数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 163-174

ウェーブレットと作用素代数

東邦大学理学部 加藤 雅彦 (Masahiko KATO)
Faculty of Science, Toho University

本稿は Bratteli–Jorgensen による直交ウェーブレットと作用素代数に関する研究 [BJ97a, BJ97b, BJ02a, BJ02b] の一部を解説したものである．はじめに，直交ウェーブレットの構成法から $L^2(\mathbb{T})$ 上の作用素の関係 (Cuntz リレーション) を導き，次に Cuntz リレーションを満たすような作用素からできる C^*-代数 (Cuntz 環 [Cun77]) の $L^2(\mathbb{T})$ への表現からウェーブレットを構成する方法を解説する．最後に，ここで現れる $L^2(\mathbb{T})$ 上の作用素とウェーブレットの計算機処理に用いられる Mallat のピラミッドアルゴリズムとの関係を紹介する．なお，ウェーブレットを構成する方法およびピラミッドアルゴリズムについては文献 [BJ02a] を参考にした．

1 直交ウェーブレットと Cuntz リレーション

$L^2(\mathbb{R})$ の関数に対するスケール変換と平行移動を

$$(U\xi)(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}\xi\left(\frac{x}{N}\right) \quad \text{for } \xi \in L^2(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}$$
$$(T^k\xi)(x) = \xi(x-k) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z},\ \xi \in L^2(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}$$

と定義する．ここで N は 2 以上の自然数とする．$L^2(\mathbb{R})$ の関数族 $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,N-1}$ が直交ウェーブレットであるとは $\{U^jT^k\psi_i\}_{i=1,\dots,N-1}^{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をなすときをいう．**Haar** のウェーブレットと呼ばれる

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ -1 & \text{if} \quad 1/2 < x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される関数は，$N=2$ の場合の直交ウェーブレットになる．

注意 1.1. $L^2([0,2\pi))$ において，関数 $\psi_L(t) = e^{-it}$ に対して $\psi_L(nt)$ を対応させるユニタリ作用素を U_n とすれば $\{U_n\psi_L\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{-int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は正規直交基底となる．また，$l^2(\mathbb{Z})$ において関数 $\psi_l(i) = \delta(i)$ に対して $\psi_l(i-k)$ を対応させるユニタリ作用素を T とすれば $\{T^k\psi_l\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\delta(i-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ も正規直交基底となる．U_n と T はそれぞれスケール変換と平行移動に相当する．直交ウェーブレットは $L^2(\mathbb{R})$ においてこの 2 種類のユニタリ作用素 (U,T) を併せ持つことで正規直交基底となるような関数族であるといえる．

今，Haar のウェーブレット ψ_1 は U と

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

から構成できることに注意する．すなわち，

$$U\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x-1)$$
$$U^{-1}U\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}U^{-1}\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}U^{-1}\varphi(x-1)$$
$$\psi_1(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$$

と表せる．この φ のことを **Haar の father 関数**と呼ぶ．$N=2$ の場合の直交ウェーブレットは Haar 系以外にもいくつか知られているが，基本的にはこのような φ から ψ_1 が構成される．以下，しばらくの間，関数を Haar 系 $(\varphi, \psi_1, N=2)$ に固定して話を進めることにする．また簡単のため ψ_1 を ψ と書くことにする．

φ の平行移動とその線形結合によって張られる $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間を V_0 とする．すなわち

$$V_0 := \overline{\mathrm{span}}\{T^k\varphi | k \in \mathbb{Z}\}$$

と定義する．

注意 1.2. V_0 に U および U^{-1} をかけることで

$$\cdots \subset U^2V_0 \subset UV_0 \subset V_0 \subset U^{-1}V_0 \subset U^{-2}V_0 \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$$

となる．

いま，ψ は幅が 1/2 の階段関数なので $\psi \in U^{-1}V_0$ となり，また，φ と直交していることから $\psi \in V_0^{\perp}$ となるので，$\psi \in V_0^{\perp} \cap U^{-1}V_0$ であることがわかる．この ψ の属する $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間を

$$W_0 := V_0^{\perp} \cap U^{-1}V_0$$

で表すことにする．

φ と ψ の関係を見るために，$\varphi \in V_0$，$\psi \in U^{-1}V_0$ であるから，U を施して $U\varphi, U\psi \in V_0$ とする．いま

$$U\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x-1)$$
$$U\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x-1)$$

に注意して Fourier 変換をとると

$$\widehat{U\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\varphi}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\cdot 1t}\hat{\varphi}(t) = \frac{1+e^{-i\cdot 1t}}{\sqrt{2}}\hat{\varphi}(t)$$
$$\widehat{U\psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\varphi}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\cdot 1t}\hat{\varphi}(t) = \frac{1-e^{-i\cdot 1t}}{\sqrt{2}}\hat{\varphi}(t)$$

となり，ともに，それぞれ周期 2π の関数

$$m_0(e^{-it}) := \frac{1+e^{-i\cdot 1t}}{\sqrt{2}}$$
$$m_1(e^{-it}) := \frac{1-e^{-i\cdot 1t}}{\sqrt{2}}$$

と $\hat{\varphi}$ との積で表せることがわかる．ここで $\hat{}$ は $L^2(\mathbb{R})$ での Fourier 変換を表す．φ, ψ を m_0, m_1 を用いて書き直せば

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0(e^{-it/2})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_1(e^{-it/2})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right)$$

となる．

さらに $z = e^{-it}$ とすれば m_0, m_1 は複素単位円周 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ 上の 2 乗可積分関数であることがわかる．すなわち m_0, m_1 はそれぞれ

$$m_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+z)$$
$$m_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-z)$$

となる．例えば Daubechies のウェーブレットの場合には次のようになる．

例 1.3 (Daubechies).

$$m_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}z + \frac{3-\sqrt{3}}{4}z^2 + \frac{1-\sqrt{3}}{4}z^3\right)$$
$$m_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{-3+\sqrt{3}}{4}z + \frac{3+\sqrt{3}}{4}z^2 + \frac{-1-\sqrt{3}}{4}z^3\right)$$

注意 1.4. φ について，$\{T^k\varphi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系であることと殆んど至るところで $\sum_{l\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(t+2l\pi)|^2 = 1$ が成立することが同値であることを利用すると，

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi} \rangle_{\widehat{L^2(\mathbb{R})}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{\varphi}(t)}\hat{\psi}(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\frac{1}{\sqrt{2}} m_0(e^{-it/2})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}} m_1(e^{-it/2})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{m_0(e^{-it})} m_1(e^{-it})|\hat{\varphi}(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{m_0(e^{-it})} m_1(e^{-it}) \sum_{l\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(t+2l\pi)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \overline{m_0(z)} m_1(z) dz \\
&= \langle m_0, m_1 \rangle_{L^2(\mathbf{T})}
\end{aligned}$$

となることがわかる．

U はユニタリ作用素なので

$$\varphi \perp \psi \Longleftrightarrow U\varphi \perp U\psi$$

となることに注意して，$\widehat{UV_0}$ および $\widehat{UW_0}$ を求める．UV_0 の元は

$$Uf, \quad f \in V_0$$

すなわち

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k \varphi(x-k)$$
$$Uf(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k \varphi\left(\frac{x}{2}-k\right)$$

と表せる．また $\varphi(x/2-k)$ の Fourier 変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\varphi\left(\frac{x}{2}-k\right)\right] &= \int_{\mathbf{R}} e^{-itx}\varphi\left(\frac{x}{2}-k\right)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-it(2y+2k)}\varphi(y)\cdot 2dy \\ &= 2e^{-it\cdot 2k}\hat{\varphi}(2t)\end{aligned}$$

であるから

$$\widehat{Uf}(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k e^{-it\cdot 2k}\hat{\varphi}(2t)$$

となる．いま，

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0(e^{-it/2})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right)$$

であるから

$$\hat{\varphi}(2t) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0(e^{-it})\hat{\varphi}(t)$$

より

$$\widehat{Uf}(t) = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k e^{-it\cdot 2k} m_0(e^{-it})\right)\hat{\varphi}(t)$$

となり，

$$\xi_f(e^{-it}) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k e^{-itk}$$

とおくと，$\widehat{Uf}$ の右辺は

$$\xi_f(z^2)m_0(z), \quad z\in\mathbb{T}$$

となっていることがわかる．したがって $L^2(\mathbb{T})$ 上の線形作用素 S_0 を

$$(S_0\xi)(z) := m_0(z)\xi(z^2), \quad z\in\mathbb{Z}, \xi\in L^2(\mathbb{T})$$

と定義すると

$$\widehat{UV_0} = \{(S_0\xi)(e^{-it})\hat{\varphi}(t) \mid \xi\in L^2(\mathbb{T})\}$$

と表せることがわかる．さらに $\{T^k\psi\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が W の正規直交基底であることに注意すれば，同様の計算から

$$(S_1\xi)(z) := m_1(z)\xi(z^2), \quad z\in\mathbb{Z}, \xi\in L^2(\mathbb{T})$$

と定義することにより

$$\widehat{UW_0} = \{(S_1\xi)(e^{-it})\hat{\varphi}(t) \mid \xi\in L^2(\mathbb{T})\}$$

と表せる．

上の計算から V_0 から $L^2(\mathbb{T})$ への等距離写像 $\mathcal{F}_\varphi$ を

$$\mathcal{F}_\varphi : \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\varphi(x-k) \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{-itk}$$

と定義すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\varphi(V_0) &= L^2(\mathbb{T})\\ \mathcal{F}_\varphi(UV_0) &= S_0(L^2(\mathbb{T}))\\ \mathcal{F}_\varphi(UW_0) &= S_1(L^2(\mathbb{T}))\end{aligned}$$

と表すことができる．

注意 1.5. $V_0 = UV_0 \oplus UW_0$ に注意すると，S_0 と S_1 の値域が直交し，かつ

$$S_0S_0^* + S_1S_1^* = I$$

となることがわかる．

S_0^*, S_1^* は以下のようにして計算することができる．一般に $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対して

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} f(\sigma_0(z))dz + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} f(\sigma_1(z))dz$$

とできることに注意する．ここで

$$\begin{aligned}\sigma_0 &: e^{-it} \longmapsto e^{-it/2}\\ \sigma_1 &: e^{-it} \longmapsto e^{-i(t/2+2\pi/2)}\end{aligned}$$

としている．これを利用して，任意の $\eta, \xi \in L^2(\mathbb{T})$ に対して

$$\begin{aligned}\langle S_0^*\eta, \xi\rangle &= \langle \eta, S_0\xi\rangle\\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{\eta}(z)m_0(z)\xi(z^2)dz\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \sum_{w^2=z} \overline{\eta}(w)m_0(w)\xi(z)dz\end{aligned}$$

と計算でき，よって

$$(S_0^*\eta)(z) = \frac{1}{2}\sum_{w^2=z} \overline{m_0}(w)\eta(w), \quad z \in \mathbb{T}$$

となる．S_1 も同様に

$$(S_1^*\eta)(z) = \frac{1}{2}\sum_{w^2=z} \overline{m_1}(w)\eta(w), \quad z \in \mathbb{T}$$

となる．

注意 1.6. φ と ψ の直交関係について

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle m_0, m_1\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{m_0}(z)m_1(z)dz\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \sum_{w^2=z} \overline{m_0}(w)m_1(w)dz\end{aligned}$$

より，ψ に対して

$$m_1 \in \ker S_0^* \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{w^2=z} \overline{m_0}(w)m_1(w) = 0 \Longrightarrow \varphi \perp \psi$$

となる．また，φ および ψ の正規性から

$$\sum_{w^2=z} \overline{m_i}(w)m_j(w) = 2\delta_{ij}, \quad i,j = 0,1$$

が成立する．

最後に，一般の N の場合を見ておくことにする．$m_0,\ldots,m_{N-1} \in L^2(\mathbb{T})$ に対して

$$(S_i\xi)(z) := m_i(z)\xi(z^N), \quad z \in \mathbb{Z}, \xi \in L^2(\mathbb{T})$$

と定義すると，$N=2$ の場合と同様の計算から

$$(S_i^*\eta)(z) = \frac{1}{N}\sum_{w^N=z} \overline{m_i}(w)\eta(w), \quad z \in \mathbb{T}$$

となる．また φ および $\{\psi_i\}_{i=1}^{N-1}$ について

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}m_0(e^{-it/2})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$\hat{\psi}_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}m_i(e^{-it/2})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right)$$

と表せるとすると，直交関係と正規性について

$$\sum_{w^N=z} \overline{m_i}(w)m_j(w) = N\delta_{ij}, \quad i,j = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (*)$$

を仮定すれば十分であることがわかる．$L^2(\mathbb{T})$ の関数族 $\{m_i\}_{i=0}^{N-1}$ に対して，上の関係式 $(*)$ が成立することは，各 m_i に対して定義される S_i について Cuntz リレーション

$$S_i^*S_j = \delta_{ij}I, \quad \sum_{i=0}^{N-1} S_iS_i^* = I$$

が成立することと同値になる．これは次のように示すことができる．まず，任意の $\xi \in L^2(\mathbb{T})$ に対して

$$\begin{aligned}(S_i^*S_j\xi)(z) &= S_i^*(m_j(z)\xi(z^N)) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{w^N=z} \overline{m_i}(w)(m_j(w)\xi(w^N)) \\ &= \frac{1}{N}\xi(z)\sum_{w^N=z} \overline{m_i}(w)m_j(w) \\ &= \frac{1}{N}\xi(z)\delta_{i,j}N \\ &= \delta_{i,j}\xi(z)\end{aligned}$$

となることから

$$S_i^*S_j = \delta_{i,j}I$$

が言える．次に

$$
\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=0}^{N-1} S_i S_i^* \xi, \xi \right\rangle &= \sum_{i=0}^{N-1} \langle S_i S_i^* \xi, \xi \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \langle S_i^* \xi, S_i^* \xi \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}} \overline{\left(\sum_{w^N = z} \overline{m_i}(w) \xi(w) \right)} \left(\sum_{w' = z} \overline{m_i}(w') \xi(w') \right) dz \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}} \sum_{\substack{w^N = z \\ w'^N = z}} m_i(w) \overline{\xi}(w) \overline{m_i}(w') \xi(w') dz.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\sigma_k : e^{-it} \longmapsto e^{-i(t/N + 2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1
$$

とおくと，(*) が成立することと，ほとんどすべての $z \in \mathbb{T}$ に対して行列

$$
\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} m_0(\sigma_0(z)) & m_0(\sigma_1(z)) & \ldots & m_0(\sigma_{N-1}(z)) \\ m_1(\sigma_0(z)) & m_1(\sigma_1(z)) & \ldots & m_1(\sigma_{N-1}(z)) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{N-1}(\sigma_0(z)) & m_{N-1}(\sigma_1(z)) & \ldots & m_{N-1}(\sigma_{N-1}(z)) \end{bmatrix}
$$

がユニタリであることが同値であることに注意する．ユニタリ行列の性質から

$$
\sum_{i=0}^{N-1} \overline{m_i}(\sigma_k(z)) m_i(\sigma_l(z)) = N \delta_{kl}
$$

が成立し

$$
\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=0}^{N-1} S_i S_i^* \xi, \xi \right\rangle &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}} \sum_{\substack{w^N = z \\ w'^N = z}} m_i(w) \overline{\xi}(w) \overline{m_i}(w') \xi(w') dz \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k,l} m_i(\rho_k(z)) \overline{\xi}(\rho_k(z)) \overline{m_i}(\rho_l(z)) \xi(\rho_l(z)) dz \\
&= \int_{\mathbb{T}} \sum_{k,l} \sum_{i} m_i(\rho_k(z)) \overline{\xi}(\rho_k(z)) \overline{m_i}(\rho_l(z)) \xi(\rho_l(z)) dz \\
&= N \int_{\mathbb{T}} \sum_{k} |\xi(\rho_k(z))|^2 dz \\
&= \int_{\mathbb{T}} |\xi(z)|^2 dz \\
&= \langle \xi, \xi \rangle.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\sum_{i=0}^{N-1} S_i S_i^* = I
$$

が示される．また，上の計算から逆が成立することもわかる．

2 直交ウェーブレットの構成

関数族 $\{m_i\}_{i=0}^{N-1} \subset L^2(\mathbb{T})$ が以下の条件を満たすと仮定する：

(i) $m_0(1) = \sqrt{N}$,

(ii) $\hat{\varphi}(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}}$ が $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数として定義できる，

(iii) ある $a > 0$ が存在して，任意の $t \in (-a, a)$ に対して $\hat{\varphi}(t) \neq 0$,

(iv) ほとんどすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2l\pi)|^2 = 1$,

(v) $L^2(\mathbb{T})$ 上の線形作用素として $(S_i\xi)(z) := m_i(z)\xi(z^N)$ を定義するとき，$\{S_i\}_{i=0}^{N-1}$ が Cuntz リレーションを満たす.

このとき

$$\widehat{\psi_i}(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-it/N})\hat{\varphi}\left(\frac{t}{N}\right), \quad t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, N-1$$

と定義すると $\{\psi_i\}_{i=1}^{N-1}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の直交ウェーブレットとなる．条件 (v) から $\{\psi_i\}_{i=1}^{N-1}$ が正規直交系であることは直ちにわかる：

$$\begin{aligned}
\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle \widehat{\psi_i}, \widehat{\psi_j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{m_i(e^{-it})\hat{\varphi}(t)} m_j(e^{-it})\hat{\varphi}(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{m_i}(e^{-it}) m_j(e^{-it}) |\hat{\varphi}(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{m_i}(e^{-it}) m_j(e^{-it}) \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2l\pi)|^2 dt \\
&= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}} \sum_{w^N = Z} \overline{m_i}(w) m_j(w) dz \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

よって Riesz–Fischer の等式

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle| = \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

が成立することを示す．前節と同様に V_0 を φ の平行移動とその線形結合によって張られる $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間とする．本稿では証明を省略するが，P_n を $U^n V_0$ への直交射影とするとき，条件 (ii), (iii) から $n \to -\infty$ のとき $P_n \xrightarrow{\mathrm{SOT}} I_{L^2(\mathbb{R})}$ が言える [Dau92]．このことから

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad f \in V_0$$

を示せば十分であることがわかる．

まず，任意の $f \in V_0$ に対し

$$\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle e_k, S_i^* S_0^{*\,n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

であることを示す．ここで $e_k(z) := z^k$ としている．

$$
\begin{aligned}
\widehat{U^nT^k\psi_i}(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} U^nT^k\psi_i(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{1}{\sqrt{N}^n}\psi_i\left(\frac{x}{N^n} - k\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-it(N^n(y-k))} \frac{N^n}{\sqrt{N}^n}\psi_i(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-itN^n y}\sqrt{N}^n\psi_i(y)e^{-itN^n k}dy \\
&= \sqrt{N}^n\widehat{\psi}_i(tN^n)e^{-itN^n k}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\langle U^nT^k\psi_i, f\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{U^nT^k\psi_i}(t)}\hat{f}(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\sqrt{N}^n\widehat{\psi_i}(tN^n)e^{-itN^n k}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\hat{\varphi}(t)dt.
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\widehat{\psi}_i(tN^n) &= \frac{1}{\sqrt{N}}m_i(e^{-itN^{n-1}})\hat{\varphi}(tN^{n-1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}m_i(e^{-itN^{n-1}})\frac{1}{\sqrt{N}}m_0(e^{-itN^{n-2}})\hat{\varphi}(tN^{n-2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}m_i(e^{-itN^{n-1}})\frac{1}{\sqrt{N}^{n-1}}\prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}^n}m_i(e^{-itN^{n-1}})\prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t)
\end{aligned}
$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
\langle U^nT^k\psi_i, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{m_i(e^{-itN^{n-1}})\prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t)e^{-itN^n k}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\hat{\varphi}(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{m_i(e^{-itN^{n-1}})\prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})e^{-itN^n k}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})|\hat{\varphi}(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{m_i(e^{-itN^{n-1}})\prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})e^{-itN^n k}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(t+2l\pi)|^2dt \\
&= \langle S_0^{n-1}S_ie_k, \mathcal{F}_\varphi(f)\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= \langle e_k, S_i^*S_0^{*n-1}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle_{L^2(\mathbb{T})}
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{l}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle U^nT^k\psi_i, f\rangle|^2 &= \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{l}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle e_k, S_i^*S_0^{*(n-1)}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{l}\|S_i^*S_0^{*(n-1)}\mathcal{F}_\varphi(f)\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{l}\langle S_i^* S_0^{*(n-1)}\mathcal{F}_\varphi(f), S_i^* S_0^{*(n-1)}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{l}\langle \mathcal{F}_\varphi(f), S_0^{(n-1)} S_i S_i^* S_0^{*(n-1)}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{l}\langle \mathcal{F}_\varphi(f), S_0^{(n-1)}(1 - S_0 S_0^*) S_0^{*(n-1)}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{l}\langle \mathcal{F}_\varphi(f), (S_0^{(n-1)} S_0^{*(n-1)} - S_0^n S_0^{*(n-1)})\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}_\varphi(f), (1 - S_0^l S_0^{*l})\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle \\
&= \|\mathcal{F}_\varphi(f)\|^2 - \|S_0^{*l}\mathcal{F}_\varphi(f)\|^2.
\end{aligned}
$$

従って

$$\lim_{l\to\infty}\|S_0^{*l}\mathcal{F}_\varphi(f)\| = 0,$$

すなわち，S_0 が (広い意味で) 片側シフト作用素になっていれば証明が完成する．S_0 は等距離作用素であるから

$$E_k := S_0^k S_0^{*k}, \quad P_u := \underset{k\to\infty}{\text{s-lim}}\, E_k$$

とするとき

$$S_0 = S_0 P_u \oplus S_0(I - P_u)$$

と Wold 分解でき，つぎの定理が成り立つ．

定理 2.1 ([BJ97b]). (i) $\dim P_u = 0$ または 1,
(ii) $\dim P_u = 1$ ならば，ほとんどすべての $z \in \mathbb{T}$ に対して $|m_0(z)| = 1$.

いま，仮定より $m_0(1) = \sqrt{N}$ であるから $P_u = 0$ となり，S_0 は (広い意味で) 片側シフト作用素であることがわかる．

3 ピラミッドアルゴリズム

$N-1$ 個のウェーブレットに対して，分解アルゴリズムにおける関係式は

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{n,k} U^n T^k \varphi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{n+1,k} U^{n+1} T^k \varphi + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{n+1,k,i} U^{n+1} T^k \psi_i \tag{**}$$

と表せる．ここで

$$c_{n,k} = \langle U^n T^k \varphi, f\rangle = \langle e_k, S_0^{*n}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle$$

および

$$d_{n+1,k,i} = \langle U^{n+1} T^k \psi_i, f\rangle = \langle e_k, S_i^* S_0^{*n}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle$$

となる．

任意の $f \in V_0$ に対し

$$\langle U^n T^k \varphi, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle e_k, S_0^{*n}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

であることは既に示したので,

$$\langle U^nT^k\varphi, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle e_k, S_0^{*n}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle_{L^2(\mathbf{T})}$$

を示す. これは 8–9 ページの計算と同様に

$$\begin{aligned}
\widehat{U^nT^k}\varphi(t) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-itx}U^nT^k\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} e^{-itx}\frac{1}{\sqrt{N}^n}\varphi\left(\frac{x}{N^n}-k\right)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} e^{-it(N^n(y-k))}\frac{N^n}{\sqrt{N}^n}\varphi(y)dy \\
&= \int_{\mathbf{R}} e^{-itN^ny}\sqrt{N}^n\varphi(y)e^{-itN^nk}dy \\
&= \sqrt{N}^n\hat{\varphi}(tN^n)e^{-itN^nk}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\langle U^nT^k\varphi, f\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\overline{\widehat{U^nT^k}\varphi(t)}\hat{f}(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\overline{\sqrt{N}^n\hat{\varphi}(tN^n)e^{-itN^nk}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\hat{\varphi}(t)dt.
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(tN^n) &= \frac{1}{\sqrt{N}}m_0(e^{-itN^{n-1}})\hat{\varphi}(tN^{n-1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}m_0(e^{-itN^{n-1}})\frac{1}{\sqrt{N}}m_0(e^{-itN^{n-2}})\hat{\varphi}(tN^{n-2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}^n}\prod_{j=0}^{n-1}m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t)
\end{aligned}$$

に注意して

$$\begin{aligned}
\langle U^nT^k\varphi, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\overline{\prod_{j=0}^{n-1}m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t)e^{-itN^nk}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\hat{\varphi}(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\overline{\prod_{j=0}^{n-1}m_0(e^{-itN^j})e^{-itN^nk}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})|\hat{\varphi}(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\prod_{j=0}^{n-1}m_0(e^{-itN^j})e^{-itN^nk}}\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(t+2l\pi)|^2dt \\
&= \langle S_0^ne_k, \mathcal{F}_\varphi(f)\rangle_{L^2(\mathbf{T})} \\
&= \langle e_k, S_0^{*n}\mathcal{F}_\varphi(f)\rangle_{L^2(\mathbf{T})}
\end{aligned}$$

となる.

最後に, 関係式 (**) を $\{S_i\}_{i=0}^{N-1}$ を用いて図示すると

$$\begin{tikzcd}
\{c_{n,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \arrow[r, "(S_0^*)"] \arrow[dr, "(S_i^*)"'] & \{c_{n+1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \arrow[r, "(S_0^*)"] \arrow[dr, "(S_i^*)"'] & \{c_{n+2,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \arrow[r, "(S_0^*)"] \arrow[dr, "(S_i^*)"'] & \cdots \\
& \{d_{n+1,k,i}\}_{k\in\mathbf{Z}} & \{d_{n+2,k,i}\}_{k\in\mathbf{Z}} & \cdots
\end{tikzcd}$$

となる.

参考文献

[BJ97a] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *A connection between multiresolution wavelet theory of scale N and representations of the Cuntz algebra $\mathcal{O}_N$*, Operator algebras and quantum field theory (Rome, 1996), Internat. Press, Cambridge, MA, 1997, pp. 151–163. MR 99j:46062

[BJ97b] ———, *Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale N*, Integral Equations Operator Theory **28** (1997), no. 4, 382–443. MR 99k:46094b

[BJ02a] Ola Bratteli and Palle Jorgensen, *Wavelets through a looking glass*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002. MR 2003i:42001

[BJ02b] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *Wavelet filters and infinite-dimensional unitary groups*, Wavelet analysis and applications (Guangzhou, 1999), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 35–65. MR 2003e:94015

[Cun77] Joachim Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), no. 2, 173–185. MR 57 #7189

[Dau92] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992. MR 93e:42045

[JK03] P. E. T. Jorgensen and D. W. Kribs, *Wavelet representations and Fock space on positive matrices*, J. Funct. Anal. **197** (2003), no. 2, 526–559. MR 1 960 424

[Mal89] Stephane G. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), no. 1, 69–87. MR 90e:42046

[Str93] Gilbert Strang, *Wavelet transforms versus Fourier transforms*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **28** (1993), no. 2, 288–305. MR 94b:42017