2 \cos \left[ 2\pi \sqrt{\lambda_2} \right] \quad (26)$$

ただし,  $\lambda_2 = \beta_2/\alpha_2$  である.

極限  $h \rightarrow 0, \infty$  でのモノドロミー行列の情報と併せて Ziglin の定理を適用することにより, 以下の 2 自由度の非同次ポテンシャル系に対する積分不可能性定理が, 吉田により得られている [9]. 直線解  $\varphi(t)$  に対応する点集合  $\Gamma_h = \{(0, \dot{\varphi}(t), 0, \varphi(t)) \in H^{-1}(h) \mid t \in \mathbf{C}\}$  を定義する. さらに, 任意に固定された  $h_0 \in (0, \infty)$ , および,  $(h_0 - \varepsilon, h_0 + \varepsilon) \subseteq (0, \infty)$  なる任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, 直線解の族  $\{\Gamma_h\}_{h_0, \varepsilon} = \{\Gamma_h \in \mathbf{C}^4 \mid h \in U_\varepsilon(h_0) = (h_0 - \varepsilon, h_0 + \varepsilon)\}$  を定義する.

**定理 2.** [9]  $m \geq 2, \alpha_2 > 0, \alpha_{2m} > 0$  とする. 任意の実数  $h > 0$  に対し, 代数方程式  $W(X) - h = 0$  の解は全て異なるとする. さらに,  $F_{2m}(\lambda_{2m}) \notin \{0, \pm 2, 2 \cos[2\pi\sqrt{\lambda_2}]\}$  とする. このとき, 任意の  $h_0 \in (0, \infty)$  と  $\varepsilon > 0$  に対し, 系 (18) は,  $h \in (h_0 - \varepsilon, h_0 + \varepsilon)$  に対する直線解の族を含む連結な近傍において,  $H$  と関数的に独立な解析的積分を持ち得ない.

**証明.** モノドロミー行列  $g_1(h), g_2(h)$  を考える. 代数方程式  $W(X) - h = 0$  の解が単根であるという仮定により, 行列  $g_1(h), g_2(h)$  の成分は, 区間  $h \in (0, \infty)$  で  $h$  に関して解析的である. (24), (26) 式より, 両極限  $h \rightarrow 0, h \rightarrow \infty$  において,  $\text{tr } g_1(0) = 2 \cos[2\pi\sqrt{\lambda_2}], \text{tr } g_1(\infty) = \text{tr } g_2(\infty) = F_{2m}(\lambda_{2m})$  が成立する.

条件  $F_{2m}(\lambda_{2m}) \neq 2 \cos[2\pi\sqrt{\lambda_2}]$  より  $\text{tr } g_1(\infty) \neq \text{tr } g_1(0)$  なので,  $\text{tr } g_1(h)$  は区間  $h \in (0, \infty)$  において定数とは異なる  $h$  の解析関数である. よって, 区間  $(0, \infty)$  内の稠密な集合  $S$  が存在して, 任意の  $h \in S$  に対し  $g_1(h)$  は非共鳴となる.  $\{\Gamma_h\}_{h_0, \varepsilon}$  の近傍で  $H$  以外の第一積分が存在すると仮定する. 定理 1 より, 任意に固定された  $h \in S \cap U_\varepsilon(h_0)$  に対し,  $[g_1(h), g_2(h)] = 0$ , または,  $\text{tr } g_2(h) = 0$  が成立する. 以下, 2通りの場合に分けて考える. (i) ある  $\bar{h} \in S \cap U_\varepsilon(h_0)$  に対し,  $[g_1(\bar{h}), g_2(\bar{h})] \neq 0$  となると仮定する.  $[g_1(h), g_2(h)]$  の連続性により,  $\bar{h}$  のある近傍  $U'(\bar{h}) \subseteq U_\varepsilon(h_0)$  において,  $[g_1(h), g_2(h)] \neq 0$  となる. よって, 任意の  $h \in S'$  に対し,  $\text{tr } g_2(h) = 0$  となる. ただし,  $S'$  は  $S' = S \cap U'(\bar{h})$  である.  $\text{tr } g_2(h)$  は  $h$  の解析関数であり, かつ,  $U'(\bar{h})$  上で稠密な集合  $S'$  上で  $\text{tr } g_2(h) = 0$  であるので, 全区間  $(0, \infty)$  上で恒等的に  $\text{tr } g_2(h) = 0$  となる. このことは, 仮定  $\text{tr } g_2(\infty) = F_{2m}(\lambda_{2m}) \neq 0$  に矛盾する. (ii) ある  $\bar{h} \in S \cap U_\varepsilon(h_0)$  に対して  $\text{tr } g_2(\bar{h}) \neq 0$  と仮定すると, 先と同様の議論により,  $\bar{h}$  のある近傍  $U''(\bar{h}) \subseteq U_\varepsilon(h_0)$  が存在し, 任意の  $h \in S'' = S \cap U''(\bar{h})$  に対して  $[g_1(h), g_2(h)] = 0$  となる.  $[g_1(h), g_2(h)]$  は  $h$  の解析関数であり, かつ,  $U''(\bar{h})$  上で稠密な集合  $S''$  上で  $[g_1(h), g_2(h)] = 0$  であるので, 全区間  $(0, \infty)$  上で恒等的に  $[g_1(h), g_2(h)] = 0$  となる. (25) 式より,  $h \rightarrow \infty$  における交換子は  $[\hat{g}_1, \hat{g}_2]$  で与えられる. したがって,  $h \rightarrow \infty$  で  $[g_1(h), g_2(h)] = 0$  となるためには,  $F_{2m}(\lambda_{2m}) \neq \pm 2$  でなければならない. これは, 仮定  $F_{2m}(\lambda_{2m}) \neq \pm 2$  に反する.

以上より, 積分の存在を仮定すると, いずれの場合にも矛盾が生じる. 故に,  $\{\Gamma_h\}_{h_0, \varepsilon}$  の連結な近傍で,  $H$  と独立な積分は存在しないことが結論される. ■

注) 原論文 [9] の定理ではモノドロミー行列  $g_1(h), g_2(h)$  の  $h$  に関する解析性を保証するための条件が足りない. ここでは, 十分条件として,  $W(X) - h = 0$  の解が単根である条件を付加した.

### 3 部分力学系と積分不可能性

本節では, 低次元不変部分空間上の部分ハミルトン系の積分不可能性と, 全系の積分不可能性を関連づけるための補題を与える. 複素位相空間  $M = \mathbf{C}^{2(n+2)}$  上で定義された次の  $n+2$  自由度ハミルトン

系を考える.

$$H(q_1, \dots, q_{n+2}, p_1, \dots, p_{n+2}) \quad (27)$$

ハミルトン系 (27) は, 以下に定義される 4 次元不変部分空間  $\mathcal{I}$  を持つと仮定する.

$$\mathcal{I} = \left\{ (q_1, \dots, q_{n+2}, p_1, \dots, p_{n+2}) \in \mathbb{C}^{2(n+2)} \mid q_i = p_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (28)$$

$\mathcal{I}$  上に制限されたベクトル場を与える部分ハミルトニアンを,  $\tilde{H}(q_{n+1}, q_{n+2}, p_{n+1}, p_{n+2})$  とする. 部分ハミルトニアン  $\tilde{H}$  は, 元のハミルトニアン  $H$  と次式で関係づけられる.

$$\tilde{H}(q_{n+1}, q_{n+2}, p_{n+1}, p_{n+2}) = H(0, \dots, 0, q_{n+1}, q_{n+2}, 0, \dots, 0, p_{n+1}, p_{n+2}) \quad (29)$$

$\Gamma_h$  を部分ハミルトン系の直線解をし, 直線解の族を  $\{\Gamma_h\}$  で表す. 次の補題が成立する.

**補題 1.** 部分ハミルトン系 (29) に関して,  $\tilde{H}$  と関数的に独立, かつ,  $\{\Gamma_h\}$  の  $\mathcal{I}$  における連結な近傍で解析的な第一積分は存在しないと仮定する. このとき, ハミルトン系 (27) は,  $\{\Gamma_h\}$  の  $\mathcal{M}$  における連結な近傍  $U$  で定義される  $n+2$  個の解析的積分  $f_1 = H, f_2, \dots, f_{n+2}$  で, 以下の条件を満たすものを持ち得ない.

(C1) 1-形式  $df_i, i = 1, 2, \dots, n+2$  は,  $D \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$  なる稠密な開集合  $D \subseteq U$  上で一次独立.

(C2)  $f_i, i = 1, 2, \dots, n+2$  は包含系を成し, 任意の  $f_i, f_j$  に対して  $\{f_i, f_j\} = 0, i, j = 1, 2, \dots, n+2$ .

**証明.** 条件 (C1), (C2) を満たす  $n+2$  個の積分が存在すると仮定する. 関数  $\tilde{f}_i$  を,  $\tilde{f}_i(q_{n+1}, q_{n+2}, p_{n+1}, p_{n+2}) = f_i(0, \dots, 0, q_{n+1}, q_{n+2}, 0, \dots, 0, p_{n+1}, p_{n+2})$  により定義する.  $\mathcal{I}$  は不変部分空間なので, 各  $\tilde{f}_i$  は,  $\mathcal{I} \cap U$  で定義された部分ハミルトン系 (29) の積分となる. 部分ハミルトン系における  $\tilde{H}$  と独立な積分の非存在より,  $\tilde{f}_i$  と  $\tilde{H}$  は  $\mathcal{I} \cap U$  上で関数的に従属となる. したがって,  $\tilde{f}_i$  は  $\tilde{H}$  のみの関数となる. すなわち, ある解析関数  $\psi_i$  が存在し,  $\tilde{f}_i = \psi_i(\tilde{H})$  となる. よって, ハミルトニアン  $f_1 = H$  を除いて,  $\mathcal{I} \cap U$  上で  $f_i = 0, i = 2, 3, \dots, n+2$  と仮定できる. 実際, もし  $\tilde{f}_i \neq 0$  ならば,  $f_i$  の代わりに  $f_i - \psi_i(H)$  を積分として用いることができる.

条件 (C1) より, ある点  $x \in D \cap \mathcal{I}$  が存在し,  $df_i, i = 1, 2, \dots, N$  は  $x$  で一次独立となる.  $U_x$  を,  $\mathcal{M}$  における  $x$  の近傍とする.  $f_i$  は  $(q_1, \dots, q_{n+2}, p_1, \dots, p_{n+2})$  の解析関数なので,  $\tilde{f}_i = 0$  であることを考慮すると,  $U_x$  において, 各  $f_i, i = 2, 3, \dots, n+2$  を以下の様な級数に展開可能である.

$$f_i = \sum_{|\nu|=1}^{\infty} f_{\nu}^{(i)}(q_{n+1}, q_{n+2}, p_{n+1}, p_{n+2}) q_1^{\nu_1} \cdots q_n^{\nu_n} p_1^{\nu_{n+1}} \cdots p_n^{\nu_{2n}} \quad (30)$$

ただし,  $\nu$  は  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2n})$  なる多重添字,  $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{2n}$ ,  $f_{\nu}^{(i)}$  は  $(q_{n+1}, q_{n+2}, p_{n+1}, p_{n+2})$  の解析関数とする.

(30) 式を用いた簡単な計算により,  $i = 2, 3, \dots, n+2$  に対して,  $x$  における 1-形式  $df_i$  は以下の様な形となることが分かる.

$$df_i = \sum_{j=1}^n \left[ a_j^{(i)}(x) dq_j + a_{n+j}^{(i)}(x) dp_j \right], \quad (31)$$

(31) 式で,  $a_j^{(i)}$  は, 成分が  $\nu_k = \delta_{j,k}$  で与えられる多重添字  $\nu$  に対応する  $f_{\nu}^{(i)}$  に等しい. ただし,  $\delta_{j,k}$  は, クロネッカーのデルタを表す.  $df_i$  は,  $dq_i, dp_i, i = n+1, n+2$  に関する項を含まないことを注意

しておく.  $L_x$  を,  $L_x = \text{span}\{\partial/\partial q_1, \dots, \partial/\partial q_n, \partial/\partial p_1, \dots, \partial/\partial p_n\}$  で定義される  $x$  における接空間  $T_x\mathcal{M}$  の部分空間とする.  $L_x^*$  を,  $L_x$  の双対空間  $L_x^* = \text{span}\{dq_1, \dots, dq_n, dp_1, \dots, dp_n\}$  とする. (31) 式より,  $i = 2, 3, \dots, n+2$  に対し  $df_i \in L_x^*$ . さらに, 部分空間  $L_{f,x} = \{v \in L_x \mid df_i(v) = 0, i = 2, 3, \dots, n+2\} \subseteq L_x$  を定義する. 1-形式  $df_i, i = 2, 3, \dots, n+2$  は  $x$  で一次独立なので,  $L_{f,x}$  の次元は,  $\dim L_{f,x} = \dim L_x - (n+1) = n-1$  で与えられる.

$I$  を, 余接ベクトル束  $T^*\mathcal{M}$  から接ベクトル束  $T\mathcal{M}$  への同相写像で, 1-形式を附随するハミルトンベクトル場に写すものとする. (30) 式より,  $f_i$  をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場  $Idf_i, i = 2, 3, \dots, n+2$  は, 点  $x$  において以下の様に得られる.

$$Idf_i = \sum_{j=1}^n \left[ b_j^{(i)}(x) \frac{\partial}{\partial q_j} + b_{n+j}^{(i)}(x) \frac{\partial}{\partial p_j} \right] \quad (32)$$

ただし,  $b_j^{(i)} = a_{n+j}^{(i)}, b_{n+j}^{(i)} = -a_j^{(i)}, j = 1, 2, \dots, n$ . 条件 (C2) より,  $df_i(Idf_j) = 0, i, j = 2, 3, \dots, n+2$  が成り立つので,  $Idf_j \in L_{f,x}, j = 2, 3, \dots, n+2$ . 写像  $I$  は非退化なので,  $n+1$  個のベクトル  $Idf_j, j = 2, 3, \dots, n+2$  は一次独立である. このことは,  $\dim L_{f,x} \geq n+1$  を意味し,  $\dim L_{f,x} = n-1$  に矛盾する. 故に, 条件 (C1), (C2) を満たす  $n+2$  個の積分の組は存在しない. ■

#### 4 非線形格子の積分不可能性

複素位相空間  $\mathcal{M}_1 = \mathbf{C}^{2N}$  上で定義された格子ハミルトニアン (1) を考える. オンサイトポテンシャル  $U(X)$  に対して, 対称性  $U(X) = U(-X)$  を仮定する. すなわち, 奇数の  $k$  に対し  $\mu_k = 0$ . 境界条件としては周期境界を仮定し, 格子のサイズ  $N$  は 4 の倍数とする. すなわち,

$$q_0 = q_N, q_{N+1} = q_1, N = 4n \ (n \in \mathbf{N}) \quad (33)$$

格子の運動方程式は, 次式となる.

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + U'(q_i) - V'(q_{i+1} - q_i) + V'(q_i - q_{i-1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

正準変換  $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \mapsto (Q_0, \dots, Q_{N-1}, P_0, \dots, P_{N-1})$  を次式で定義する.

$$q_i = \sum_{k=0}^{N-1} Q_k \left[ \sin\left(\frac{2\pi k}{N} i\right) + \cos\left(\frac{2\pi k}{N} i\right) \right] \quad (35)$$

$$p_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_k \left[ \sin\left(\frac{2\pi k}{N} i\right) + \cos\left(\frac{2\pi k}{N} i\right) \right] \quad (36)$$

ただし,  $i = 1, 2, \dots, N$ . 新座標  $Q_k, P_k$  は, ノーマルモード座標と呼ばれる. 以下の様な, 不変部分空間, および, 部分ハミルトニアンを得ることができる.

**命題 1.** オンサイトポテンシャルの対称性  $U(X) = U(-X)$ , および, 格子サイズの条件  $N = 4n \ (n \in \mathbf{N})$  を仮定する. さらに, 周期境界条件を仮定する. このとき, 非線形格子 (1) は, 以下の様な 4 次元不変部分空間  $\mathcal{I}_1$  を持つ.

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ (Q_0, \dots, Q_{N-1}, P_0, \dots, P_{N-1}) \in \mathbf{C}^{2N} \mid Q_k = P_k = 0, k \neq N/4, N/2 \right\} \quad (37)$$

さらに,  $\mathcal{I}_1$  上のベクトル場を定める部分ハミルトニアン  $\tilde{H}_1$  は, 次式で与えられる.

$$\tilde{H}_1 = \frac{1}{2N} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{N}{2} [U(x-y) + U(x+y)] + \frac{N}{4} [V(2(x+y)) + V(2(y-x)) + 2V(-2y)] \quad (38)$$

ただし,  $(x, y, p_x, p_y) = (Q_{N/4}, Q_{N/2}, P_{N/4}, P_{N/2})$ .

証明. (35), (36) 式より,  $\mathcal{I}_1$  上の任意の点は, 元の座標  $(q, p)$  で以下のように表される.

$$\begin{aligned} q_{4k+1} = -q_{4k+2} = Q_{N/4} - Q_{N/2} \quad p_{4k+1} = -p_{4k+2} &= \frac{1}{N} (P_{N/4} - P_{N/2}) \\ -q_{4k+3} = q_{4k+4} = Q_{N/4} + Q_{N/2} \quad -p_{4k+3} = p_{4k+4} &= \frac{1}{N} (P_{N/4} + P_{N/2}) \end{aligned} \quad (39)$$

ただし,  $k = 0, 1, \dots, N/4 - 1$ .  $\mathcal{I}'_1$  を, 以下の様に定義される  $\mathcal{M}_1$  の部分空間とする.

$$\mathcal{I}'_1 = \left\{ (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{C}^{2N} \mid \begin{aligned} q_{4k+1} = -q_{4k+2}, \quad q_{4k+3} = -q_{4k+4}, \\ p_{4k+1} = -p_{4k+2}, \quad p_{4k+3} = -p_{4k+4}, \quad k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$\mathcal{I}'_1$  は,  $\mathcal{M}_1$  において,  $\mathcal{I}_1$  と同一の点集合を定める. よって,  $\mathcal{I}'_1$  が不変であることを示すためには,  $\mathcal{I}'_1$  が, ハミルトニアン (1) の定めるベクトル場に関して不変であることを示せばよい. 周期境界条件下の運動方程式 (34) に対し,  $\mathcal{I}'_1$  上の任意の点を初期点とする解が次の形で与えられることは, 容易に確認できる.

$$q_{4k+1}(t) = -q_{4k+2}(t) = \psi_1(t), \quad q_{4k+3}(t) = -q_{4k+4}(t) = \psi_2(t), \quad k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \quad (41)$$

ここで,  $\psi_1$  と  $\psi_2$  は, 次の微分方程式を満たす解である.

$$\frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + U'(\psi_1) - V'(-2\psi_1) + V'(\psi_1 + \psi_2) = 0 \quad (42)$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + U'(\psi_2) - V'(-2\psi_2) + V'(\psi_1 + \psi_2) = 0 \quad (43)$$

任意の  $t$  に対し, (41) 式で表される解は  $\mathcal{I}'_1$  に含まれるので,  $\mathcal{I}'_1$  したがって,  $\mathcal{I}_1$  は不変部分空間である.

部分ハミルトニアン (38) は, (39) 式を元のハミルトニアン (1) に代入し,  $(Q_{N/4}, Q_{N/2}, P_{N/4}, P_{N/2})$  を  $(x, y, p_x, p_y)$  と表すことにより得られる. ■

注) 命題 1 において,  $U(X)$  と  $V(X)$  が多項式であることは仮定していない.

ポテンシャル関数を 2), (3) 式とし, 部分ハミルトニアン (38) を考える. 部分ハミルトン系 (38) は,  $x(t) = 0, y(t) = \varphi(t)$  なる形をした直線解を持つ. 解  $\varphi$  は, 次の微分方程式を満たす.

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \sum_{r=1}^m (\mu_{2r} + 2^{2r} \kappa_{2r}) \varphi^{2r-1} = 0 \quad (44)$$

運動方程式 (44) は, 次のエネルギー積分を持つ.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + W_1(\varphi) = h \quad (45)$$



ここで、次式で定義される実効ポテンシャル  $W_1(X)$  を導入した。

$$W_1(X) = \sum_{r=1}^m \frac{1}{2^r} \left( \mu_{2r} + 2^{2r} \kappa_{2r} \right) X^{2r}. \quad (46)$$

上式において、 $h$  は 1 粒子当たりのエネルギーと見なせ、全系 (1) のエネルギー  $H$  とは、 $h = H/N$  で関係づけられる。直線解に沿う直交変分方程式は

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \left[ \sum_{k=2}^{2m} (k-1) \left( \mu_k + 2^{k-1} \kappa_k \right) \varphi(t)^{k-2} \right] \xi = 0 \quad (47)$$

となる。(44), (47) 式より、パラメータ  $\lambda_2, \lambda_{2m}$  は以下の様に求まる。

$$\lambda_2 = \frac{\mu_2 + 2\kappa_2}{\mu_2 + 4\kappa_2}, \quad \lambda_{2m} = (2m-1) \frac{\mu_{2m} + 2^{2m-1} \kappa_{2m}}{\mu_{2m} + 2^{2m} \kappa_{2m}}$$

直線解  $\varphi$  は、点集合  $\Gamma_{1,h} = \{(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \in H^{-1}(Nh) \mid q_i = (-1)^i \varphi(t), p_i = (-1)^i \dot{\varphi}(t), t \in \mathbf{C}, i = 1, 2, \dots, N\} \subseteq \mathcal{M}_1 = \mathbf{C}^{2N}$  を定める。直線解の族を、 $\{\Gamma_{1,h}\}_{h_0, \varepsilon} = \{\Gamma_{1,h} \in \mathcal{M}_1 \mid h \in (h_0 - \varepsilon, h_0 + \varepsilon)\}$  により定める。ただし、 $h_0 \in (0, \infty)$  であり、 $\varepsilon > 0$  は  $(h_0 - \varepsilon, h_0 + \varepsilon) \subseteq (0, \infty)$  なる正の実数である。周期非線形格子の積分不可能性に関する次の定理を得る。

**定理 3.**  $N = 4n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $m \geq 2$  とする。パラメータ  $\mu_k, \kappa_k, k = 2, \dots, 2m$  は、以下の条件を満たすものとする：(i) 奇数の  $k$  に対し  $\mu_k = 0$ , (ii)  $\min\{\mu_2 + 2\kappa_2, \mu_2 + 4\kappa_2\} > 0, \mu_{2m} \geq 0, \kappa_{2m} > 0$ , (iii) 任意の実数  $h \in (0, \infty)$  に対し、代数方程式  $W_1(X) - h = 0$  の解は全て異なる。このとき、部分ハミルトン系  $\tilde{H}$  は、任意の  $h_0 \in (0, \infty), \varepsilon > 0$  に対し、 $\{\Gamma_{1,h}\}_{h_0, \varepsilon}$  の  $\mathcal{I}_1$  における連結な近傍  $U_{\mathcal{I}_1}$  で  $\tilde{H}$  と関数的に独立な解析的積分を持ち得ない。さらに、 $\{\Gamma_{1,h}\}_{h_0, \varepsilon}$  の  $\mathcal{M}_1$  における連結な近傍  $U_{\mathcal{M}_1}$  で定義された全系の包摂的な  $N$  個の解析的積分  $f_i, i = 1, \dots, N$  で、 $U_{\mathcal{M}_1} \cap \mathcal{I}_1$  上のある点で  $df_i, i = 1, \dots, N$  が一次独立なもの存在しない。

**証明.** 不変部分空間  $\mathcal{I}_1$  と部分ハミルトニアン  $\tilde{H}_1$  を考える。(44) 式より、 $\alpha_2 = \mu_2 + 4\kappa_2, \alpha_{2m} = \mu_{2m} + 2^{2m} \kappa_{2m}$ 。仮定により、 $\alpha_2 > 0, \alpha_{2m} > 0$  を得る。(48) 式より、パラメータ  $\lambda_{2m}$  は、

$$\lambda_{2m} = (2m-1) \left[ 1 - \frac{2^{2m-1}}{(\mu_{2m}/\kappa_{2m}) + 2^{2m}} \right] \quad (48)$$

と書ける。 $m \geq 2, \mu_{2m}/\kappa_{2m} \geq 0$  なので、 $1 < (2m-1)/2 \leq \lambda_{2m} < 2m-1$  が成り立つ。よって、 $\lambda_{2m}$  は、(17) 式で定義される領域  $S_{2m}$  に含まれる。このことは、 $F_{2m}(\lambda_{2m}) > 2$  を意味する。 $\lambda_2 = (\mu_2 + 2\kappa_2)/(\mu_2 + 4\kappa_2)$  は正の実数なので、 $F_{2m}(\lambda_{2m}) \notin \{0, \pm 2, 2 \cos[2\pi\sqrt{\lambda_2}]\}$ 。定理 2 の条件が満たされるので、部分ハミルトン系 (38) は、 $U_{\mathcal{I}_1}$  で定義される  $\tilde{H}_1$  と独立な解析的積分を持ち得ない。これにより、補題 1 の条件が満たされるので、 $U_{\mathcal{M}_1}$  で定義された全系の包摂的な  $N$  個の解析的積分  $f_i, i = 1, \dots, N$  で、 $U_{\mathcal{M}_1} \cap \mathcal{I}_1$  上のある点で  $df_i, i = 1, \dots, N$  が一次独立なものは存在しない。■

低次のポテンシャル ( $m = 2, 3, 4$ ) の場合について、定理 3 を適用した例を示す。これらの場合については、任意の  $h > 0$  に対し方程式  $W_1(X) - h = 0$  が  $2m$  個の異なる解を持つ様な係数  $\mu_k, \kappa_k$  に対する十分条件を、陽に求めることができる。

実効ポテンシャル (46) には,  $X$  の偶数次の項しか現れないので, 変数  $Y = X^2$  を導入する. 変数  $Y$  を用いると, 方程式  $W_1(X) - h = 0$  は,

$$\mathcal{F}_m(Y) = \sum_{r=1}^m A_r Y^r - h = 0 \quad (49)$$

と書き換えられる. ここで, 係数  $A_r$  は, 次式で定義した.

$$A_r = \frac{1}{2^r} (\mu_{2r} + 2^{2r} \kappa_{2r}) \quad (50)$$

明らかに, 方程式  $\mathcal{F}_m(Y) = 0$  が  $m$  個の異なる解を持つ場合に限り, 元の方程式  $W_1(X) - h = 0$  が  $2m$  個の異なる解を持つ. したがって, 任意の  $h > 0$  に対し  $\mathcal{F}_m(Y) = 0$  が  $m$  個の異なる解を持つ様な係数  $\mu_k, \kappa_k$  に対する条件を求めればよい. ポテンシャルが低次の場合, この係数条件は,  $\mathcal{F}_m(Y) = 0$  の判別式を利用して求めることができる.

### 1) $m = 2$ の場合.

ポテンシャル係数  $\mu_k, \kappa_k, k = 2, 3, 4$  が, 条件  $\min\{\mu_2 + 2\kappa_2, \mu_2 + 4\kappa_2\} > 0, \mu_4 \geq 0, \kappa_4 > 0, \mu_3 = 0$  を満たすとする. このとき,  $N = 4n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) なる周期格子 (1) は, 定理 3 の意味で積分不可能である. FPU 格子は, オンサイトポテンシャルが無い場合  $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$  に対応する. よって,  $\kappa_2, \kappa_4 > 0$  ならば, FPU 格子は積分不可能である.

### 2) $m = 3$ の場合.

ポテンシャル係数  $\mu_k, \kappa_k, k = 2, 3, \dots, 6$  が, 条件  $\min\{\mu_2 + 2\kappa_2, \mu_2 + 4\kappa_2\} > 0, \mu_6 \geq 0, \kappa_6 > 0, \mu_3 = \mu_5 = 0, -\sqrt{3A_1 A_3} < A_2 < 2\sqrt{A_1 A_3}$  を満たすとする. このとき,  $N = 4n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) なる周期格子 (1) は, 定理 3 の意味で積分不可能である.

### 3) $m = 4$ の場合.

$N = 4n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) とする. ポテンシャル係数  $\mu_k, \kappa_k, k = 2, 3, \dots, 8$  が, 条件  $\min\{\mu_2 + 2\kappa_2, \mu_2 + 4\kappa_2\} > 0, \mu_8 \geq 0, \kappa_8 > 0, \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = 0, 108A_1^2 A_4^2 + 27(A_3^2 - 4A_2 A_4) A_1 A_3 + 32(A_2 A_4 - 9A_3^2) A_2^2 < 0$  を満たすとする. このとき,  $N = 4n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) なる周期格子 (1) は, 定理 3 の意味で積分不可能である.

## 参考文献

- [1] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, *Collected Papers of E. Fermi*, edited by E. Segré (University of Chicago, Chicago, 1965).
- [2] M. Toda 1981 *Theory of nonlinear lattice* (Springer, Berlin, 1981).
- [3] H. Yoshida 1989 A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with  $n$  degrees of freedom Phys. Lett. A 141 108-112.
- [4] K. Umeno 1994 Galois extensions in Kowalevski exponents and nonintegrability of nonlinear lattice Phys. Lett. A 190 85-89.

- [5] K. Umeno 1996 Non-perturbative non-integrability of non-homogeneous nonlinear lattice induced by non-resonance hypothesis *Physica D* **94** 116-134.
- [6] S. L. Ziglin 1983 Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I *Functional Anal. Appl.* **16** 181-189.
- [7] S. L. Ziglin 1983 Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II *Functional Anal. Appl.* **17** 6-17.
- [8] H. Yoshida 1987 A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential *Physica D* **29** 128-142.
- [9] H. Yoshida 1988 Non-integrability of the truncated Toda Lattice Hamiltonian at any order *Commun. Math. Phys.* **116** 529-538.