

## サドル・センターを有するハミルトン系の 非可積分性とカオス

岐阜大工学部 矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)  
Faculty of Engineering, Gifu University

### 1. はじめに

図1に示された直交2重振り子を考える.  $z$ -方向に重力を受け, 1番目の質量  $m_1$  は  $(x, z)$ -平面内を原点  $O$  から  $l_1$  の距離で運動し, 2番目の質量  $m_2$  は  $(y, z)$ -平面に平行な平面内を1番目の質量から  $l_2$  の距離を運動するものとする. そのハミルトン系は2自由度で, 相空間には, 不変平面が存在し, その上に1組のホモクリニック軌道を有するサドル・センターが存在する.

Lerman [1] と Mielke ら [2] は, ホモクリニック軌道を有するサドル・センターをもつ generic な2自由度ハミルトン系に対して, 馬蹄写像 [3-5] が埋め込まれ, カオスが起ることを証明した. Grotta-Ragazzo [6] は, ポテンシャルを有する場合に対して, その generic な条件を座標系と独立な形で与えている. Mielke ら [2] はまたパラメータ  $m_j, l_j, j = 1, 2$ , の generic な選択に対して, 直交2重振り子でカオスが起ることを予想している.

Morales-Ruiz と Ramis [7,8] は複素解析の意味でのハミルトン系の可積分性に対する必要条件を与えた. 線形微分方程式に対する微分ガロア理論 [9-11] を用いて, Ziglin [12] の結果を拡張し, ハミルトン系の可積分性が特解のまわりの変分方程式あるいは直交変分方程式のガロア群と密接に関係していることを示した. その方法は, 無限自由度系 [13] を含むさまざまな場合に適用されている (文献 [7] およびそこで引用されている文献を参照せよ). 変分方程式あるいは直交変分方程式のガロア群を解析するために (有理関数を係数としてもつ線形2階微分方程式に対して閉じ

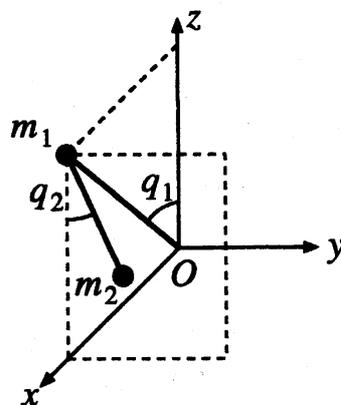


図1. 直交2重振り子

た形の解が得られるかどうかを判定し、可能な場合には実際に解を与える) Kovacic のアルゴリズム [14] と呼ばれる方法を用いることができる。さらに、Morales-Ruiz と Peris [15] は、領域を実ホモクリニック軌道の複素近傍に制限する場合、複素的な意味での非可積分性と、カオスの発生に対する Grotta-Ragazzo [6] の条件が等価であることを証明した。

一方、著者 [16] はメルニコフの方法 [4, 5, 17] を拡張し、サドル・センターをもつ 2 自由度ハミルトン系のあるクラスにおいてカオスが起る条件を求めた。その結果はまた 3 以上の自由度を有する場合に一般化されている [18]。さらに、文献 [15] と類似なアプローチを用いて、可積分性に対するガロア障壁とカオスに対するメルニコフの条件の等価性を示している [19]。

本稿では、直交 2 重振り子に対する Mielke ら [2] の予想の数学的な証明を与える。用いられる手法は、Kovacic のアルゴリズム [14] およびハミルトン系の微分ガロア理論 [7, 8] とメルニコフの方法 [16] との等価性 [19] についての結果からなり、直交 2 重振り子の運動方程式だけではなく、多くのハミルトン系に対して適用可能である。証明の詳細は文献 [20] に与えられる予定である。

## 2. 運動方程式

$q_1$  を  $m_1$  の  $z$ -軸の正方向からの回転角、 $q_2$  を  $m_2$  の  $z$ -軸の負方向からの回転角とする。ラグランジ関数は次式で与えられる。

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{q}_2^2 - m_2l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_2 - g[(m_1 + m_2)l_1 \cos q_1 - m_2l_2 \cos q_2] \quad (1)$$

ここで、 $g$  は重力加速度で、 $q = (q_1, q_2)$  である。 $x_1 = q_1$ ,  $y_1 = q_2$  を一般座標とすると、対応する運動量は

$$x_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1 + m_2l_1l_2\dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_2, \quad (2)$$

$$y_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2l_1l_2\dot{q}_1 \sin q_1 \sin q_2 + m_2l_2^2\dot{q}_2$$

となる。運動方程式は次の形で表される。

$$\dot{x} = JD_x H(x, y), \quad \dot{y} = JD_y H(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

ここで、

$$H(x, y) = x_2\dot{q}_1 + y_2\dot{q}_2 - L(q, \dot{q}) \quad (4)$$

であり、 $q = (x_1, y_1)$  と式 (2) から得られる関係式

$$\dot{q}_1 = \frac{l_2x_2 + l_1y_2 \sin x_1 \sin y_1}{l_1^2l_2(m_1 + m_2 - m_2 \sin^2 x_1 \sin^2 y_1)},$$

$$\dot{q}_2 = \frac{m_2l_2x_2 \sin x_1 \sin y_1 + (m_1 + m_2)l_1y_2}{m_2l_1l_2^2(m_1 + m_2 - m_2 \sin^2 x_1 \sin^2 y_1)}$$

が式 (4) の右辺に代入される。また、 $J$  は 2 次のシンプレクティック行列で

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

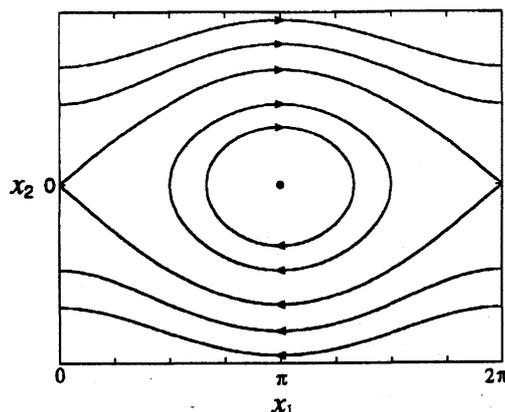


図 2. 式 (5) の相平面

で与えられる.

原点  $(x, y) = (0, 0)$  ( $= O$ ) は式 (3) のサドル・センターであり,  $x$ -平面は不変で,  $x$ -平面に制限された系は

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{(m_1 + m_2)l_1^2}, \quad \dot{x}_2 = (m_1 + m_2)gl_1 \sin x_1 \quad (5)$$

となり, 原点  $x = 0 \pmod{2\pi}$  に対する 1 組のホモクリニック軌道,

$$x_{\pm}^h(t) = \left( \pm 2 \arcsin \left( \tanh \sqrt{\frac{g}{l_1}} t \right) + \pi, \pm 2(m_1 + m_2) \sqrt{gl_1^3} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{g}{l_1}} t \right), \quad (6)$$

と 3 個の周期軌道の 1 パラメータ族,

$$x^k(t) = \left( 2 \arcsin \left( k \operatorname{sn} \sqrt{\frac{g}{l_1}} t \right) + \pi, 2k(m_1 + m_2) \sqrt{gl_1^3} \operatorname{cn} \sqrt{\frac{g}{l_1}} t \right), \quad k \in (0, 1), \quad (7)$$

と

$$x_{\pm}^k(t) = \left( \pm 2 \arcsin \left( \operatorname{sn} \sqrt{\frac{g}{l_1}} \frac{t}{k} \right) + \pi, \pm \frac{2(m_1 + m_2)}{k} \sqrt{gl_1^3} \operatorname{dn} \sqrt{\frac{g}{l_1}} \frac{t}{k} \right), \quad k \in (0, 1), \quad (8)$$

が存在する. ここで,  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  と  $\operatorname{dn}$  はヤコビの楕円関数で,  $k$  は楕円モジュールである. 式 (5) の相平面を図 2 に示す. 周期軌道の族 (7) は 1 組のホモクリニック軌道 (6) の内側に, 2 個の周期軌道の族 (8) はそれらの外側にある. また, リアプノフの定理 [21, 22] により, サドル・センター  $O$  の近傍には,  $\alpha \rightarrow 0$  のとき  $O$  に漸近する周期軌道の 1 パラメータ族  $\gamma^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  ( $\alpha_0 > 0$  はある定数), が存在する.

### 3. 直交変分方程式

不変な  $x$ -平面上の軌道  $(x, y) = (x(t), 0)$  のまわりの直交変分方程式は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \frac{x_2(t) \sin x_1(t)}{(m_1 + m_2)l_1 l_2} \eta_1 + \frac{1}{m_2 l_2^2} \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= - \left( m_2 g l_2 + \frac{x_2^2(t)(1 - \cos 2x_1(t))}{2(m_1 + m_2)^2 l_1^2} \right) \eta_1 - \frac{x_2(t) \sin x_1(t)}{(m_1 + m_2)l_1 l_2} \eta_2 \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)は単一の2階微分方程式

$$\ddot{\eta}_1 + \frac{g}{l_2}(3 \cos x_1(t) - 2\epsilon) \cos x_1(t) \eta_1 = 0 \quad (10)$$

に書き表される。ここで、

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{for } x(t) = x_{\pm}^h(t); \\ 2k^2 - 1 & \text{for } x(t) = x^k(t); \\ 2/k^2 - 1 & \text{for } x(t) = x_{\pm}^k(t) \end{cases}$$

であり、式(5)においてエネルギーが保存されることから導かれる関係式

$$\cos x_1(t) + \frac{x_2^2(t)}{2(m_1 + m_2)^2 g l_1^3} = \epsilon$$

を用いた。 $\epsilon > -1$ であることに注意する。独立変数を  $t$  から

$$z = \sin \frac{1}{2}(x_1(t) - \pi) \quad (11)$$

へ変換すると、式(10)は次のように変形される。

$$\eta_1'' + r_1(z)\eta_1' + r_2(z)\eta_1 = 0 \quad (12)$$

ここで、ダッシュは  $z$  に関する微分を表し、 $\kappa = l_1/l_2 > 0$  として

$$r_1(z) = \frac{z(4z^2 - \epsilon - 3)}{(z^2 - 1)(2z^2 - \epsilon - 1)}, \quad r_2(z) = -\frac{2\kappa(2z^2 - 1)(6z^2 - 2\epsilon - 3)}{(z^2 - 1)(2z^2 - \epsilon - 1)}$$

である。式(12)において  $\zeta(z) = \eta_1(z) \exp(\int r_1(z) dz/2)$  とおくと、直交変分方程式(9)は、Kovacic アルゴリズム [14] が適用可能な次の形に表される。

$$\zeta'' = r(s)\zeta \quad (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{1}{4}r_1^2(z) + \frac{1}{2}r_1'(z) - r_2(z) \\ &= -\frac{1}{4(z^2 - 1)^2(2z^2 - \epsilon - 1)^2} [192\kappa z^8 - 160\kappa(\epsilon + 3)z^6 \\ &\quad + 4(8\epsilon^2\kappa + 80\epsilon\kappa + 108\kappa + \epsilon + 3)z^4 \\ &\quad - (48\epsilon^2\kappa + 200\epsilon\kappa + 168\kappa - \epsilon^2 + 18\epsilon + 3)z^2 \\ &\quad + 2(\epsilon + 1)(8\epsilon\kappa + 12\kappa + \epsilon + 3)] \end{aligned} \quad (14)$$

である。

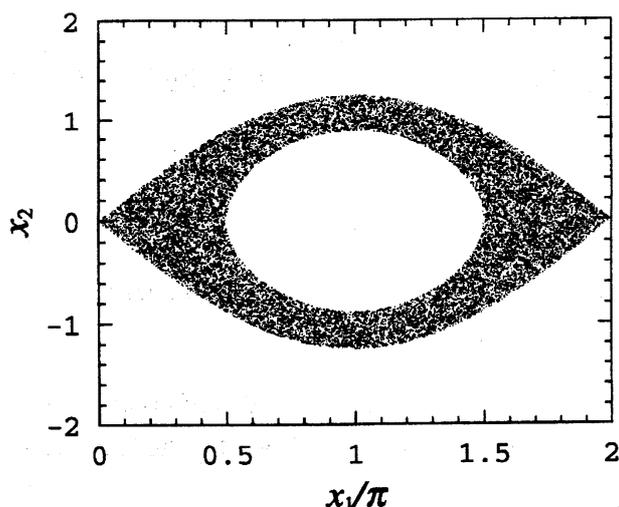


図 3. 直交 2 重振り子の数値的に計算されたポアンカレ写像の軌道

#### 4. 非可積分性とカオス

1 組のホモクリニック軌道 (6) と 2 個の周期軌道の族 (7) と (8) に, それぞれ, 対応した  $\epsilon = 1$  と  $\epsilon \neq 1$  の場合に分けて Kovacic アルゴリズム [14] を適用することにより, 式 (13) のガロア群の単位元成分が可解でなく, したがってアーベル的でないことが示される. さらに, ハミルトン系の微分ガロア理論 [7, 8] およびメルニコフの条件 [16] とのその等価性 [19] を用いると, 次の結果が得られる.

**定理** 式 (1) のラグランジ関数 (あるいは, 等価的に式 (4) のハミルトン関数) を有する直交 2 重振り子は  $H$  と独立な有理型の第 1 積分が存在しないという意味において非可積分である. さらに, サドル・センター  $O$  の近傍の周期軌道  $\gamma^\alpha$  に対する横断的なホモクリニック軌道が存在し, カオスが生じる.

$y$ -平面はまた式 (3) の流れのもとで不変であり, 1 組のホモクリニック軌道を有するサドル・センターが  $y = (\pi, 0)$  に存在する.  $x$ -と  $y$ -変数を交換し,  $y_1$  を  $\pi$  だけシフトすることにより, 上の定理と同様な結果を得ることができる.

図 3 は,  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $l_1 = l_2 = 1$ ,  $g = 9.8$  の場合に対する, 直交 2 重振り子の数値的に計算されたカオス軌道を示す. 初期条件は  $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0.01, 0.0, -0.01, 0, 0)$  で, ハミルトン・エネルギーは  $H \approx 0.979951$  である. ここで, Dormand と Prince [23] による 8 次の陽のルンゲ・クッタ法に基づき, 3 次と 5 次の結果による誤差評価を行い, 7 次の dense 出力をもつ, “DOP853” [24] と呼ばれる Fortran コードを用いた. ポアンカレ断面を 3 次元超平面  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0, \dot{y}_2 > 0\}$  に取り, 許容誤差を  $10^{-8}$  として高精度の計算結果が得られた. 計算した軌道がポアンカレ断面に交差する点は,  $y_2(t_{n-1}) < 0$ ,  $y_2(t_n) \geq 0$  を満たす数値積分の区間  $[t_{n-1}, t_n]$  をまず探し, その区間に対して  $|y_2| < 10^{-8}$  の許容誤差ではさみうち法を用いて計算した.

## 謝辞

本研究および関連した事柄についてご教示ならびに議論頂いた Juan Morales-Ruiz 氏に感謝致します。

## 参考文献

- [1] L. M. Lerman, Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddle-center, *Selecta Math. Sov.* 10 (1991), 297–306
- [2] A. Mielke P. J. Holmes and O. O'Reilly, Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center, *J. Dyn. Diff. Eqn.* 4 (1992), 95–126
- [3] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1973.
- [4] J. Guckenheimer and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.
- [5] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, 1990.
- [6] C. Grotta-Ragazzo, Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation, *Commun. Math. Phys.* 166 (1994), 255–277.
- [7] J. J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [8] J. J. Morales-Ruiz and J. P. Ramis, Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems I *Methods Appl. Anal.* 8 (2001), 33–96.
- [9] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, 2nd ed., Hermann, Paris, 1976.
- [10] M. F. Singer, An outline of differential Galois theory, in: E Tournier (Ed.), *Computer Algebra and Differential Equations*, Academic Press London, 1989, pp. 3–57.
- [11] M. Van der Put and M. F. Singer, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer, New York, 2003.
- [12] S. L. Ziglin, Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics, I, *Funct. Anal. Appl.* 16 (1982), 181–189.
- [13] K. Yagasaki, Nonintegrability of an infinite-degree-of-freedom model for unforced and undamped, straight beams, *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 70 (2003), 732–738.
- [14] J. J. Kovacic, An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations, *J. Symbolic Comp.*, 2 (1986), 3–43.

- [15] J. J. Morales-Ruiz and J. M. Peris, On a Galoisian approach to the splitting of separatrices, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **8** (1999), 125–141.
- [16] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers *Arch. Rational Mech. Anal.* **154** (2000), 275–296.
- [17] V. K. Melnikov, On the stability of the centre for time periodic perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** (1963), 1–56.
- [18] K. Yagasaki, Homoclinic and heteroclinic orbits to invariant tori in multi-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, submitted for publication.
- [19] K. Yagasaki, Galoisian obstructions to integrability and Melnikov criteria for chaos in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, *Nonlinearity* **16** (2003), 2003–2012.
- [20] K. Yagasaki, Mathematical proof of nonintegrability and chaos in an orthogonal double pendulum, in preparation.
- [21] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Redwood City CA, 1978.
- [22] K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer, New York, 1992.
- [23] J.R. Dormand, P.J. Prince, Practical Runge-Kutta processes, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **10** (1989), 977–989.
- [24] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1993.