

THE UNKNOTTING NUMBERS OF KNOTTED 3-SPHERES
IN THE 6-SPHERE IN THE SENSE OF HAEFLIGER

大場 清, お茶の水女子大学
(KIYOSHI OHBA, OCHANOMIZU UNIVERSITY)

§1. 序

これは, 2004 年 3 月にお茶の水女子大学修士課程を修了し, 現在豊島岡女学院で教師をしている村井美里女史との共同研究についてであることを, はじめに明記しておく.

球面の球面への埋め込み $f: S^n \hookrightarrow S^m$ または S^m と像 $K^n = f(S^n)$ の組 (S^m, K) を一般に結び目というが, トポロジカルカテゴリーや PL-カテゴリーで結び目を考えると, 可微分カテゴリーで考える時には, 大きな違いがある. トポロジカルカテゴリーや PL-カテゴリーで考える場合, 余次元 $m - n$ が 3 以上の場合は, Stallings [10], Zeeman [12] の結果により, 余次元 $m - n$ が 3 以上の場合は如何なる結び目も自明な結び目, すなわち, K は S^m に埋め込まれた $n + 1$ 次元円板の境界になっている. しかし Haefliger は, 可微分カテゴリーで, 余次元が 3 以上であっても自明ではない結び目の存在を示したのである ([3], [4]). そこで, 発見者にちなんで, 可微分カテゴリーで考える余次元が 3 以上の結び目 $f: S^n \hookrightarrow S^m$ を Haefliger (m, n) -結び目と呼ぶことにする.

Haefliger は, 可微分カテゴリーで考えても $3n + 3 < 2m$ とのときは任意の結び目が自明になるが, 一方, $m = 6k, n = 4k - 1 (k \geq 1)$ のときには, Haefliger (m, n) -結び目の h -コボルディズム類の全体が連結和を演算として無限巡回群になることを示し, その生成元を具体的に与えた. Smale [9] の結果も合わせて使うことにより, $m = 6k, n = 4k - 1 (k \geq 1)$ のときには, Haefliger $(6k, 4k - 1)$ -結び目の h -コボルディズム類と同型類とは 1 対 1 に対応していることが分かる. つまり, この場合, Haefliger 結び目の同型類は \mathbb{Z} と 1 対 1 に対応していることになる.

我々は, 古典的結び目理論の“結び目解消数 (unknotting number)”という不変量に対応する不変量を Haefliger $(6, 3)$ -結び目に対して考え, やはり結び目解消数と呼ぶことにした. 古典的結び目理論において結び目解消数とは, 結び目を正則ホモトピーで自明な結び目に変形するときに生じる自己交叉多様体 (これは 0 次元) の最小連結成分数として定義される. 定義は簡単であるが, 実際に計算するのは大変な不変量である [6]. さて, Haefliger (m, n) -結び目が仮に自明な結び目と正則ホモトピックであるとすると, 変形するときに生ずる自己交叉多様体は $2(n + 1) - (m + 1)$ 次元, つまり, $2n - m + 1$ 次元の多様体になる. したがって, $2n - m + 1$ が 0 か 1 になる時は, 自己交叉多様体は有限個の点, もしくは有限個の S^1 になるので, その最小連結成分数として結び目解消数というものが考えられるのである. ここで, $3n + 3 \geq 2m$ かつ $m - n \geq 3$ の範囲で $2n - m + 1$ が 0 か 1 になるのは, $(m, n) = (6, 3)$ の時のみで, $2n - m + 1 = 1$ であることがわかる.

我々の結果は以下の通りである.

定理 任意の Haefliger (6,3)-結び目 (S^6, K^3) は、自明な結び目に正則ホモトピックであり、その結び目解消数 $u(S^6, K^3)$ は次のようになる。

$$u(S^6, K^3) = \begin{cases} 0 & ((S^6, K^3) \text{ が自明のとき}), \\ 1 & ((S^6, K^3) \text{ が自明でないとき}). \end{cases}$$

§2. 証明

Haefliger (m,n) -結び目の同型類全体の集合を $\Sigma^{m,n}$ とすると、Haefliger [3], [4] と Smale [9] の結果により、 $\Sigma^{m,n}$ は Haefliger (m,n) -結び目の h -コボルディズム類の全体とも考えられる。(したがって、コンコーダンス類の全体とも、アイソトピー類全体とも、アンビエントアイソトピー類の全体とも考えられる。) ここで、Haefliger (m,n) -結び目 (S^m, K^n) に対して、自明な結び目への自己交叉のない正則ホモトピーが存在したとすると、それは自明な結び目へのアイソトピーになっている。したがって、自明な結び目との h -コボルディズムが得られるので、この場合、もともとの Haefliger (m,n) -結び目自体が自明な結び目になっていることがわかる。よって、非自明な Haefliger (m,n) -結び目に対して、自明な結び目への正則ホモトピーが存在するならば、必ず自己交叉をもつことになる。すなわち、Haefliger (6,3)-結び目に対して次がわかる。

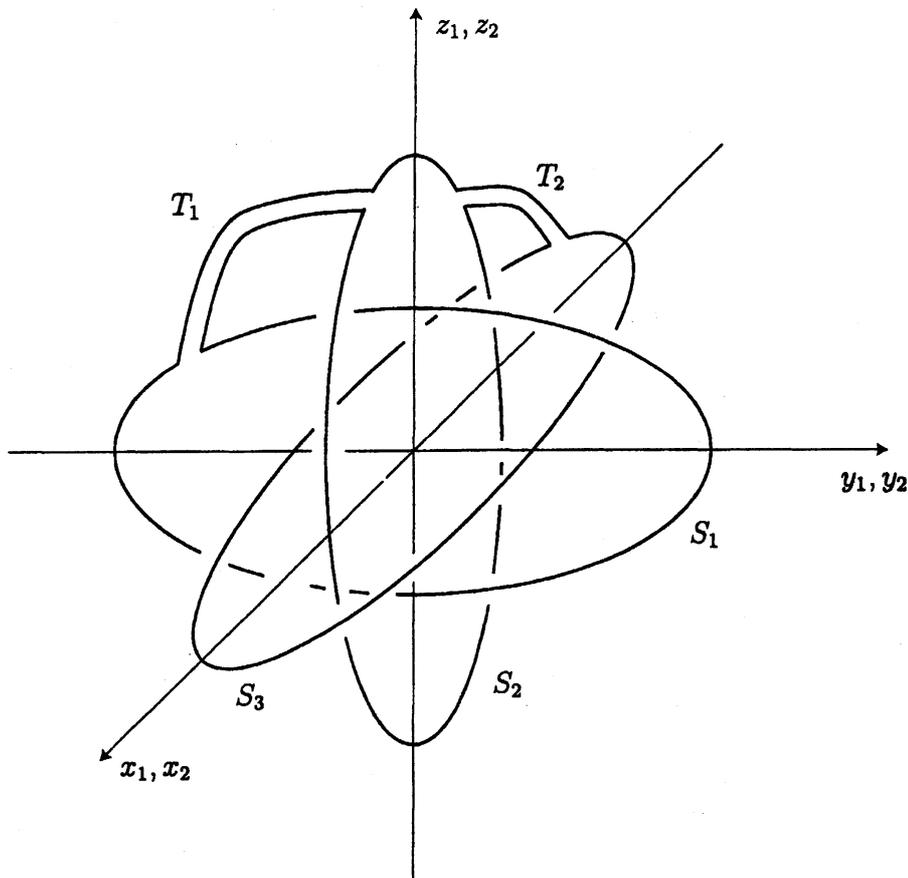
補題 1 非自明な Haefliger (6,3)-結び目 (S^6, K^3) が、自明な結び目と正則ホモトピックであるならば、結び目解消数 $u(S^6, K^3)$ が考えられ、 $u(S^6, K^3) \geq 1$ となる。

Haefliger は、[3] の中で無限巡回群 $\Sigma^{6k,4k-1}$ の生成元を具体的に与えている。 $\Sigma^{6,3}$ の生成元を以下に記述してみよう。

まず、6次元数空間 \mathbb{R}^6 の座標系を $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ とし、 \mathbb{R}^6 に埋め込まれた次の3つの3次元球面 S_1, S_2, S_3 を考える。

$$\begin{aligned} S_1: \quad & x_1 = x_2 = 0, \quad \frac{y_1^2 + y_2^2}{\alpha^2} + \frac{z_1^2 + z_2^2}{\beta^2} = 1 \\ S_2: \quad & y_1 = y_2 = 0, \quad \frac{z_1^2 + z_2^2}{\alpha^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\beta^2} = 1 \\ S_3: \quad & z_1 = z_2 = 0, \quad \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{\beta^2} = 1 \\ & (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > \beta > 0) \end{aligned}$$

次に、 \mathbb{R}^6 内の細い管 T_1 により S_1 と S_2 を向きも考慮して連結和し、さらに細い管 T_2 を用いて \mathbb{R}^6 内で S_3 も連結和する。こうして得られた \mathbb{R}^6 に埋め込まれた3次元球面 $S = S_1 \# S_2 \# S_3$ が $\Sigma^{6,3}$ の生成元である。つまり、生成元 (S^6, S) は、高次元のポロミアン・リングを連結和したものである。(Figure 1) なお、次元の関係から、細い管 T_1, T_2 は、互いに交わらず、境界以外では S_1, S_2, S_3 に交わらなければ、どのようにとっても同じ Haefliger 結び目が得られる。

FIGURE 1. $\Sigma^{6,3}$ の生成元

では, Haefliger によって与えられた $\Sigma^{6,3}$ の生成元 (S^6, S) について, それが自明な結び目と正則ホモトピックであり, 結び目解消数 $u(S^6, S)$ が 1 に等しくなることを見よう.

実数 γ を $\gamma > \alpha$ となるように選び, S^6 中の 3次元球面の $t \in I$ (I は閉区間 $[0, 1]$ のこととする) による族

$$S_{2,t}: \quad y_1 = y_2 = 0, \quad \frac{z_1^2 + z_2^2}{\alpha^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\{(\gamma - \beta)t + \beta\}^2} = 1$$

を考える. すると $S_{2,0} = S_2$ であり, また, S_1 と $S_{2,1}$ と S_3 は互いに交わらず, かつ, 絡まない S^6 中に自明に埋め込まれた 3つの 3次元球面であることがわかる. そこで, S を構成する時の S_2 を $S_{2,t}$ で置き換えてやることにより, 族

$$S_1 \# S_{2,t} \# S_3$$

が得られ, これは, 構成のしかたから, S と自明な結び目をつなぐ正則ホモトピー $F: S^3 \times I \rightarrow S^6 \times I$ の像になっていることがわかる.

正則ホモトピー F の自己交叉をみると、それは $S_{2,t} \times \{t\}$ ($t \in I$) と $S_3 \times I$ の間で起こるので、連立方程式

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 0, & \frac{z_1^2 + z_2^2}{\alpha^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\{(\gamma - \beta)t + \beta\}^2} = 1 \quad (t \in I) \\ z_1 = z_2 = 0, & \frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

を解くことにより、 $t = (\alpha - \beta)/(\gamma - \beta)$, $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2$ となり、自己交叉は S^1 がただ1つ現れることがわかる。すなわち、

補題2 $\Sigma^{6,3}$ の生成元 (S^6, S) は、自明な結び目と正則ホモトピックである。そして、自明な結び目への正則ホモトピーとして、自己交叉が、ある1つのレベルのみで1つの1次元球面として起こり、自己交叉の逆像が2つの1次元球面となるようなものが選べる。特に、結び目解消数は1である。

次に、2つの Haefliger (6,3)-結び目 (S^6, K_1) , (S^6, K_2) が、どちらも自明な結び目と正則ホモトピックであるとする。さらに、自明な結び目への正則ホモトピー $F_i: S^3 \times I \looparrowright S^6 \times I$ として、ある1つのレベル $t = t_0$ においてのみ自己交叉が現れ、その自己交叉が1つの1次元球面として起こり、自己交叉の逆像が2つの1次元球面となるようなものが選べるとする。(特に、結び目解消数は1である。)

ここで、滑らかな写像 $g_i: I \rightarrow S^6 \times I$ ($i = 1, 2$) を、それぞれその像が F_i の像に含まれ、 F_i の自己交叉する場所からは離れているような、そしてレベルを保つ写像として選ぶ。すると、 $g_i(I)$ に沿ってレベルごとに連結和を取るにより、 $(S^6, K_1 \# K_2)$ と自明な結び目をつなぐ正則ホモトピー $F: S^3 \times I \looparrowright S^6 \times I$ を得る。この正則ホモトピー F の自己交叉は、 $t = t_0$ においてのみ現れ、2つの1次元球面になる。各成分を C_1, C_2 とおく。逆像 $F^{-1}(C_i)$ ($i = 1, 2$) は、それぞれ2つの1次元球面となる。それを C_i^+, C_i^- ($i = 1, 2$) とおく。 C_i^\pm は $S_{t_0}^3 := S^3 \times \{t_0\}$ に含まれる。

上の正則ホモトピー $F: S^3 \times I \looparrowright S^6 \times I$ を変形して、自己交叉が $t = t_0$ のレベルのみに現れ、1つの1次元球面になるように、また、その逆像が2つの1次元球面になるような正則ホモトピーにしよう。

まず、点 $p_1 \in C_1, p_2 \in C_2$ を任意にとり、その F による逆像を $p_i^+ \in C_i^+, p_i^- \in C_i^-$ ($i = 1, 2$) とする。 $S_{t_0}^3$ の中で p_1^+ と p_2^+, p_1^- と p_2^- をそれぞれ滑らかな曲線 $\gamma^+: [0, 1] \rightarrow S_{t_0}^3, \gamma^-: [0, 1] \rightarrow S_{t_0}^3$ で結ぶ。次元の関係から γ^+, γ^- は互いに交わらず、自己交叉もしないとしてよい。この2つの曲線を F で移すと、 $F \circ \gamma^+([0, 1]) \cup F \circ \gamma^-([0, 1])$ は p_1, p_2 で角をもつ $F(S^3 \times \{t_0\}) \subset S^6 \times \{t_0\}$ 内の単純閉曲線になる。(Figure 2)

$F(S^3 \times \{t_0\}) \subset S^6 \times \{t_0\}$ 内の単純閉曲線 $\gamma := (F \circ \gamma^+) \cdot (F \circ \gamma^-)$ は、もちろん、2次元円板から $S^6 \times \{t_0\}$ への写像 $\tilde{\gamma}: D^2 \rightarrow S^6 \times \{t_0\}$ に拡張されるが、次元の関係から、 $\tilde{\gamma}$ は埋め込みとしてよく、 $\tilde{\gamma}(\partial D^2)$ のみで $F(S^3 \times \{t_0\})$ と交わり、それは横断的であるとしてよい。(ただし、 p_1, p_2 では“角”をもつが。)

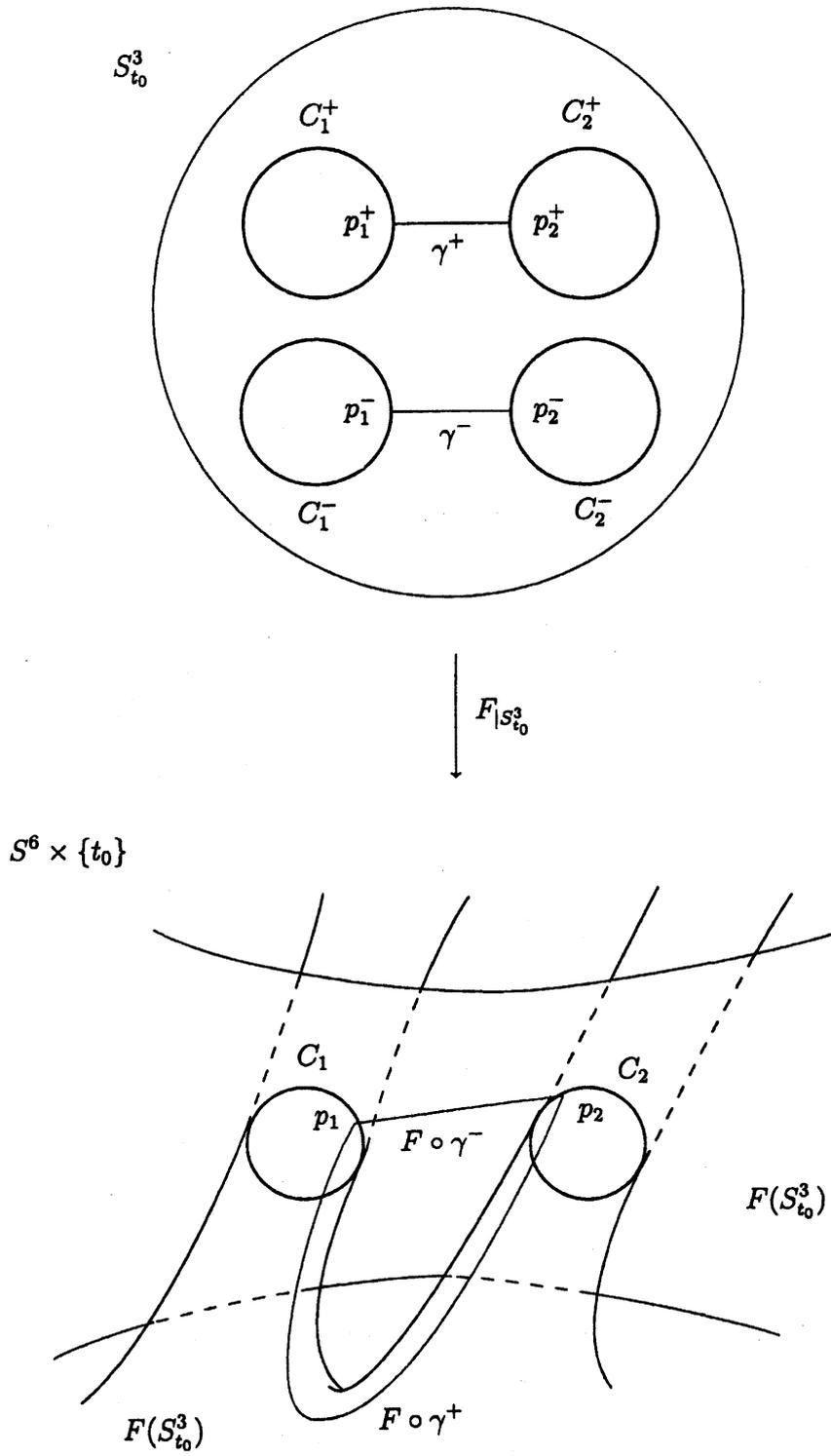


FIGURE 2. 自己交叉

$\tilde{\gamma}(D^2)$ の $S^6 \times \{t_0\}$ での法ベクトル束の2次元部分ベクトル束を次のように構成する。まず, p_1 において, 2つの法ベクトル $f_1(p_1), f_2(p_1)$ を, $F \circ \gamma^+([0, 1])$ に接するベクトル $f_+(p_1)$ と $f_1(p_1), f_2(p_1)$ が $dF_{p_1^+}(T_{p_1^+}(S^3 \times \{t_0\}))$ の基底になっており, さらに $f_1(p_1)$ が C_1 に接するベクトルとなるようにとる。ここで, Stiefel 多様体 $V_{2,1}$ が弧状連結であるから, 法ベクトル f_1 は, $F \circ \gamma^-([0, 1])$ に沿って $F(S^3 \times \{0\})$ に接するような, そして, $f_1(p_2)$ は C^2 に接するような法ベクトル場に拡張できる。一方, p_2 において, 法ベクトル $f_2(p_2)$ を, $F \circ \gamma^+([0, 1])$ に接するベクトル $f_+(p_2)$ と $f_1(p_2), f_2(p_2)$ が $dF_{p_2^+}(T_{p_2^+}(S^3 \times \{t_0\}))$ の基底となるようにとると, やはり $V_{2,1}$ の弧状連結性により, f_2 は, $F \circ \gamma^-([0, 1])$ に沿って p_1, p_2 以外では $F(S^3 \times \{t_0\})$ には接しない法ベクトル場に拡張される。次に, 法枠 f_1, f_2 を $F(S^3 \times \{t_0\})$ に接したまま $F \circ \gamma^+([0, 1])$ に沿って拡張する。これは $SO(2)$ が弧状連結であるから可能である。これで単純閉曲線 γ に沿った $\tilde{\gamma}(D^2)$ の法枠 f_1, f_2 が出来たが, Stiefel 多様体 $V_{4,2}$ の単連結性より, これは $\tilde{\gamma}(D^2)$ 全体の法枠 f_1, f_2 に拡張される。

このように作った $\tilde{\gamma}(D^2)$ の法部分ベクトル束を使えば, 埋め込み $\Gamma: D^2 \times D^2 \hookrightarrow S^6 \times \{t_0\}$ が, $\Gamma(D^2 \times D^2) \cap F(S^3 \times \{t_0\}) = \Gamma((\partial D_+^2) \times D^2) \cup \Gamma((\partial D_-^2) \times D^1)$ となるように作れる。(ここで ∂D_+^2 とは $\Gamma((\partial D_+^2) \times \{0\}) = \gamma^+([0, 1])$ となるような D^2 の境界の部分とする。) そこで, この埋め込まれた4次元円板を利用して, もともとの正則ホモトピーを変形し, $t = t_0$ での S^3 からの像が $(F(S^3 \times \{t_0\}) - \Gamma((\partial D_+^2) \times D^2)) \cup \Gamma(D^2 \times (\partial D^2)) \cup \Gamma((\partial D_-^2) \times D^2)$ となるように, そして, $t \neq t_0$ では自己交叉がないようなホモトピー $F': S^3 \times I \rightarrow S^6 \times I$ にすることができる。

このホモトピー F' の自己交叉は, $C_1 \cup \Gamma((\partial D_-^2) \times D^1) \cup C_2$ であるが, 滑らかにしてやり, さらに少し押し出すことにより, $t = t_0$ のみで自己交叉をもち, その自己交叉は1次元球面1つ分になるような正則ホモトピーに変形できる。また, その正則ホモトピーの自己交叉の逆像は2つの1次元球面になっていることも容易に確かめられる。(Figure 3)

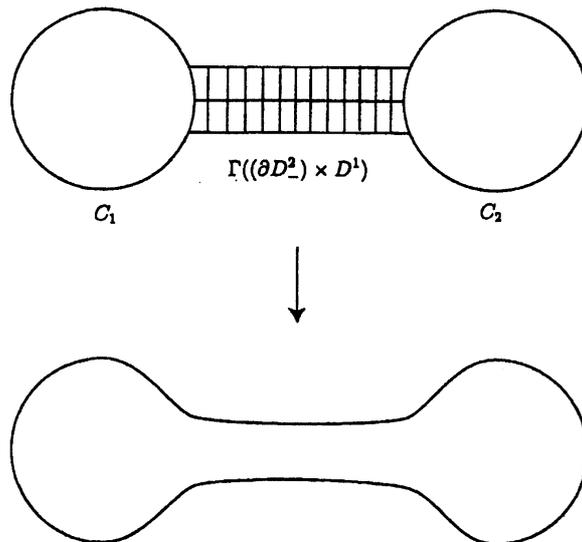


FIGURE 3

最後に、任意の Haefliger (6,3)-結び目 (S^6, K^3) が Haefliger (6,3)-結び目 (S^6, S) のいくつかの連結和によって表されることと、 (S^6, S) に対しては、補題 2 が成り立つことを考え合わせると、帰納法により、 $u(S^6, K^3) \leq 1$ となることがわかる。補題 1 を合わせれば、定理が得られる。

Remark 1 同様にして Haefliger $(6k, 4k-1)$ -結び目に対して、自明な結び目との間の正則ホモトピーを具体的に作る事ができる。それとは別に Ekholm によると、埋め込み $S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ で表される正則ホモトピー類はただ一つで、 $4k+1 \leq q \leq 6k-1$ のときは、埋め込み $S^{4k-1} \hookrightarrow S^q$ で表されるような正則ホモトピー類は無数あり、必ずしも自明な結び目との間に正則ホモトピーは存在しないことがわかるらしい。(未確認)

Remark 2 すぐわかることだと思うが、Haefliger (6,3)-結び目の自明な結び目への正則ホモトピーに現れる自己交叉の各成分 (1次元球面) の引き戻しは、わざわざ仮定しなくても、常に2つの1次元球面になるだろう。

Remark 3 古典的結び目理論には、結び目解消数と似た不変量として、4次元クラスプ数というものがある。それは、結び目 $(\partial D^4, K^1)$ に対し、その4次元クラスプ数 $cl^*(K^1)$ とは、 K^1 を境界とする D^4 内のはめ込まれた2次元円板をすべて考え、その自己交叉の最少数のことである。結び目解消数と同様に Haefliger (6,3)-結び目に対しても7次元クラスプ数というべきものを定義することができるが、常に結び目解消数以下になると、Haefliger 結び目では同型類と h -コボルディズム類が一致することから、すぐに、「7次元クラスプ数は、自明な Haefliger (6,3)-結び目に対しては0、非自明な Haefliger (6,3)-結び目に対しては常に1となる」ことがわかる。これは、4次元クラスプ数が0となる古典的結び目はスライス結び目と呼ばれ、いろいろなものが知られていることとは対照的である。

REFERENCES

- [1] T. Ekholm, *Differential 3-knots in 5-space with and without self-intersections*, *Topology*, 40 (2001), 157-196.
- [2] T. Ekholm, A. Szücs, *Geometric formulas for Smale invariants of codimension two immersions*, *Topology*, 42 (2003), 171-196.
- [3] A. Haefliger, *Knotted $(4k-1)$ -spheres in $6k$ -space*, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 452-466.
- [4] A. Haefliger, *Differential embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$* , *Ann. of Math.*, 83 (1966), 402-436.
- [5] J. Levine, *A classification of differentiable knots*, *Ann. of Math.*, 82 (1965), 15-50.
- [6] W. B. Raymond Lickorish, *An introduction to knot theory*, GTM 175 (Springer-Verlag, New York-Berlin, 1997).
- [7] M. Murai, *(6,3) 型 Haefliger knot を境界とする 4次元 disk の 7次元球体へのはめ込みについて*, お茶の水女子大学 2003 年度修士論文.
- [8] S. Smale, *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 327-344.
- [9] S. Smale, *On the structure of manifolds*, *Amer. J. Math.*, 84 (1962), 387-399.
- [10] J. Stallings, *On topologically unknotted spheres*, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 490-503.

- [11] M. Takase, *A geometric formula for Haefliger knots*, to appear.
- [12] E. C. Zeeman, *Unknotting combinatorial balls*, Ann. of Math. 78 (1963) 501-526.