数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 32-41

惰性的素数における虚二次体の p 進 L 関数について

東京大学・数理科学研究科　山本 修司 (Shuji YAMAMOTO)
Graduate School of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo

1 序

K を類数 1 の虚二次体，E/K を K の整数環 O_K による虚数乗法を持つ楕円曲線とする．E に伴う K の量指標を $\psi = \psi_{E/K}$ とおく．また p は $K/\mathbb{Q}$ において惰性的な素数とし，E は p において good reduction を持つと仮定する．

$0 \leq j < k$ なる整数 k, j および K の有限指標 χ に対し，Hecke L 関数 $L(\psi^{-k}\overline{\psi}^j\chi, s)$ の $s = 0$ における特殊値を p 進的に補間する p 進 L 関数を考える．p が $K/\mathbb{Q}$ で分解する場合には，k, j を p 進数として動かす，いわゆる 2 変数の p 進 L 関数が構成されている（[1], Chap. II）．一方ここで扱う惰性的な p については，Schneider-Teitelbaum [4] により，$j = 0$ として k について p 進補間する 1 変数の p 進 L 関数が得られている．筆者は修士論文 [6] において，任意に固定された $j \geq 0$ に対し，k についての p 進補間を与える p 進 L 関数を構成した．本稿ではこの結果を紹介する．

埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する．

ψ の導手を $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_\psi$ とおき，$\mathfrak{f} \mid N$，$p \nmid N$ なる整数 $N \geq 4$ をとる．

$$L = K(E[N]), \quad K_n = K(E[p^n]), \quad L_n = LK_n = K(E[Np^n]) \qquad (0 \leq n \leq \infty)$$

とおき，これらの K 上の Galois 群をそれぞれ

$$\Delta = \mathrm{Gal}(L/K), \quad \Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_n/K), \quad \mathcal{G}_n = \mathrm{Gal}(L_n/K)$$

とおく．

K の A_0 型量指標 ε に対し，その導手 $\mathfrak{f}_\varepsilon$ が Np^∞ を割り切るとき，ε は連続準同型 $\varepsilon\colon \mathcal{G}_\infty \to \mathbb{C}_p^\times$ に拡張される．また特に ψ は $\psi\colon \Gamma_\infty \xrightarrow{\sim} O_{K_p}^\times$ なる同型を導く（ここで O_{K_p} は K の p 進完備化 K_p の整数環を表す）．この同型により，$\mathcal{G}_\infty \cong \Delta \times \Gamma_\infty$ に locally K_p-analytic structure を定める．

定理 1.1 ([6], Theorem 1.1.1)

$(6Np, \mathfrak{a}) = 1$，$\psi(\mathfrak{a}) = a \in \mathbb{Z}$ なるイデアル $\mathfrak{a} \subset O_K$ をとる．このとき各整数 $j \geq 0$ に対して，$\mathcal{G}_\infty$ 上の locally K_p-analytic distribution $\widetilde{\mu}_{\mathfrak{a}}^j$，および $(\Omega_p, \Omega_\infty) \in \mathbb{C}_p^\times \times \mathbb{C}^\times$ が存在して，以下を満たす：

任意の整数 $k>j$，および $\mathfrak{f}_\varepsilon \mid Np^\infty$ なる $(k,-j)$ 型の量指標 ε に対し，

$$\Omega_p^{k-j}\int_{\mathcal{G}_\infty}\varepsilon\cdot(\psi^{-1}\overline{\psi})^j d\widetilde{\mu}_{\mathfrak{a}}^j = (-1)^{k-j-1}(k-1)!\left(\frac{\sqrt{d_K}}{2\pi}\right)^{-j}\Omega_\infty^{-k-j}$$
$$\times G(\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon(p)}{p^2}\right)(\mathbf{N}(\mathfrak{a})-\varepsilon(\mathfrak{a}))L(\varepsilon^{-1},0)$$

が成り立つ．

ここで，d_K は K の判別式，$\mathbf{N}=\mathbf{N}_{K/\mathbb{Q}}$ は絶対ノルムを表す．また $G(\varepsilon)\in\mathbb{C}$ は ε の有限部分 $\varepsilon\psi^{-k}\overline{\psi}^j$ に対して定まる数（ある種の Gauss 和）である．

なお上の等式において，本来左辺は $\mathbb{C}_p$，右辺は $\mathbb{C}$ の元であり，定理の主張はこれらが共に $\overline{\mathbb{Q}}$ に属するということを含んでいる．

distribution $\widetilde{\mu}_{\mathfrak{a}}^j$ の構成には，Schneider-Teitelbaum [4] による p 進 Fourier 変換の理論を用いる．これにより，問題は E の形式群 $\widehat{E}$ 上で特殊値 $L(\varepsilon^{-1},0)$ の「母関数」を構成することに帰着される．そこでまず第 2 節において，このような p 進補間と Fourier 変換の関係について，Riemann ζ 関数の場合を例として説明する．次に第 3 節で $\widehat{E}$ 上の Fourier 変換論，第 4, 5 節で母関数の構成について述べる．

2　p 進 ζ 関数と Fourier 変換

本節では Riemann ζ 関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ の特殊値 $\zeta(-k)$ $(k=0,1,\ldots)$ の p 進補間と，形式乗法群 $\widehat{\mathbb{G}}_m$ 上の Fourier 変換との関係を説明する．

まず，これらの特殊値の母関数を与える次の命題に注意する．

命題 2.1 p で割れない整数 a に対して

$$F_a(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{ax^a}{1-x^a}$$

とおくと，整数 $k\geq 0$ に対して

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^k F_a(1)=(1-a^{k+1})\zeta(-k)$$

が成り立つ．

これにより，$\zeta(-k)$ を p 進補間するためには，$s\in\mathbb{Z}_p$ に対して，乗法群上の不変微分 $x\dfrac{d}{dx}$ を「s 回行う」ことにしかるべき意味を与えればよい．そのために用いられるのが乗法群上の Fourier 変換である．

$\widehat{\mathbb{G}}_m = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[\![x-1]\!])$ を $\mathbb{Z}_p$ 上の形式乗法群とする．このとき同型

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}(\widehat{\mathbb{G}}_m, \widehat{\mathbb{G}}_m) \\ t & \longmapsto & (x \mapsto x^t) \end{array}$$

が成り立つ．

$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環 O に対し，$\mathbb{Z}_p$ 上の O-valued measure のなす空間を $M(\mathbb{Z}_p, O)$ で表す．$\mu \in M(\mathbb{Z}_p, O)$ に対し，その Fourier 変換[1] $F_\mu(x) \in O[\![x-1]\!]$ を

$$F_\mu(x) := \int_{\mathbb{Z}_p} x^t \, d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{t}{n} d\mu(t) \right) (x-1)^n$$

で定める．

定理 2.2 (1) Fourier 変換

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{Z}_p, O) & \longrightarrow & O[\![x-1]\!] \\ \mu & \longmapsto & F_\mu(x) \end{array}$$

は O 代数の同型である．

(2) $\mu \in M(\mathbb{Z}_p, O)$ に対し，

$$\left(x \frac{d}{dx} \right)^k F_\mu(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} t^k x^t \, d\mu(t)$$

が成り立つ．

(3) $\mathrm{supp}(\mu) \subset \mathbb{Z}_p^\times$ となるための必要十分条件は，$\displaystyle\sum_{\zeta^p=1} F_\mu(\zeta x) = 0$ が成り立つことである．

命題 2.1，定理 2.2 を用いると，$\zeta(-k)$ の p 進補間は容易に実現できる．実際命題 2.1 の有理関数 $F_a(x)$ を $\mathbb{Z}_p[\![x-1]\!]$ の元とみなし，$F_a = F_{\mu_a}$ なる $\mu_a \in M(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ をとる．すると

$$\int_{\mathbb{Z}_p} t^k \, d\mu_a(t) = (1 - a^{k+1})\zeta(-k) \quad (k \in \mathbb{Z},\, k \geq 0)$$

が成り立つ．

さらに Galois 群上の測度を得るには次のようにする．まず

$$\widetilde{F}_a(x) = F_a(x) - \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} F_a(\zeta x) = F_a(x) - F_a(x^p)$$

とおき，これに対応する測度を $\widetilde{\mu}_a$ とおくと，$\mathrm{supp}(\widetilde{\mu}_a) \subset \mathbb{Z}_p^\times$ であり，

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} t^k \, d\widetilde{\mu}_a(t) = (1 - p^k)(1 - a^{k+1})\zeta(-k)$$

[1] 「$\widehat{\mathbb{G}}_m$ 上の」という場合，むしろ逆 Fourier 変換というべきかも知れない．

が成り立つ．そこで円分指標 $\varphi\colon \Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ によって $\widetilde{\mu}_a$ を Γ 上に移し，これを再び $\widetilde{\mu}_a$ と書けば，

$$\int_\Gamma \varphi^k \, d\widetilde{\mu}_a = (1-p^k)(1-a^{k+1})\zeta(-k)$$

となる．

3 $\widehat{E}$ 上の Fourier 変換

記号は第1節の通りとする．楕円曲線 E に伴う形式群を $\widehat{E}$ とおき，$T^* = \mathrm{Hom}(\widehat{E}, \widehat{\mathbb{G}}_m)$ とおく（この Hom は $O_{\mathbb{C}_p}$ 上の形式群としての準同型全体を表す）．T^* は O_{K_p} 上階数1の自由加群となる．また，$x \in \widehat{E}(O_{\mathbb{C}_p})$ に対して

$$\begin{array}{rccc} f_x\colon & T^* & \longrightarrow & \mathbb{C}_p^\times \\ & t & \longmapsto & t(x) \end{array}$$

とおくと，$x \mapsto f_x$ は同型 $\widehat{E}(O_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathrm{Hom}(T^*, \mathbb{C}_p^\times)$ を与える（この Hom は locally K_p-analytic な群準同型全体を表す）．

$\widehat{E}$ が定める $\mathbb{C}_p$ 上の rigid analytic group を再び $\widehat{E}$ で表し，その上の rigid analytic function のなす空間を $\mathcal{O}(\widehat{E}/\mathbb{C}_p)$ とおく．また T^* 上の $\mathbb{C}_p$-valued locally K_p-analytic distribution のなす空間を $D(T^*, \mathbb{C}_p)$ とおく．$\mu \in D(T^*, \mathbb{C}_p)$ に対し，その Fourier 変換 $F_\mu \in \mathcal{O}(\widehat{E}/\mathbb{C}_p)$ を

$$F_\mu(x) = \int_{T^*} f_x \, d\mu$$

で定める．

定理 3.1 (Schneider-Teitelbaum [4])

(1) Fourier 変換

$$\begin{array}{ccc} D(T^*, \mathbb{C}_p) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\widehat{E}/\mathbb{C}_p) \\ \mu & \longmapsto & F_\mu(x) \end{array}$$

は $\mathbb{C}_p$ 代数の同型である．

(2) 同型 $t\colon T^* \xrightarrow{\sim} O_{K_p}$，および E/K 上の不変微分形式 $\omega \neq 0$ を固定し，ω に対応する不変微分を ∂_ω と書く．このとき定数 $\Omega_p \in \mathbb{C}_p^\times$ が存在して，

$$\partial_\omega^k F_\mu(x) = \Omega_p^k \int_{T^*} t^k f_x \, d\mu$$

が成り立つ．

(3) $\mathrm{supp}(\mu) \subset T^* \setminus pT^*$ となるための必要十分条件は，$\displaystyle\sum_{[p](z)=0} F_\mu(x +_{\widehat{E}} z) = 0$ が成り立つことである．

この定理を用いて定理1.1における distribution $\widetilde{\mu}_a^j$ を構成するには，命題2.1の F_a のような母関数を構成する必要がある．以下の2節ではこの構成について述べる．

4 関数 $\theta_{E,a}$ と L 関数の特殊値

本節では，L 関数の特殊値がモジュラー曲線上の普遍的楕円曲線 $\mathbb{E}/Y_1(Np^n)$ の上の有理関数 $\theta_{\mathbb{E},a}$ の対数微分の値として現れることを説明する．

4.1 関数 $\theta_{E,a}$

命題 4.1 ([5]，Chap. II，Proposition 1.1)

E/S をスキーム S 上の楕円曲線とし，a を 6 と互いに素な整数とする．また $6a$ が S 上可逆であると仮定する．このとき以下を満たす E 上の有理関数 $\theta_{E,a}$ が一意的に存在する：

(1) a と互いに素で S 上可逆な任意の整数 $b \neq 0$ に対し，E 上の b 倍写像のノルムを N_b と書くとき，$N_b(\theta_{E,a}) = \theta_{E,a}$ が成り立つ．

(2) $\mathrm{Div}(\theta_{E,a}) = a^2 \cdot [0] - \sum_{P \in E[a]} [P]$.

4.2 微分作用素 ∂，$\mathbb{D}$

任意の楕円曲線 E/S に対し，$\underline{\omega}_{E/S} = \mathrm{coLie}(E/S)$，$\underline{\omega}^{\vee}_{E/S} = \mathrm{Lie}(E/S)$ とおき，合成

$$\partial\colon \mathcal{O}_E \xrightarrow{d} \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega_{E/S} \cong \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_S} \underline{\omega}_{E/S}$$

によって微分作用素 ∂ を定める．これに $\underline{\omega}^{\otimes r}_{E/S}$ をテンソルして得られる写像 $\mathcal{O}_E \otimes \underline{\omega}^{\otimes r}_{E/S} \to \mathcal{O}_E \otimes \underline{\omega}^{\otimes r+1}_{E/S}$ もやはり ∂ で表す．

またモジュラー曲線 $Y_1(Np^n)/\mathbb{Q}$ 上の普遍的楕円曲線および原始 Np^n 等分点をそれぞれ $\mathbb{E}$，α_n^{u} で表し，作用素 $\mathbb{D}$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{Symm}^r(H^1_{\mathrm{dR}}) &\xrightarrow{\nabla} \mathrm{Symm}^r(H^1_{\mathrm{dR}}) \otimes \Omega^1_{Y_1(Np^n)} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Symm}^r(H^1_{\mathrm{dR}}) \otimes \underline{\omega}^{\otimes 2}_{\mathbb{E}/Y_1(Np^n)} \\ &\hookrightarrow \mathrm{Symm}^r(H^1_{\mathrm{dR}}) \otimes \mathrm{Symm}^2(H^1_{\mathrm{dR}}) \to \mathrm{Symm}^{r+2}(H^1_{\mathrm{dR}})\end{aligned} \tag{4.2}$$

なる合成によって定める．ここで $H^1_{\mathrm{dR}} = H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{E}/Y_1(Np^n))$ であり，∇ は Gauss-Manin 接続，その右の同型は小平-Spencer 同型である．

4.3 CM 点における値

記号は第 1 節の通りとする．$H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ の O_K 上の基底 γ を固定し，

$$\alpha_n = \exp\left(\frac{1}{N\psi(p)^n}\gamma\right) \in E[Np^n] \quad (n \geq 0)$$

とおく．また $\mathrm{End}(E) \cong O_K$ の作用から得られる直和分解

$$H^1_{\mathrm{dR}}(E/K) = \underline{\omega}_{E/K} \oplus \underline{\omega}^{\vee}_{E/K}$$

における第1成分への射影を pr と書くことにする.

このとき，$k > j \geq 0$ および $\sigma \in \mathcal{G}_n = \mathrm{Gal}(L_n/K)$ に対して，

$$L(k,j,\sigma) = \mathrm{pr} \circ (x_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ \mathbb{D}^j \circ (\alpha_n^{\mathrm{u}})^* \circ \partial^{k-j} \log(\theta_{\mathbb{E},a}) \in \underline{\omega}_{E/K}^{\otimes k+j} \otimes_K L_n$$

とおく．ただし $x_{E,\sigma(\alpha_n)}$: $\mathrm{Spec}(L_n) \to Y_1(Np^n)$ は組 $(E, \sigma(\alpha_n))$ によって定まる $Y_1(Np^n)$ の有理点を表す.

$L(k,j,\sigma)$ と，我々の考える L 関数の特殊値との関係は次の命題で与えられる.

命題 4.3 $\omega \neq 0$ を $\underline{\omega}_{E/K}$ の基底とする．このとき $\underline{\omega}_{E/K}^{\otimes k+j} \otimes_K \mathbb{C}$ における等式

$$\begin{aligned} L(k,j,\sigma) =& (-1)^{k-j-1}(k-1)! \left(\frac{\sqrt{d_K}}{2\pi}\right)^{-j} \left(\int_\gamma \omega\right)^{-k-j} N^{k-j}\psi^k\overline{\psi}^{-j}(p)^n \\ & \times \left\{\mathbf{N}(\mathfrak{a})L(\psi^{-k}\overline{\psi}^j, 0; \sigma) - \psi^k\overline{\psi}^{-j}(\mathfrak{a})L(\psi^{-k}\overline{\psi}^j, 0; \sigma\sigma_{\mathfrak{a}})\right\} \cdot \omega^{\otimes k+j} \end{aligned}$$

が成り立つ.

命題 4.3 の証明の概略を述べる．まず実解析的微分作用素 $\vartheta(C^\infty)$ を

$$\vartheta(C^\infty)\colon \underline{\omega}_{\mathbb{E}}^{\otimes r} \hookrightarrow \mathrm{Symm}^r(H^1_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\mathbb{D}} \mathrm{Symm}^{r+2}(H^1_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \underline{\omega}_{\mathbb{E}}^{\otimes r+2}$$

によって定義する．ここで，最後の pr は Hodge 分解 $H^1_{\mathrm{dR}} = \underline{\omega}_{\mathbb{E}} \oplus \overline{\underline{\omega}_{\mathbb{E}}}$ から定まる射影である．このとき

$$L(k,j,\sigma) = (x_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ \vartheta(C^\infty)^j \circ (\alpha_n^{\mathrm{u}})^* \circ \partial^{k-j} \log(\theta_{\mathbb{E},a})$$

が成り立つ．また $\vartheta(C^\infty)$ が C^∞ モジュラー関数に作用する微分作用素

$$\frac{-\pi}{\mathrm{Im}(\overline{\omega_1}\omega_2)} \left(\overline{\omega_1}\frac{\partial}{\partial\omega_1} + \overline{\omega_2}\frac{\partial}{\partial\omega_2}\right)$$

と一致することから，$\vartheta(C^\infty)^j \circ (\alpha_n^{\mathrm{u}})^* \circ \partial^{k-j} \log(\theta_{\mathbb{E},a})$ は実解析的 Eisenstein 級数によって表されることが分かる ([2], (2.3.38))．よって実解析的 Eisenstein 級数の CM 点における値と L 関数の特殊値との関係 ([1], Chap. II, 3.5) から命題 4.3 が従う.

5 母関数の構成

L_n の $\mathbb{C}_p$ における閉包を $L_{n,p}$ とおく．この節では，$L(k,j,\sigma)$ を $\underline{\omega}_{E/K}^{\otimes k+j} \otimes_K L_{n,p}$ の中で計算することによって，母関数を構成する.

以下，記号の簡略化のため $O = O_{K_p}$ とおく.

E/K の O 上のモデル $\mathcal{E}$ をとり，$\mathcal{E} \bmod p$ の universal formal deformation を $\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R$ とおく．また $n \geq 0$ に対して，$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R$ 上の（[3] の意味での）原始 Np^n 等分点の相対モジュライ空間を

$$\mathrm{Spec}(R_n) = [\Gamma_1(Np^n)]_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R}$$

とおき，その普遍的原始 Np^n 等分点を再び α_n^{u} で表す.

5.1 微分作用素 $\vartheta(p)$

(非標準的な) 同型 $R \cong O[\![T]\!]$ をとり,

$$R^{\mathrm{PD}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{T^n}{n!} \;\middle|\; a_n \in O \right\}$$

とおく. このとき, Gauss-Manin 接続に関して水平な同型

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R) \otimes_R R^{\mathrm{PD}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}/O) \otimes_O R^{\mathrm{PD}}$$

が存在する. これと O_K の作用による直和分解 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}/O) \cong \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O} \oplus \underline{\omega}^{\vee}_{\mathcal{E}/O}$ より,

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R) \otimes_R R^{\mathrm{PD}} \cong \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O} \otimes_O R^{\mathrm{PD}} \oplus \underline{\omega}^{\vee}_{\mathcal{E}/O} \otimes_O R^{\mathrm{PD}} \tag{5.1}$$

が得られる. この直和分解における第 1 射影をやはり pr で表すと, 合成

$$\phi \colon \underline{\omega}_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R} \otimes_R R^{\mathrm{PD}} \hookrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R) \otimes_R R^{\mathrm{PD}} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O} \otimes_O R^{\mathrm{PD}} \tag{5.2}$$

は ($T = 0$ で identity であることから) 同型となる. そこで作用素 $\vartheta(p)$ を

$$\begin{aligned}
\vartheta(p) \colon \underline{\omega}^{\otimes r}_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R} \otimes_R R^{\mathrm{PD}} &\longrightarrow \mathrm{Symm}^r(H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R)) \otimes_R R^{\mathrm{PD}} \\
&\xrightarrow{\mathbb{D}} \mathrm{Symm}^{r+2}(H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R)) \otimes_R R^{\mathrm{PD}} \\
&\xrightarrow{\mathrm{pr}} \underline{\omega}^{\otimes r+2}_{\mathcal{E}/O} \otimes_O R^{\mathrm{PD}} \xrightarrow{\phi^{-1}} \underline{\omega}^{\otimes r+2}_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R} \otimes_R R^{\mathrm{PD}}
\end{aligned}$$

によって定義する. すると, $\vartheta(C^\infty)$ の場合と同様に

$$L(k,j,\sigma) = (x_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ \vartheta(p)^j \circ (\alpha^{\mathrm{u}}_n)^* \circ \partial^{k-j} \log(\theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a})$$

が成り立つ. ただしここでは $x_{E,\sigma(\alpha_n)} \colon \mathrm{Spec}(L_{n,p}) \to \mathrm{Spec}(R_n)$ である.

5.2 形式群上への lift

$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}$ の形式群を $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}} = \mathrm{Spf}(A)$ とする. パラメータ X をとって $A \cong R[\![X]\!]$ とし,

$$A' = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \;\middle|\; a_n \in R^{\mathrm{PD}}[p^{-1}],\ |a_n|_p p^{-n\varepsilon} \to 0\ (\forall \varepsilon > 0) \right\}$$

とおく. また α^{u}_n を

$$\alpha^{\mathrm{u}}_n = \alpha'^{\mathrm{u}}_n + \alpha''^{\mathrm{u}}_n, \qquad \alpha'^{\mathrm{u}}_n \in \mathcal{E}^{\mathrm{u}}[p^n],\ \alpha''^{\mathrm{u}}_n \in \mathcal{E}^{\mathrm{u}}[N]$$

と分解する.

このとき, 次の命題を満たす作用素

$$\partial_i \colon A' \longrightarrow \underline{\omega}^{\otimes i}_{\mathcal{E}/O} \otimes_O A' \qquad (i = 1, 2)$$

を構成することができる.

命題 5.3 ([6], Lemma 4.4.4, 4.4.5, 4.5.4)

$r \geq 0$ に対して，∂_i に $\underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\otimes r}$ をテンソルした写像 $\underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\otimes r} \otimes A' \to \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\otimes r+i} \otimes A'$ も同じ記号 ∂_i で表す．このとき $\partial_1 \circ \partial_2 = \partial_2 \circ \partial_1$ が成り立つ．また次の図式はそれぞれ可換である．(ここで $R_{n,\mathbb{Q}}^{\mathrm{PD}} = R_n \otimes_R R^{\mathrm{PD}}[p^{-1}]$ とおいた.)

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[dr, "\partial"'] & \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O} \otimes A' \arrow[d, "\phi^{-1}"] \\ & \underline{\omega}_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R} \otimes A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "(\alpha_n'^{\mathrm{u}})^*"'] & \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\otimes 2} \otimes A' \arrow[d, "\phi^{-1} \otimes (\alpha_n'^{\mathrm{u}})^*"] \\ R_{n,\mathbb{Q}}^{\mathrm{PD}} \arrow[r, "\vartheta(p)"] & \underline{\omega}_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R}^{\otimes 2} \otimes R_{n,\mathbb{Q}}^{\mathrm{PD}} \end{tikzcd}$$

∂_i の構成は次のように行う．まず

$$\phi \colon \underline{\omega}_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R} \otimes R^{\mathrm{PD}} \hookrightarrow (\underline{\omega}_{\mathcal{E}/O} \oplus \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\vee}) \otimes R^{\mathrm{PD}} \twoheadrightarrow \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O} \otimes R^{\mathrm{PD}}$$

が同型であることから，

$$\mathcal{P} \colon \operatorname{Spec}(R^{\mathrm{PD}}) \longrightarrow \mathbb{V}_O\big(\operatorname{Hom}(\underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}), \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\vee})\big) = \mathbb{V}_O\big((\underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\vee})^{\otimes 2}\big) =: \mathbb{V}_2$$

なる射（p 進周期写像）が誘導される（ただし $\mathbb{V}_B(M)$ は環 B 上の有限生成自由加群 M に伴うアフィン空間を表す）．さらに

$$\mathbb{V}_1 := \mathbb{V}_O(\underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\vee}), \quad \mathbb{V}_R := \mathbb{V}_R(\underline{\omega}_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}/R}^{\vee})$$

とおくと，$\mathcal{P}$ の定義から

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_R \otimes_R R^{\mathrm{PD}} \arrow[r, "\tilde{\mathcal{P}}"] \arrow[d] & \mathbb{V}_1 \times_O \mathbb{V}_2 \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(R^{\mathrm{PD}}) \arrow[r, "\mathcal{P}"] & \mathbb{V}_2 \end{tikzcd}$$

なる cartesian diagram を得る．

命題 5.4 ([6], Proposition 4.4.1)

合成写像

$$\operatorname{Spec}(A') \xrightarrow{\log} \mathbb{V}_R \otimes R^{\mathrm{PD}} \xrightarrow{\tilde{\mathcal{P}}} \mathbb{V}_1 \otimes_O \mathbb{V}_2$$

は，微分加群の同型

$$(\operatorname{coLie}(\mathcal{E}) \oplus \operatorname{coLie}(\mathcal{E})^{\otimes 2}) \otimes_O A' \xrightarrow{\sim} \widehat{\Omega}_{A/O} \otimes_A A'$$

を導く．ここで $\widehat{\Omega}_{A/O}$ は (T, X) 進完備化された微分加群を表す．

この命題を用いて，

$$\begin{aligned} \partial_i \colon A' \xrightarrow{d} \widehat{\Omega}_{A/O} \otimes_A A' &\cong (\underline{\omega}_{\mathcal{E}/O} \oplus \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\otimes 2}) \otimes_O A' \\ &\twoheadrightarrow \underline{\omega}_{\mathcal{E}/O}^{\otimes i} \otimes_O A' \qquad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

と定める．これらが命題 5.3 を満たすことは比較的容易に確かめられる．

5.3 $L(k,j,\sigma)$ の書き換え

作用素 ∂_1, ∂_2 を用いて，$L(k,j,\sigma)$ を次のように書き直すことができる．

まず $\alpha \in \mathcal{E}^{\mathrm{u}}$ による translation $\beta \mapsto \alpha + \beta$ を τ_α で表すと，

$$\begin{aligned} L(k,j,\sigma) &= (x_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ \vartheta(p)^j \circ (\alpha_n'^{\mathrm{u}})^* \circ \partial^{k-j} \log(\tau^*_{\alpha_n''^{\mathrm{u}}} \theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a}) \\ &= (x_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ (\alpha_n'^{\mathrm{u}})^* \circ \partial_2^j \circ \partial_1^{k-j} \log(\tau^*_{\alpha_n''^{\mathrm{u}}} \theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a}) \\ &= (x_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ (\alpha_n'^{\mathrm{u}})^* \circ \partial_1^{k-j} \circ \partial_2^j \log(\tau^*_{\alpha_n''^{\mathrm{u}}} \theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a}) \end{aligned}$$

となる．また α_n を

$$\alpha_n = \alpha_n' + \alpha_n'', \qquad \alpha_n' \in E[p^n],\ \alpha_n' \in E[N]$$

と分解し，$x_{E,\sigma(\alpha_n)}$: $\mathrm{Spec}(L_{n,p}) \to \mathrm{Spec}(R_n)$ の上の楕円曲線の射 $E \to \mathcal{E}^{\mathrm{u}}$ を $\widetilde{x}_{E,\sigma(\alpha_n)}$ と書くと，

$$\begin{aligned} L(k,j,\sigma) &= \sigma(\alpha_n')^* \circ (\widetilde{x}_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ \partial_1^{k-j} \circ \partial_2^j \log(\tau^*_{\alpha_n''^{\mathrm{u}}} \theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a}) \\ &= \sigma(\alpha_n')^* \circ \partial^{k-j} \circ (\widetilde{x}_{E,\sigma(\alpha_n)})^* \circ \partial_2^j \log(\tau^*_{\alpha_n''^{\mathrm{u}}} \theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a}) \end{aligned}$$

と書ける．さらに，可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(L_{n,p}) \arrow[r, "x_{E,\sigma(\alpha_n)}"] \arrow[dr, "x_{E,\sigma(\alpha_n'')}"'] & \mathrm{Spec}(R_n) \arrow[d, "x_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},\alpha_n''^{\mathrm{u}}}"] \\ & \mathrm{Spec}(R_0) \end{tikzcd}$$

と，$\sigma_p := ((p), L/K) \in \Delta$ に対して $\alpha_0 = [\psi(p)^n](\alpha_n'') = \sigma_p^n(\alpha_n'')$ であることから，

$$L(k,j,\sigma) = \sigma(\alpha_n')^* \circ \partial^{k-j} \circ (\widetilde{x}_{E,\sigma\sigma_p^{-n}(\alpha_0)})^* \circ \partial_2^j \log(\tau^*_{\alpha_0^{\mathrm{u}}} \theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a})$$

が成り立つことが分かる．

以上をまとめて，次の命題を得る：

命題 5.5 $\underline{\omega}_{E/K}$ の基底 ω を固定する．$j \geq 0$，$\sigma \in \mathcal{G}_n$ に対して

$$F^j_{\sigma,a} \cdot \omega^{\otimes 2j} = (\widetilde{x}_{E,\sigma(\alpha_0)})^* \circ \partial_2^j \log(\tau^*_{\alpha_0^{\mathrm{u}}} \theta_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}},a})$$

によって $F^j_{\sigma,a}$ $(\in \mathcal{O}(\widehat{E}/\mathbb{C}_p))$ を定めると，

$$\begin{aligned} \partial_\omega^{k-j} F^j_{\sigma\sigma_p^{-n},a}(\sigma(\alpha_n')) =& (-1)^{k-j-1}(k-1)! \left(\frac{\sqrt{d_K}}{2\pi}\right)^{-j} \left(\int_\gamma \omega\right)^{-k-j} N^{k-j} \psi^k \overline{\psi}^{-j}(p)^n \\ & \times \left\{ \mathbf{N}(\mathfrak{a}) L(\psi^{-k}\overline{\psi}^j, 0; \sigma) - \psi^k \overline{\psi}^{-j}(\mathfrak{a}) L(\psi^{-k}\overline{\psi}^j, 0; \sigma\sigma_{\mathfrak{a}}) \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ．($F^j_{\sigma,a}$ は $\sigma|_L \in \Delta$ にしかよらないので，$F^j_{\sigma\sigma_p^{-n},a}$ は well-defined である.)

これが求める母関数である．ここから実際に $\mathcal{G}_\infty$ 上の distribution を作る議論はここでは省略する．

参考文献

[1] E. de Shalit. *Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication.* Perspectives in Mathematics, Vol. 3. Academic Press, 1987.

[2] N. Katz. p-adic L-functions for CM fields. *Invent. Math.*, Vol. 49, pp. 199–297, 1978.

[3] N. Katz and B. Mazur. *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves.* Annals of Mathematics Studies, 108. Princeton University Press, 1985.

[4] P. Schneider and J. Teitelbaum. p-adic Fourier theory. *Documenta Math.*, Vol. 6, pp. 447–481, 2001.

[5] T. Tsuji. Explicit reciprocity law and formal moduli for Lubin-Tate formal groups. Preprint.

[6] S. Yamamoto. On p-adic L-functions for CM elliptic curves at supersingular primes. Master's thesis, the University of Tokyo, 2003.