数理解析研究所講究録 1380 巻 2004 年 63-79

On a family of distributions attaining the Bhattacharyya bound

筑波大・数理物質科学研究科　田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)
Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba

1 はじめに

ある分布の母数の推定量のクラスを不偏推定量全体に制限して, その中で分散を最小にする不偏推定量を考える. 特に分散を母数に関して一様に最小にする不偏推定量があれば, それを一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量といい, 統計的推定論では重要な概念の一つである. 適当な正則条件の下で不偏推定量の分散の下限は Cramér-Rao (C-R) の不等式によって与えられている (Rao [R45], Cramér [C46]). 従って C-R の下限を達成する分布族は関心の対象となり, それは指数型分布族に限ることが良く知られている (Cramér [C46], Wijsman [W73], Joshi [J76]).

しかし, UMVU 推定量であってもその分散が C-R の下限を達成するとは限らない. このような時には C-R の不等式を精密化した Bhattacharyya の不等式が知られている (Bhattacharyya [B46], Zacks [Z71]). ところが Bhattacharyya の下限を達成する分布族については C-R の場合のようには明確にはなっていない. Fend [F59] は Darmois-Koopman 型分布族で Bhattacharyya の下限を達成する分布族は指数型分布族に限ることを示した. しかし, Bhattacharyya の下限を達成するための必要十分条件として, 確率密度関数がある線形微分方程式を満たすことであることを考慮すると, Bhattacharyya の下限を達成する分布族は必ずしも Fend の結果だけでは説明できないように思われる.

最近 Tanaka and Akahira [TA03], Tanaka [T03a] は不偏推定量の分散が Bhattacharyya の下限を達成する分布族と指数型分布族との混合分布族との関係について考察し, Bhattacharyya の下限を達成する分布族を従来考えられていた分布族より広い分布族においても Bhattacharyya の下限を達成することを示した. さらに, 指数型分布族の混合分布族でない分布族でも Bhattacharyya の下限を達成することを示した. つまり [TA03], [T03a] では Bhattacharyya の下限を達成する分布族を特定するには至っていない. そこで, Tanaka [T03b], [T03c] では特に位置母数族, 及び尺度母数族で Bhattacharyya の下限を達成する分布族について考察し, 位置母数族においては正規分布族と指数ガンマ分布族, 尺度母数族においては対数正規分布族と (拡張) ワイブル分布族に限ることを示した.

2 Bhattacharyya の不等式

本論では実母数の場合だけを扱うので, 実母数の場合の Bhattacharyya の不等式について説明するが, 多母数の場合についても同様の結果が成り立つことが知られている. まず, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^1$ に対して標本空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の確率分布族 $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ は, ある σ-有限測度 μ に関して絶対連続とし, μ に関する確率密度関数を $f(x, \theta) := dP_\theta/d\mu$ と表す. ただし, 母数空間 Θ は $\mathbb{R}^1$ の開区間とする. このとき, 確率空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$ からの確率変数 X に基づいて θ の実数値関数 $g(\theta)$ の推定問題を考える. 次の仮定を設ける.

(A1) すべての $x \in \mathcal{X}$ に対して, $f(x, \theta)$ は θ について k 階微分可能である.

(A2) $g(\theta)$ は不偏推定可能, すなわち分散が有限である $g(\theta)$ の不偏推定量 $\hat{g}(X)$ が存在する.

(A3) 各 $i = 1, \ldots, k$ に対して

$$\frac{d^i}{d\theta^i} \int_{\mathcal{X}} f(x, \theta) d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f(x, \theta) d\mu(x),$$
$$\frac{d^i}{d\theta^i} \int_{\mathcal{X}} \hat{g}(x) f(x, \theta) d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \hat{g}(x) \frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f(x, \theta) d\mu(x).$$

(A4) すべての $\theta \in \Theta$, 各 $i, j = 1, \ldots, k$ に対して

$$\int_{\mathcal{X}} \left| \frac{(\partial^i/\partial\theta^i) f(x, \theta) (\partial^j/\partial\theta^j) f(x, \theta))}{f(x, \theta)} \right| d\mu(x) < \infty.$$

(A5) μ-$a.a.x \in \mathcal{X}$, すべての $\theta \in \Theta$ に対して $f(x, \theta) > 0$.

このとき

$$\phi_i(x, \theta) := \frac{(\partial^i/\partial\theta^i) f(x, \theta)}{f(x, \theta)}, \qquad \tilde{\phi}_k(x, \theta) := {}^t(\phi_1(x, \theta), \ldots, \phi_k(x, \theta)),$$
$$g^{(i)}(\theta) := \frac{d}{d\theta} g(\theta), \qquad \boldsymbol{g}_k(\theta) := {}^t(g^{(1)}(\theta), \ldots, g^{(k)}(\theta))$$

と表し, k 次 Fisher 情報量行列を

$$I_k(\theta) := E_\theta[\tilde{\phi}_k(X, \theta)^t \tilde{\phi}_k(X, \theta)]$$

によって定義する.

定理 1 (Bhattacharyya [B46], Zacks [Z71]). 条件 (A1)〜(A5) の下で, 次の (i), (ii) が成り立つ.
(i) $I_k(\theta)$ が Θ で正則ならば, $g(\theta)$ の任意の不偏推定量 $\hat{g}(X)$ に対して

(2.1) $$\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X)) \geq {}^t\boldsymbol{g}_k(\theta) I_k(\theta)^{-1} \boldsymbol{g}_k(\theta) =: B_k(\theta) \qquad (\forall \theta \in \Theta)$$

が成り立つ. ここで, 右辺の $B_k(\theta)$ は k 次の Bhattacharyya の下限と呼ばれている. 特に $k=1$ のとき, $B_1(\theta)$ は Cramér-Rao の下限である.

(ii) (2.1) で等号が成り立つための必要十分条件は, 適当な $\tilde{a}_k(\theta) := {}^t(a_{k1}(\theta), \ldots, a_{kk}(\theta))$ に対して

$$\hat{g}(x) - g(\theta) = < \tilde{a}_k(\theta), \tilde{\phi}_k(x,\theta) > \qquad (\mu\text{-}a.a.x \in \mathcal{X}, \forall\theta \in \Theta) \tag{2.2}$$

が成り立つことである. ここで $<,>$ は $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$ に対して

$$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

と定義する.

注意 1 $f(x,\theta)$ が確率密度関数であることから, $\tilde{a}_k(\theta) = I_k(\theta)^{-1} \boldsymbol{g}_k(\theta)$ となることが分かる. なお, (i) だけを示すためには (A5) の代わりに (A5) より弱い条件

(A5)' $f(x,\theta)$ の台 $\{x \in \mathcal{X} | f(x,\theta) > 0\}$ は θ に依存しない.

を仮定すれば十分だが, (ii) が成り立つために (A5) を仮定する.

例 1 (正規分布族). 確率変数 X が正規分布 $N(\theta, 1)$ ($\theta \in \Theta = \mathbb{R}^1$) に従っているとする. このとき, 被推定関数を $g(\theta) = \theta^2$ とすると, $g(\theta)$ の UMVU 推定量は $\hat{g}(X) = X^2 - 1$ であり, その分散は $\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X)) = 4\theta^2 + 2$ である. 一方, 1 次, 2 次の Fisher 情報量行列 $I_1(\theta)$, $I_2(\theta)$ は

$$I_1(\theta) = 1, \qquad I_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

であり, $B_1(\theta) = 4\theta^2$, $B_2(\theta) = 4\theta^2 + 2$ を得る. つまり, 1 次の下限は達成していないが, 2 次の下限を達成している. ちなみに (2.2) の $\tilde{a}_k(\theta)$ は $(a_{21}(\theta), a_{22}(\theta)) = (2\theta, 1)$ である.

例 2 (指数分布族). 確率変数 X が指数分布 $Exp(\theta)$ ($\theta \in \Theta = (0, \infty)$) に従っているとする. このとき, 被推定関数を $g(\theta) = \theta^k$ ($k \in \mathbb{N}$) とすると, $g(\theta)$ の UMVU 推定量は $\hat{g}(X) = X^k/k!$ であり, その分散は $\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X)) = \theta^{2k}\left\{(2k)!/(k!)^2 - 1\right\}$ である. 一方, k 次の Fisher 情報量行列 $I_k(\theta) = (I_{ij}(\theta))$ は

$$I_{ij}(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{i!}{\theta^i}\right)^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となる. また k 次の Bhattacharyya の下限は, $B_k(\theta) = \theta^{2k}\left\{(2k)!/(k!)^2 - 1\right\}$ となり, $\hat{g}(X)$ の分散と一致していることが分かる. ちなみに (2.2) の $\tilde{a}_k(\theta)$ は $a_{ki}(\theta) = k!\theta^{k+i}/\{(k-i)!(i!)^2\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ である.

例 3 (二項分布族). 確率変数 X が二項分布 $B(n;\theta)$ $(\theta \in \Theta = (0,1))$ に従っているとする. ただし $n \geq 2$ とする. このとき, 被推定関数を $g(\theta) = \theta(1-\theta)$ とすると, $g(\theta)$ の UMVU 推定量は $\hat{g}(X) = X(n-X)/\{n(n-1)\}$ になる. そして, その分散は

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X)) = \frac{\theta(1-\theta)(1-2\theta)^2}{n} + \frac{2\theta^2(1-\theta)^2}{n(n-1)}$$

である. 一方, 1次, 2次の Fisher 情報量行列は

$$I_1(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}, \qquad I_2(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\theta(1-\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{2n(n-1)}{\theta^2(1-\theta)^2} \end{pmatrix}$$

となり, 1次, 2次の Bhattacharyya の下限は

$$B_1(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)(1-2\theta)^2}{n}, \qquad B_2(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)(1-2\theta)^2}{n} + \frac{2\theta^2(1-\theta)^2}{n(n-1)}$$

である. ちなみに (2.2) の $\tilde{a}_k(\theta)$ は

$$(a_{21}(\theta), a_{22}(\theta)) = \left(\frac{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}{n}, -\frac{\theta^2(1-\theta)^2}{n(n-1)}\right)$$

である.

ここで, 次のような確率密度関数をもつ制約された指数型分布族を考える.

$$f(x,\theta) = \exp\{t(x)\psi(\theta) + \varphi(\theta)\} \qquad (x \in \mathcal{X}, \theta \in \Theta).$$

ただし $\varphi'(\theta)/\psi'(\theta) = \theta$ であり, $1/\psi'(\theta)$ は θ の高々2次多項式である. このとき Seth [S49] は Fisher 情報量行列は対角行列となることを示した. また Shanbhag [S72] はこの制約付き指数型分布族は適当な線形変換の下, 正規分布族, ガンマ分布族, ポアソン分布族, 二項分布族, 負の二項分布族から構成されることを示した. この分布族は Fisher 情報量行列が対角行列となり, 多くの典型的な分布族を含んでいるという意味で都合の良い分布族であり, Bhattacharyya の不等式を扱った研究ではこの分布族を仮定していることがある. 例えば Blight and Rao [BR74], Khan [K84] は, この分布族において Bhattacharyya の下限は UMVU 推定量の分散に収束することを示している (Ishii [I76], Bartoszewicz [B80], Abdulghani et al. [AST97]). しかし Bhattacharyya の下限を達成する分布族を考える上で, このような分布族は非常に狭いように感じられる. 実際, 後の定理5, 定理6で得られる分布族の中にはこれらには含まれない分布族も存在する. なお, Bhattacharyya の下限の収束性については, Blight and Rao の結果より一般な形として Ghosh and Sathe [GS87] の結果がある.

定理 2 (Ghosh and Sathe [GS87]). 確率変数 X は指数型分布族に従っているものとする. このとき $\hat{g}(X)$ を被推定関数 $g(\theta)$ の UMVU 推定量とすると, 各 $\theta \in \Theta$ に対して

$$\lim_{k \to \infty} B_k(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X))$$

が成り立つ.

また, Bhattacharyya の下限を達成する分布族に関する結果としては, 次の定理が知られている.

定理 3 (Fend [F59]). (i) 確率変数 X が Darmois-Koopman 型分布族, すなわち確率密度関数が

$$f(x,\theta) = \exp\left\{\sum_{i=0}^{n} u^{\alpha_i}(x)\kappa_i(\theta) + v(x)\right\} \qquad (x \in \mathcal{X}, \theta \in \Theta)$$

で与えられる分布に従うとする. ここで $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, $\kappa_n'(\theta) \neq 0$ $(\forall\theta \in \Theta)$, $u(x) > 0$ $(\forall x \in \mathcal{X})$ である. このとき $g(\theta)$ の不偏推定量 $\hat{g}(X)$ の分散が ($B_{k-1}(\theta)$ を達成せず) $B_k(\theta)$ を達成すれば, $f(x,\theta)$ は

$$f(x,\theta) = \exp\{t(x)\kappa_1(\theta) + \kappa_0(\theta) + h(x)\} \tag{2.3}$$

の形に限定され, $\hat{g}(x)$ は $t(x)$ の k 次多項式になる.
(ii) X の分布が確率密度関数 (2.3) を持つとき, $t(x)$ の任意の k 次多項式の分散は $B_k(\theta)$ を達成する.

Bhattacharyya の下限を達成するための必要十分条件である (2.2) は, θ を変数とする k 階線形微分方程式であるので, Fend の結果は必ずしも満足のいく結果ではない. 次節でこの点を改良する.

3 指数型分布族の混合分布族との関係

本節では Bhattacharyya の下限を達成する分布族と指数型分布族の混合分布族との関係について考える. そこで, まず与えられた十分滑らかな関数 $\hat{g}$, g, a_{ki} に対して

$$\mathcal{B}_k := \{f(\cdot,\cdot) | (2.2) \text{ is satisfied for } \mu\text{-}a.a.x \in \mathcal{X}, \text{ all } \theta \in \Theta\}$$

について考える. ただし, $\hat{g}$, g は定数関数ではないとする. そして, $\boldsymbol{C}_k := {}^t(C_1, \ldots, C_k)$ ($C_j \in \mathbb{R}^k$ $(C_k \neq 0)$, $C_0 \in \mathbb{R}^1$ と $\boldsymbol{t}_k := {}^t(t, t^2, \ldots, t^k)$ に対して, x を定数と見なした t の k 次方程式

$$\hat{g}(x) = < \boldsymbol{C}_k, \boldsymbol{t}_k > + C_0 \tag{3.1}$$

の解を $t_l(x)$ $(l=1,\ldots,k)$ とする. さらに $f_l(x,\theta)$ は

$$f_l(x,\theta) := \exp\{t_l(x)\psi(\theta)+\varphi(\theta)\}$$

の形で表され,

$$\mathcal{X}_{M_k} := \{x\in\mathcal{X} | t_{l_1}(x)\neq t_{l_2}(x) \text{ for all } l_1,l_2=1,\ldots,k\ (l_1\neq l_2)\}$$

と定義する. 次の条件 (B1)~(B3) を仮定する.

(B1) $\psi(\theta)$, $\varphi(\theta)$ は Θ で k 階微分可能な実数値関数であり, $\psi'(\theta)\neq 0$ $(\forall\theta\in\Theta)$.

(B2) $\mu(\mathcal{X}^c_{M_k})=0$.

(B3) $\#\{t_l(x)|x\in\mathcal{X}\}\geq k+1 \quad (l=1,\ldots,k)$.

また, 次の記号を導入する.

$$\phi_{il}(x,\theta) := \frac{(\partial^i/\partial\theta^i)f_l(x,\theta)}{f_l(x,\theta)}, \qquad \tilde{\phi}_{kl}(x,\theta) := {}^t(\phi_{l1}(x,\theta),\ldots,\phi_{lk}(x,\theta)),$$
$$\boldsymbol{t}_{kl}(x) := {}^t(t_l(x),\cdots,t_l^k(x)).$$

補題 1 条件 (B1) の下で, 各 $l=1,2,\ldots,k$ に対して

$$\tilde{\phi}_{kl}(x,\theta) = U_k(\theta)\boldsymbol{t}_{kl}(x)+\boldsymbol{u}_k(\theta) \qquad (\forall x\in\mathcal{X},\forall\theta\in\Theta)$$

を満たす x, l に依存しない k 次正方行列 $U_k(\theta)$, 及び k 次列ベクトル $\boldsymbol{u}_k(\theta)$ が存在する.

補題 2 条件 (B1), (B3) の下で, $f_1\in\mathcal{B}_k$ であれば, $f_l\in\mathcal{B}_k$ $(l=1,\ldots,k)$ となる.

補題 3 条件 (B1)~(B3) の下で, $f_l(x,\theta)$ $(l=1,\ldots,k)$ は μ-$a.a.x$ に対して線形独立である.

補題2, 3から次の定理を得る.

定理 4 (Tanaka [T03a]). 条件 (B1)~(B3) を仮定する. このとき $f_1\in\mathcal{B}_k$ であれば, $f\in\mathcal{B}_k$ は

$$f(x,\theta)=\sum_{l=1}^{k}A_l(x)f_l(x,\theta)$$

の形になる. ただし $A_l(x)$ $(l=1,\ldots,k)$ は任意の可測関数である. 特に $f(x,\theta)$ が確率密度関数であれば, この分布族は k 次の Bhattacharyya の下限を達成する分布族となる.

特に $k=2$ の時, $\tilde{\phi}_{21}(x,\theta)$ を具体的に計算することにより, 次の系を得る.

系 1 (Tanaka and Akahira [TA03]). 条件 (B1)~(B3) を仮定する. このとき $f \in \mathcal{B}_2$ が

$$f(x,\theta) = \sum_{l=1}^{2} A_l(x) f_l(x,\theta)$$

の形となるための必要条件は, C_0, C_1, C_2, $g(\theta)$, $a_{21}(\theta)$, $a_{22}(\theta)$ の間に

$$g(\theta) = \frac{a_{21}^2(\theta)}{4a_{22}(\theta)} - \frac{a_{21}(\theta)a_{22}'(\theta)}{2a_{22}(\theta)} + \frac{a_{21}'(\theta)}{2} - \frac{a_{22}''(\theta)}{4} + \frac{3{a_{22}'}^2(\theta)}{16a_{22}(\theta)} + C_0 - \frac{C_1^2}{4C_2} \quad (\forall\theta \in \Theta)$$

なる関係を満たしていることである.

4 例

本節では指数型分布族の混合分布族で Bhattacharyya の下限を達成する分布族の例として, 混合正規分布族, 両側指数分布族, 混合二項分布族をあげる. また非指数型分布族で Bhattacharyya の下限を達成する分布族の例もあげる.

例 1 (混合正規分布族 (続)). 確率変数 X が正規分布 $N(\theta,1)$ $(\theta \in \Theta = \mathbb{R}^1)$ に従っているとき, $g(\theta) = \theta^2$ の UMVU 推定量は $\hat{g}(X) = X^2 - 1$ であり, 2次の Bhattacharyya の下限を達成していた. つまり, $f_1(x,\theta) = \phi(x-\theta) \in \mathcal{B}_2$ である. ただし, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数である. 定理4により $f \in \mathcal{B}_2$ は

$$f(x,\theta) = p(x)\phi(x-\theta) + q(x)\phi(x+\theta)$$

の形となることが分かる. ここで $f(x,\theta)$ が確率密度関数となるための $p(\cdot), q(\cdot)$ に関する必要十分条件は, 正規分布族の完備性を使うと

$$p(x) + q(-x) = 1, \qquad 0 \le p(x) \le 1 \qquad (\mu\text{-}a.a.x \in \mathbb{R}^1) \tag{4.1}$$

となることが分かる. つまり, (4.1) を満足する $f(x,\theta)$ は2次の Bhattacharyya の下限を達成する分布族となっている. 実際 $\xi(x,\theta) := p(x)\phi(x-\theta) - q(x)\phi(x+\theta)$ とし,

$$K(\theta) := E_\theta\left[X^2\left(\frac{\xi(X,\theta)}{f(X,\theta)}\right)^2\right]$$

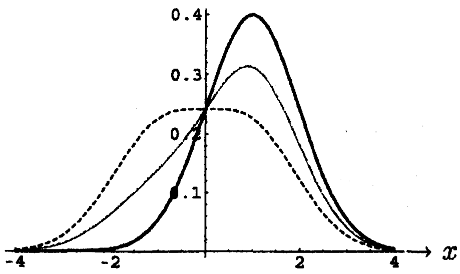
とおくと Fisher 情報量行列は

$$I_2(\theta) = \begin{pmatrix} K(\theta) & 2\theta(1-K(\theta)) \\ 2\theta(1-K(\theta)) & 4\theta^2K(\theta) - 4\theta^2 + 2 \end{pmatrix}$$

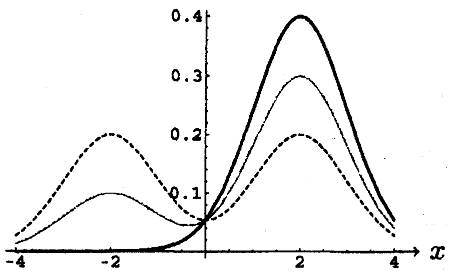
となる. 従って2次の Bhattacharyya の下限は (2.1) より $B_2(\theta) = 4\theta^2 + 2$ となり, $\hat{g}(X)$ の分散と一致することが分かる. なお $f(x,\theta)$ の概形については図1参照.

(I) $p(x) = c$ の時

(i) $\theta = 1;\ c = 1, 3/4, 1/2$



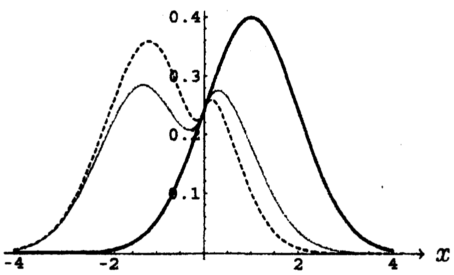
(ii) $\theta = 2;\ c = 1, 3/4, 1/2$



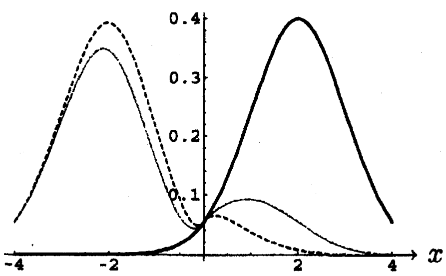
: $c = 1$　　: $c = 3/4$　　: $c = 1/2$

(II) $p(x) = e^{-c|x|}$ の時

(i) $\theta = 1;\ c = 0, 1, 2$



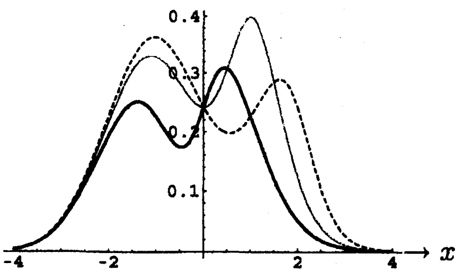
(ii) $\theta = 2;\ c = 0, 1, 2$



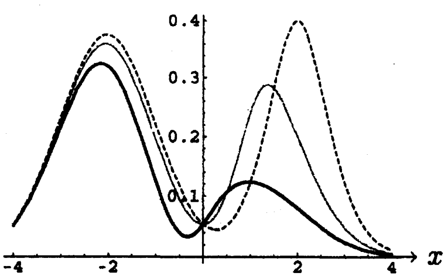
: $c = 0$　　: $c = 1$　　: $c = 2$

(III) $p(x) = 1/\{1 + (x - c)^2\}$ の時

(i) $\theta = 1;\ c = 0, 1, 2$



(ii) $\theta = 2;\ c = 0, 1, 2$



: $c = 0$　　: $c = 1$　　: $c = 2$

図 1. $f(x, \theta)$ の概形

例 2 (指数分布族, 拡張両側指数分布族 (続)). 確率変数 X が指数分布族 $Exp(\theta)$ $(\theta \in \Theta = (0,\infty))$ に従っているとき, $g(\theta) := \theta^k$ の UMVU 推定量は $\hat{g}(X) = X^k/k!$ であった. そこで $\hat{g}(x) = t^k/k!$ を t について解くことにより,

$$t_l(x) = x\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{l-1}{k}\right) \quad (l = 1,\ldots,k)$$

を得る. ここで $\sqrt{-1}$ は虚数単位である. また $f_1(x,\theta) = \exp\{-(x/\theta) - \log\theta\}$ であるので, $\psi(\theta) = -1/\theta$, $\varphi(\theta) = -\log\theta$ である. そこで,

$$f_l(x,\theta) := \exp\left\{x\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{l-1}{k}\right)\psi(\theta) + \varphi(\theta)\right\} \quad (l = 1,\ldots,k)$$

とする. $f_1 \in \mathcal{B}_k$ であるので, 定理 4 により $f \in \mathcal{B}_k$ は

$$f(x,\theta) = \sum_{l=1}^{k} A_l(x) f_l(x,\theta)$$

で与えられる. 一般に $f(x,\theta)$ が確率密度関数になるとは限らないが, 例えば $A_l(x)$ $(l = 1,\ldots,k)$ を次のように定義すれば $f(x,\theta)$ は確率密度関数となる.

(i) k が奇数の時 (指数分布族).

$$A_l(x) = \begin{cases} \chi_{(0,\infty)}(x) & (l = 1), \\ 0 & (l \neq 1). \end{cases}$$

(ii) k が偶数の時 (拡張両側指数分布族).

$(0,\infty)$ で定義された $0 \le A(x) \le 1$ (μ-$a.a.x$) を満たす可測関数 $A(x)$ に対して

$$A_l(x) = \begin{cases} A(x)\chi_{(0,\infty)}(x) & (l = 1), \\ \{1 - A(-x)\}\chi_{(-\infty,0)}(x) & (l = k/2+1), \\ 0 & (l \neq 1, k/2+1). \end{cases}$$

特に $A(x)$ として階段関数をとれば $f(x,\theta)$ は (拡張) 両側指数分布族になる. (このときの $f(x,\theta)$ の概形については図 2 参照.)

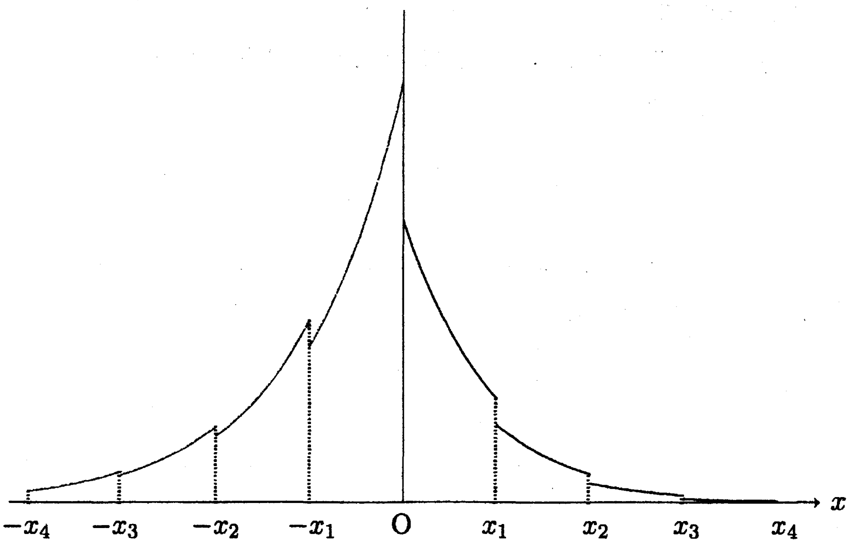


図 2. $A(x) = \sum_{i=1}^{4} a_i \chi_{(x_{i-1}, x_i)}(x)$ の時の $f(x,\theta)$ の概形

例 3 (混合二項分布族 (続)). 確率変数 X が二項分布 $B(n;\theta)$ $(\theta \in \Theta = (0,1))$ に従っているとき, $g(\theta) = \theta(1-\theta)$ の UMVU 推定量は $\hat{g}(X) = X(n-X)/\{n(n-1)\}$ であった. このとき, $t_1(x) = x$, $t_2(x) = n - x$ である. つまり n が奇数の時は (B2) を満たし, 定理 4 より $f \in \mathcal{B}_2$ は

$$f(x,\theta) = \binom{n}{x} \left\{ p(x)\theta^x (1-\theta)^{n-x} + q(x)\theta^{n-x}(1-\theta)^x \right\}$$

の形となる. また n が偶数の時は (B2) を満たさないが, $f \in \mathcal{B}_2$ は

$$\begin{aligned} f(x,\theta) = \binom{n}{x} \Bigg[& \left\{ p(x)\theta^x (1-\theta)^{n-x} + q(x)\theta^{n-x}(1-\theta)^x \right\} \chi_{\{x \neq n/2\}}(x) \\ & + \left\{ p\left(\frac{n}{2}\right) \theta^{n/2}(1-\theta)^{n/2} + q\left(\frac{n}{2}\right) \theta^{n/2}(1-\theta)^{n/2} \log \frac{1-\theta}{\theta} \right\} \chi_{\{x = n/2\}}(x) \Bigg] \end{aligned}$$

の形となり, $f(x,\theta) \geq 0$ $(\forall x = 0,1,\dots,n, \forall \theta \in \Theta)$ を考慮すると $q(n/2) = 0$ が示され, 結局偶数の場合も奇数の場合と一致することが分かる. そして $f(x,\theta)$ が確率関数であるための必要十分条件として, 二項分布族の完備性を用いると

$$(4.2) \qquad p(x) + q(n-x) = 1, \qquad 0 \leq p(x) \leq 1 \qquad (x = 0,1,\dots,n)$$

を得る. つまり, (4.2) を満足する $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ に対して $f(x,\theta)$ は 2 次の Bhattacharyya の下限を達成する分布族となっている.

今までは, 定理 4 を適用出来る場合, すなわち指数型分布族の混合分布族について紹介したが,

指数型分布族の混合分布族ではないが, Bhattacharyya の下限を達成する分布族の例を紹介する.

例 4 (非指数型分布族). $J_x(\theta)$ $(x \geq 0)$ を第 1 種 x 次 Bessel 関数, すなわち

$$J_x(\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+x+1)} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n}$$

とする. ($J_x(\theta)$ の概形については図 3 参照.) $J_x(\theta)$ は Bessel の微分方程式

$$x^2 - \theta^2 = \theta \frac{(\partial/\partial\theta) f(x,\theta)}{f(x,\theta)} + \theta^2 \frac{(\partial^2/\partial\theta^2) f(x,\theta)}{f(x,\theta)}$$

の特殊解である. また $J_{2x}(\theta)$ については以下のことが知られている (Abramowitz and Stegun [AS65]).

(4.3) $$2\sum_{x=1}^{\infty} J_{2x}(\theta) = 1 - J_0(\theta),$$

(4.4) $$8\sum_{x=1}^{\infty} x^2 J_{2x}(\theta) = \theta^2,$$

(4.5) $$32\sum_{x=1}^{\infty} x^4 J_{2x}(\theta) = \theta^4 + 4\theta^2.$$

$\theta_*(>0)$ を $J_0(\theta) = 0$ の最小の解とし, $\Theta := (0, \theta_*)$ とすると, $\theta \in \Theta$ に対して

$$f(x,\theta) := \begin{cases} J_0(\theta) & (x = 0), \\ 2J_{2x}(\theta) & (x = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

とすれば (4.3) より $f(x,\theta)$ は確率関数となることが分かる. Fisher 情報量行列 $I_2(\theta)$ については

$$I_{11}(\theta) = \frac{J_0'^2(\theta)}{J_0(\theta)} + 2L(\theta), \qquad I_{12}(\theta) = \frac{J_0'(\theta)J_0''(\theta)}{J_0(\theta)} + 2M(\theta), \qquad I_{22}(\theta) = \frac{J_0''^2(\theta)}{J_0(\theta)} + 2N(\theta)$$

となる. ただし

$$L(\theta) := \sum_{x=1}^{\infty} \frac{{J_{2x}'}^2(\theta)}{J_{2x}(\theta)}, \qquad M(\theta) := \sum_{x=1}^{\infty} \frac{J_{2x}'(\theta)J_{2x}''(\theta)}{J_{2x}(\theta)}, \qquad N(\theta) := \sum_{x=1}^{\infty} \frac{{J_{2x}''}^2(\theta)}{J_{2x}(\theta)}$$

である. $J_{2x}(\theta)$ が

$$4x^2 - \theta^2 = \theta \frac{J_{2x}'(\theta)}{J_{2x}(\theta)} + \theta^2 \frac{J_{2x}''(\theta)}{J_{2x}(\theta)}$$

を満たすことと (4.3), (4.4), (4.5) を用いれば

$$M(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{J_1(\theta)}{2} - \frac{L(\theta)}{\theta}, \qquad N(\theta) = -\frac{J_0(\theta)}{2} + \frac{J_1(\theta)}{\theta} + \frac{L(\theta)}{\theta^2}$$

を得る．よって

$$I_2(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{Q(\theta)}{J_0(\theta)} & \dfrac{2J_0(\theta) - Q(\theta)}{\theta J_0(\theta)} \\ \dfrac{2J_0(\theta) - Q(\theta)}{\theta J_0(\theta)} & \dfrac{Q(\theta)}{\theta^2 J_0(\theta)} \end{pmatrix}$$

と表される．ただし

$$Q(\theta) := J_1^2(\theta) + 2J_0(\theta)L(\theta)$$

である．被推定関数を $g(\theta) = \theta^2$ とすると (2.1) から 2 次の Bhattacharyya の下限は $B_2(\theta) = 4\theta^2$ となることが分かる．また (4.4) より $\hat{g}(X) = 4X^2$ は $g(\theta)$ の不偏推定量となり，(4.5) より分散は $\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X)) = 4\theta^2$ となり $B_2(\theta)$ と一致している．

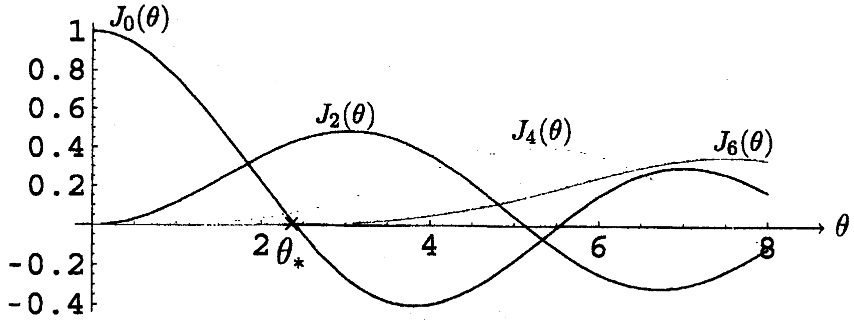


図 3. $J_x(\theta)$ の概形 $(x = 0, 2, 4, 6)$

5 位置母数族，尺度母数族

第 3 節においては Bhattacharyya の下限を達成する分布族と指数型分布族の混合分布族との関係について議論したが，一般次の Bhattacharyya の下限を達成する分布族の特定には至っていない．本節では分布族を位置母数族または尺度母数族に限定することによって一般次の Bhattacharyya の下限を達成する分布族を特定する．結論としては位置母数族においては正規分布族と指数ガンマ分布族，尺度母数族においては対数正規分布族と (拡張) ワイブル分布族に限ることが分った．

5.1 位置母数族

$f(x,\theta)$ を位置母数族からの確率密度関数とする．つまり $f(x,\theta) = f(x-\theta)$, $\mathcal{X} = \Theta = \mathbb{R}^1$ とする．このとき (2.2) に基づいて Bhattacharyya の下限を達成する分布族を特定する．本節では以下 f, g, $\hat{g}$, a_{ki} は十分滑らかな関数とする．$h_i(u) := (-1)^i f^{(i)}(u)/f(u)$ とし，

$$\tilde{h}_k(u) := {}^t(h_1, \ldots, h_k)(u), \qquad \tilde{a}_k(\theta) := {}^t(a_{k1}, \ldots, a_{kk})(\theta),$$
$$\boldsymbol{h}_{ji}(u) := {}^t(h_i, h_i^{(1)}, \ldots, h_i^{(j-1)})(u), \qquad \boldsymbol{a}_{ji}(\theta) := {}^t(a_{ki}, a_{ki}^{(1)}, \ldots, a_{ki}^{(j-1)})(\theta)$$

と表すと (2.2) は

$$\hat{g}(x) - g(\theta) = {}^t\tilde{a}_k(\theta)\tilde{h}_k(x-\theta) \tag{5.1}$$

となる. そこで, (5.1) を満足する f に関心があるが, ここでは

$$\mathcal{A}_k := \left\{ \tilde{a}_k(\cdot) \,\middle|\, \exists\theta_0 \in \mathbb{R}^1 \text{ s.t. } \left|(\tilde{a}_k(\theta_0), \ldots, \tilde{a}_k^{(k-1)}(\theta_0))\right| \neq 0 \right\}$$

として,

$$\mathcal{LB}_k := \left\{ f(\cdot) | \exists\hat{g}(\cdot),\ \exists g(\cdot),\ \exists\tilde{a}_k(\cdot) \in \mathcal{A}_k \text{ s.t. (5.1) is satisfied for all } x, \theta \in \mathbb{R}^1 \right\}$$

について考える. 次に, h_i の $(k+1)$ 階定係数線形微分方程式, 及びその特性方程式

$$\left| \left(\boldsymbol{h}_{k+1,i}^{(1)}(u), \boldsymbol{a}_{k+1,1}(\theta_0), \ldots, \boldsymbol{a}_{k+1,k}(\theta_0) \right) \right| = 0, \tag*{(5.2)$_i$}$$

$$\left| (\boldsymbol{z}_{k+1}, \boldsymbol{a}_{k+1,1}(\theta_0), \ldots, \boldsymbol{a}_{k+1,k}(\theta_0)) \right| = 0 \tag{5.3}$$

を考える. ただし $\boldsymbol{z}_{k+1} := {}^t(z, z^2, \ldots, z^{k+1})$ とする. そして, 次の集合を考える.

$$\mathcal{F}_{ki} := \left\{ f(\cdot) \,\middle|\, (5.2)_i \text{ is satisfied for all } u \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

このとき, 次の補題 4 , 5 が成り立つ.

補題 4 $\mathcal{LB}_k \subset \cap_{i=1}^k \mathcal{F}_{ki}$.

補題 5 $f \in \mathcal{LB}_k$ であれば h_1 は次の形に限る.

$$h_1(u) = \begin{cases} H_1 + H_2 u & \text{(5.3) の解が 0 に限る時,} \\ H_1 + H_2 e^{z_0 u} & \text{(5.3) の解が } 0, z_0, 2z_0, \ldots, kz_0 \text{ の時,} \\ H_1 & \text{その他.} \end{cases}$$

ただし H_1, H_2 は任意の複素数, z_0 は任意の 0 でない複素数である.

補題5から次の定理を得る.

定理 5 (Tanaka [T03b], [T03c]). 位置母数族で Bhattacharyya の下限を達成する分布族は, 確率密度関数が次のような正規分布族と指数ガンマ分布族に限る.

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left\{ -\frac{(x-\theta-a)^2}{2b^2} \right\} \quad (x, \theta \in \mathbb{R}^1; a \in \mathbb{R}^1, b > 0),$$

$$f(x,\theta) = \frac{|b|}{\Gamma(a)c^a} \exp\left\{ -\frac{e^{b(x-\theta)}}{c} + ab(x-\theta) \right\} \quad (x, \theta \in \mathbb{R}^1; a, c > 0, b \neq 0).$$

ただし, 下限を達成するのは被推定関数が, 正規分布族の場合は θ の高々 k 次多項式の時, 指数ガンマ分布族の場合は $e^{b\theta}$ の高々 k 次多項式の時である.

5.2 尺度母数族

$f(x,\theta)$ を尺度母数族からの確率密度関数, つまり $f(x,\theta)=f(x/\theta)/\theta$, $\mathcal{X}=\Theta=(0,\infty)$ とする. この場合, $y:=\log x$, $\sigma:=\log\theta$ と対数変換することにより位置母数族の場合に帰着でき, 次の定理を得る (Ferguson [F62] 参照).

定理 6 (Tanaka [T03b], [T03c]). 尺度母数族で Bhattacharyya の下限を達成する分布族は, 確率密度関数が次のような対数正規分布族と (拡張) ワイブル分布族に限る.

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}bx}\exp\left\{-\frac{1}{2b^2}\left(\log\frac{x}{\theta}-a\right)^2\right\}\quad (x,\theta>0;a\in\mathbb{R}^1,b>0),$$
$$f(x,\theta)=\frac{|b|}{\Gamma(a)c^a\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{ab-1}\exp\left\{-\frac{1}{c}\left(\frac{x}{\theta}\right)^b\right\}\quad (x,\theta>0;a,c>0,b\neq 0).$$

ただし, 下限を達成するのは被推定関数が, 対数正規分布族の場合は $\log\theta$ の高々 k 次多項式の時, (拡張) ワイブル分布族の場合は θ^b の高々 k 次多項式の時である.

注意 2 定理 5 ,定理 6 で得られた指数ガンマ分布族, (拡張) ワイブル分布族は Seth [S49], Shanbhag [S72] らが扱った分布族には属さない. つまり, 彼らが考えたクラスより広いクラスで Bhattacharyya の下限を達成する分布族を特定したことになる.

注意 3 位置母数族からの大きさ $n(\geq 2)$ の標本に基づく推定問題を考える. ただし, 未知母数に対する最小十分統計量は 1 次元とする. このとき Takeuchi [T73] は, 位置母数の UMVU 推定量が存在する分布族は正規分布族, 指数ガンマ分布族, 指数分布族に限ると主張したが, 最小十分統計量が 1 次元であるという仮定は必要である. 反例としては確率密度関数が $f(x,\theta)=C\exp\{-(x-\theta)^4\}$ $(x\in\mathbb{R}^1;\theta\in\mathbb{R}^1)$ を考えればよい. つまり, [T73] の結果からは定理 5 は導かれない.

6 おわりに

本論では実母数の Bhattacharyya の下限を達成する分布族を (i) 一般の場合, (ii) 位置母数族 (及び尺度母数族) の場合に分けて議論を行った. (i) では従来考えられていた指数型分布族より広いクラスでも Bhattacharyya の下限を達成することを示し, 特に, 指数型分布族の混合分布族の型を特定した. しかし, 指数型分布族の混合分布族だけを考えれば良いわけではなく, 非指数型分布族でも Bhattacharyya の下限を達成することを示した (例 4). そこで (ii) のように分布族を制限することにより Bhattacharyya の下限を達成する分布族を具体的に明らかにすることが出来た.

ここで, まだいくつか課題が残っている. まず, 定理4では指数型分布族の混合分布族の場合についてのみの結果であり, さらなる研究の余地がある. また, 位置母数族で Bhattacharrya の下限を達成する分布族を考えた時, $\tilde{a}_k \in \mathcal{A}_k$ を仮定したが, この仮定を満たさない場合については未解決である. この場合に得られる $f(x,\theta)$ は (A5) を満たさないと予想される. つまり Bhattacharyya の不等式を考えることすら出来ないのである. (非正則な場合の情報不等式等については, 例えば Hammersley [H50], Chapman-Robbins [CR51], Akahira and Takeuchi [AT95], Kshirsagar [K00], Koike [K02] 等がある.) また, 本論では実母数の場合しか考えていないが, 多母数の場合には (2.2) が偏微分方程式となり, 問題がやや複雑になる.

参考文献

[AST97] Abdulghani, A. G. Alharbi, Shanbhag, D. N. and Thabane, L. (1997). Some structural properties of the Bhattacharyya matrices. *Sankhyā*, Ser. A **59**, 232–241.

[AS65] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover, New York.

[AT95] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-regular statistical estimation.* Lecture Notes in Statistics, 107. Springer-Verlag, New York.

[B80] Bartoszewicz, J. (1980). On the convergence of Bhattacharyya bounds in the multiparameter case. *Zastos. Mat.* **16**, 601–608.

[B46] Bhattacharyya, A. (1946). On some analogues of the information and their use in statistical estimation. *Sankhyā*, **8**, 1–14.

[BR74] Blight, J. N. and Rao, P. V. (1974). The convergence of Bhattacharyya bounds. *Biometrika*, **61**, 137–142.

[CR51] Chapman, D. G. and Robbins, H. (1951). Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Ann. Math. Statist.*, **22**, 581–586.

[C46] Cramér, H. (1946). *Mathematical methods of statistics.* Princeton Univ. Press.

[F59] Fend, A. V. (1959). On the attainment of Cramér-Rao and Bhattacharyya bounds for the variance of an estimate. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 381–388.

[F62] FERGUSON, T. S. (1962). Location and scale parameters in exponential families of distributions. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 986–1001.

[GS87] GHOSH, J. K. AND SATHE, Y. S. (1987). Convergence of Bhattacharyya bounds. *Sankhyā*, Ser. A **49**, 37–42.

[H50] HAMMERSLEY, J. M. (1950). On estimating restricted parameters. *J. Roy. Statist. Soc.* Ser. B. **12**, 192–229.

[I76] ISHII, G. (1976). On the attainment of Bhattacharyya bound. *Chinese Journal Mathematics*, **4**, 37–45.

[J76] JOSHI, V. M. (1976). On the attainment of the Cramér-Rao lower bound. *Ann. Statist.*, **3**, 998–1002.

[K84] KHAN, R. A. (1984). On UMVU estimators and Bhattacharyya bounds in exponential distributions. *J. Statist. Plann. Inference*, **9**, 199–206.

[K02] KOIKE, K. (2002). On the inequality of Kshirsagar. *Comm. Statist. Theory Methods*, **31**, 1617–1627.

[K00] KSHIRSAGAR, A. M. (2000). An extension of the Chapman-Robbins inequality. *J. Indian Statist. Assoc.*, **38**, 355–362.

[R45] RAO, C. R. (1945). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **37**, 81–91.

[S49] SETH, G. R. (1949). On the variance of estimates. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 1–27.

[S72] SHANBHAG, D. N. (1972). Some characterizations based on the Bhattacharya matrix. *J. Appl. Probability*, **9**, 580–587.

[T73] TAKEUCHI, K. (1973). On location parameter family of distributions with uniformly minimum variance unbiased estimator of location. *Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory.* Lecture Notes in Math., **330**, 465–477. Springer, Berlin.

[T03a] TANAKA, H. (2003). On a relation between a family of distributions attaining the Bhattacharyya bound and that of linear combinations of the distributions from an exponential family. *Comm. Statist. Theory and Method.*, **32**, 1885–1896.

[T03b] TANAKA, H. (2003). On a location parameter family of distributions attaining the Bhattacharyya bound. *Proc. Symp., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.* **1334**, 158–174.

[T03c] TANAKA, H. (2003). Location and scale parameter family of distributions attaining the Bhattacharyya bound. *Math. Res. Note*, No.2003-004, Inst. of Math., Univ. of Tsukuba.

[TA03] TANAKA, H. AND AKAHIRA, M. (2003). On a family of distributions attaining the Bhattacharyya bound. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **55**, 309–317.

[W73] WIJSMAN, R. A. (1973). On the attainment of the Cramér-Rao lower bound. *Ann. Statist.*, **1**, 538–542.

[Z71] ZACKS, S. (1971). *The Theory of Statistical Inference.* Wiley, New York.