数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 72-84

比例的遅れを持つ積分及び微分方程式に対する選点法の超収束について

早稲田大学理工学部　室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)
Department of Mathematical Sciences, Waseda University
東京理科大学理学部　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science
Memorial University of Newfoundland　Hermann Brunner

古典的な Volterra 積分方程式に対し，区分的 $(m-1)$ 次の多項式スプライン選点法に (0,1) 区間での m 次の Gauss 点に対応する選点パラメータを用いると，反復選点解は，等分割格子点の各点で最適達成精度 $2m$ を持つことが知られている．また，定数もしくは遅れが 0 とならない変数遅れを持つ Volterra 積分方程式に対しては，制約された区間（たとえば，Baker and Derakhshan[1], Brunner[2], Brunner and Houwen[5], Hu[6] 参照）の場合に，この性質は保存される．

これに対し，比例的遅れ qt を持つ Volterra 積分方程式

$$y(t)=\int_0^t ay(s)ds+\int_0^{qt} by(s)ds+f(t), \quad t\in J:=[0,T], \qquad 0<q<1$$

については，遅れ qt が $t=0$ で消されるため，等分割格子点上でのこれらの超収束の方法をそのまま利用することはできない (Brunner[3], Ishiwata[7], Muroya *et al.*[8] 参照)．また，等分割格子点で Gauss 点を選点に取る場合も，状況は完全に違ったものになる．それでも [3] や Brunner *et al.*[4] では，最適達成精度 p^* は高々 $p^*=2m-1$ であり，遅れ $q=1/2$ のときには $p^*=2m$ を保つと予想していた．

本報告の 2 節では，等分割格子点で Gauss 点を選点に使う反復選点解の超収束の性質を解明する．上記の [3] と [4] での予想に反し，特別な遅れ $q=1/2$ に対し，$m\geq 2$ のとき，m が偶数の場合だけ $p^*=m+2$ の超収束になり，m が奇数の場合には $p^*=m+1$ にすぎないことを示す．

一方で，時間項に比例的遅れ qt を持つ pantograph 方程式

$$y'(t)=ay(t)+by(qt)+f(t), \quad y(0)=y_0, \qquad 0<q<1$$

に対しては，選点を $(0,1)$ 区間での適当な m 次選点多項式によって求めると，第一格子点 $t=h$ での達成精度が $(2m+1)$ 次になることが，$f(t)\equiv 0$ の場合は [3, 7] 及び Takama *et al.*[9] に，また，$f(t)\not\equiv 0$ の場合は [8] に示されている．

3 節では，$f(t)$ が高々 m 次の多項式の場合に対し，第一格子点 $t=h$ で最適達成精度 $2m+1$ よりさらに高い特別な超収束 $O(h^{2m+2})$ が起こる $0<q<1$ が存在する条件を具体的に調べる．最後に 4 節で Gauss 点を選点に用い，$m=2,3,4$ について，第一格子点 $t=h$ での反復選点解に関する数値実験例を示す．

1 反復選点解と超収束の予想に対する結果

比例的遅れ qt を持つ Volterra 積分方程式

$$y(t) = \int_0^t ay(s)ds + \int_0^{qt} by(s)ds + f(t), \qquad t \in J = [0,T], \qquad 0 < q < 1 \tag{1.1}$$

について，[4] の定義に沿って，(1.1) の反復選点解 $u_{it}(t)$ を求める選点法を示そう．与えられた $N \in \mathbf{N}$ に対し，$J_N : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ を与えられた区間 J に対する格子点とし，$I_n := [t_{n-1}, t_n]$, $h_n := t_n - t_{n-1}$, $1 \le n \le N$ とする．

有限次元の選点空間を

$$S_{m-1}^{(-1)}(J_N) := \{v : \ v\,|_{I_n} \in \Pi_{m-1}, \quad 1 \le n \le N\}$$

とする．ただし，$m \ge 1$ とし，Π_{m-1} は $m-1$ 次以下の多項式の集合とする．

定義 1.1 $\{t_n\} = \{t_n^{(N)}\}$ が (1.2) を満たすとき，$\{J_N\}_{N\ge 2}$ を等分割格子点の列と呼ぶ．

$$t_n = t_n^{(N)} = nh, \qquad 1 \le n \le N, \qquad h = T/N. \tag{1.2}$$

(1.3) を満足する選点解 $u \in S_{m-1}^{(-1)}(J_N)$ を見つける．

$$u_n(t) = \int_0^t au(s)ds + \int_0^{qt} bu(s)ds + f(t), \qquad t \in X_n, \quad 1 \le n \le N. \tag{1.3}$$

ここで，$u_n = u\,|_{I_n}$; $X_n = \{t_{nj} := t_{n-1} + c_j h_n,\ 0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < 1,\ 1 \le n \le N\}$ である．

$X(N) := \cup_{n=1}^N X_n$ を選点集合とし，選点は与えられた格子点 J_N と選点パラメータ $\{c_j\}_{j=1}^m$ によりすべて決まる．

格子点の区間幅 h が十分小さければ，(1.3) により，唯一の選点解 $u \in S_{m-1}^{(-1)}(J_N)$ が決まる．古典的な Volterra 積分方程式と同様に，この選点解 u は J_N によって与えられる部分区間 $I_1, I_2, \cdots, I_N$ に順次適用することで，$u_1, u_2, \cdots, u_N$ が再帰的に計算される ([5] も比較)．

選点解 u を一度計算すると，対応する反復選点解 u_{it} は

$$u_{it} := \int_0^t au(s)ds + \int_0^{qt} bu(s)ds + f(t), \qquad t \in J \tag{1.4}$$

によって計算する．以下，3 つの仮定が成り立つとする．

H_1 : $\{J_N\}_{N\ge 2}$ は等分割格子点とする．

H_2 : 選点パラメータ $\{c_j\}_{j=1}^m$ を $(0,1)$ 区間の m 次の Gauss 点 (すなわち，Legendre 多項式 $P_m(2t-1)$ の零点) にとる．

H_3 : 遅れを $q = 1/2$ とし，次数は $m \ge 2$ の偶数とする．

このとき，$t = nh$, $1 \le n \le N$ での $y(t)$ に対する $u_{it}(t)$ の超収束定理を与える．

定理 1.1 $H_1 - H_3$ が成り立つとする．(1.1) の関数 $f(t)$ は整関数である．$u \in S_{m-1}^{(-1)}(J_N)$ は (1.3) によって決められる選点解であり，u_{it} が (1.4) による反復選点解とするとき，

$$|u_{it}(nh) - y(nh)| = O(h^{m+2}), \qquad 1 \le n \le N$$

となる ($t = 0$ では常に $u_{it}(0) - y(0) = 0$ となる)．

注意 1.1 $f(t)$ が高々m次の多項式でない場合には，(1.4) の反復選点解は [2] に比べて拡張されたものとなる．[3] 及び [4] では，$m \geq 2$ のとき，等分割格子点と Gauss 点を選点に使う反復選点解は最適達成精度が $p^* = 2m$ となるという予想をしていた．実際，[3] および [4] における $m = 2$ の数値実験例で最適達成精度は $p^* = 4$ となっていた．ところが，この予想に反し，定理 1.1 では，$q = 1/2$ の場合で $m \geq 2$ のとき，反復選点解が超収束するのはmが偶数に限り，その最適達成精度は $p^* = m+2$ となることを示している．これは [4] における $m = 2$ の場合の超収束の性質を $m \geq 2$ の場合でも解明したことを意味する．なお，$q = 1/2$ で m が奇数次数の反復選点解の場合には $p^* = m+1$ になる (数値実験例 4.1 を参照).

2 定理 1.1 の証明

仮定 $H_1 - H_3$ の下で (1.3) の選点解 u が一度見つかると，対応する反復選点解 u_{it} が (1.4) によって求まる．仮定より，零でない定数 $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \cdots, \tilde{K}_N$ が $1 \leq n \leq N$ に対し，

$$u(t) = u_{it}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t} au(s)ds + \int_{qt_{n-1}}^{qt} bu(s)ds + f_{m-1}(t) + \tilde{K}_n h^m P_m(2(t - t_{n-1})/h - 1) \tag{2.1}$$

を満たす．$f_{m-1}(t)$ は $t_{n-1} \leq t \leq t_n$, $1 \leq n \leq N$ で次数m 以下の区分的多項式であり，

$$\begin{cases} f_{m-1}(t_{n-1} + c_k h) = f(t_{n-1} + c_k h), & 1 \leq k \leq m \\ f(t) = g_n(t) h^m P_m(2(t - t_{n-1})/h - 1) + f_{m-1}(t), & t_{n-1} \leq t \leq t_n, \quad 1 \leq n \leq N \end{cases} \tag{2.2}$$

により決まり，$g_n(t)$ は I_n 上で有界である．そこで，修正反復選点解 $\bar{u}_{it}$ は

$$\bar{u}_{it}(t) = u_{it}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t} au(s)ds + \int_{qt_{n-1}}^{qt} bu(s)ds + f_m(t), \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n, \quad 1 \leq n \leq N \tag{2.3}$$

により決める．ここで

$$f_m(t) = f_{m-1}(t) + K_n h^m P_m(2(t - t_{n-1})/h - 1), \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n, \quad 1 \leq n \leq N \tag{2.4}$$

であり，零でない定数 K_n は $f_m(t_{n-1}) = 0$ により求まる．仮定より，

$$\begin{cases} P_m(2t - 1) = \prod_{k=1}^{m} (t - c_k), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad |P_m(t)| \leq 1 \\ h^m P_m(2(t - t_{n-1})/h - 1) = \prod_{k=1}^{m} \{t - (t_{n-1} + c_k h)\}, \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n, \quad 1 \leq n \leq N \\ f_m(t_{n-1}) = 0, \quad f_m(t_{n-1} + c_k h) = f(t_{n-1} + c_k h), \quad 1 \leq k \leq m \\ \text{それゆえに} \quad f_m(t) - f(t) = O(h^{m+1}). \end{cases} \tag{2.5}$$

また，

$$\bar{u}_{it}(t) = u(t) + \bar{K}_n h^m P_m(2(t - t_{n-1})/h - 1), \quad t_{n-1} < t < t_n, \quad 1 \leq n \leq N \tag{2.6}$$

となり，零でない定数 $\bar{K}_n$ は $\bar{u}_{it}(t_{n-1}) = u_{it}(t_{n-1})$ により求まる．

ここで，$[t]$ は t を超えない最大整数とする．このとき，次の補題を得る．

補題 2.1 $H_1 - H_3$ を仮定する．このとき，

$$u(t) - y(t) = O(h^m), \qquad \bar{u}_{it}(t) - y(t) = O(h^{m+1}), \qquad {}^\forall t \in J \tag{2.7}$$

かつ

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\bar{u}_{it}(t) - u(t))dt = 0, \qquad \int_{qt_{n-1}}^{qt_n} (\bar{u}_{it}(t) - u(t))dt = 0, \qquad 1 \le n \le N. \tag{2.8}$$

さらに次が成り立つ．

$$u_{it}(t_n) - y(t_n) = O(h^{m+2}), \qquad 1 \le n \le N. \tag{2.9}$$

(証明) ${}^\forall t \in J$ に対して，$u(t) - y(t) = O(h^m)$ が成り立つ（たとえば，Brunner [2] 参照）．(1.1) と (2.2)-(2.4) によって，

$$\begin{cases} \bar{u}_{it}(t) - y(t) = \displaystyle\int_0^t a(u(s) - y(s))ds + \int_0^{qt} b(u(s) - y(s))ds \\ \qquad\qquad + (-g_1(t) + K_1)h^m P_m(2t/h - 1), \qquad 0 \le t \le t_1, \\ \bar{u}_{it}(t) - y(t) = (u_{it}(t_{n-1}) - y(t_{n-1})) + \displaystyle\int_{t_{n-1}}^t a(u(s) - y(s))ds \\ \qquad + \displaystyle\int_{qt_{n-1}}^{qt} b(u(s) - y(s))ds + (-g_n(t) + K_n)h^m P_m(2(t - t_{n-1})/h - 1), \\ \qquad\qquad t_{n-1} \le t \le t_n, \qquad 2 \le n \le N. \end{cases} \tag{2.10}$$

$u_{it}(0) = f(0) = y(0)$ かつ $\bar{u}_{it}(t_{n-1}) = u_{it}(t_{n-1})$，$1 \le n \le N$ なので，$-g_n(t_{n-1}) + K_n = 0$ となる．よって，

$$-g_n(t) + K_n = O(h), \qquad t_{n-1} \le t \le t_n, \quad 1 \le n \le N. \tag{2.11}$$

(2.10) より，最初に $\bar{u}_{it}(t) - y(t) = O(h^{m+1})$，$0 \le t \le t_1 = h$ を得る．一方で，(2.6) より，

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\bar{u}_{it}(t) - u(t))dt &= \bar{K}_n h^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_m(2(t - t_{n-1})/h - 1)dt \\ &= \bar{K}_n \frac{h^{m+1}}{2} \int_{-1}^1 P_m(x)dx = 0, \qquad 1 \le n \le N, \end{aligned}$$

また，仮定 $H_1 - H_3$ より，$1 \le n \le N$ に対し，

$$\begin{aligned} \int_{qt_{n-1}}^{qt_n} (\bar{u}_{it}(t) - u(t))dt &= \bar{K}_n h^m \int_{qt_{n-1}}^{qt_n} P_m(2(t - t_{[q(n-1)]})/h - 1)dt \\ &= \begin{cases} \bar{K}_n \dfrac{h^{m+1}}{2} \displaystyle\int_{-1}^0 P_m(x)dx = 0, & n \text{ が奇数} \\ \bar{K}_n \dfrac{h^{m+1}}{2} \displaystyle\int_0^1 P_m(x)dx = 0, & n \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

により (2.8) が示される．

ゆえに，$n=1$ での (1.1), (1.4), (2.8) と $0 \le t \le h$ に対する (2.7) から，

$$\begin{aligned} u_{it}(h) - y(h) &= \int_0^h a(u(s) - y(s))ds + \int_0^{qh} b(u(s) - y(s))ds \\ &= \int_0^h a(\bar{u}_{it}(s) - y(s))ds + \int_0^{qh} b(\bar{u}_{it}(s) - y(s))ds = O(h^{m+2}) \end{aligned}$$

は$n=1$ に対する (2.9) が成り立つことを示している．それゆえに (2.10) より，$t_1 = h \le t \le t_2 = 2h$ に対する (2.7) の 2 番目の式を得る．

ある $1 \le n \le N-1$ に対して，$u_{it}(t_{n-1}) - y(t_{n-1}) = O(h^{m+2})$ が成り立つと仮定する．このとき，(2.7) の最初の方程式と (2.10)，(2.11) より，$t_{n-1} \le t \le t_n$ に対する (2.7) の 2 番目の方程式を得る．ゆえに，$t_{n-1} \le t \le t_n$ に対する (1.1), (1.4), (2.8) と (2.7) から，

$$\begin{aligned} u_{it}(t_n) - y(t_n) &= (u_{it}(t_{n-1}) - y(t_{n-1})) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} a(u(s) - y(s))ds + \int_{qt_{n-1}}^{qt_n} b(u(s) - y(s))ds \\ &= (u_{it}(t_{n-1}) - y(t_{n-1})) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} a(\bar{u}_{it}(s) - y(s))ds + \int_{qt_{n-1}}^{qt_n} b(\bar{u}_{it}(s) - y(s))ds \\ &= (u_{it}(t_{n-1}) - y(t_{n-1})) + O(h^{m+2}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

を得る．一方で，仮定 $H_1 - H_3$ と (2.6) により，(2.12) と同様にして，$1 \le n \le [N/4]$ に対して，

$$\begin{aligned} &u_{it}(t_{4n}) - y(t_{4n}) \\ &\quad = (u_{it}(t_{4(n-1)}) - y(t_{4(n-1)})) + \int_{t_{4(n-1)}}^{t_{4n}} a(\bar{u}_{it}(s) - y(s))ds + \int_{t_{4q(n-1)}}^{t_{4qn}} b(\bar{u}_{it}(s) - y(s))ds, \end{aligned} \tag{2.13}$$

また，(2.10) と (2.6) より，

$$\begin{aligned} \bar{u}_{it}(s) - y(s) &= (u_{it}(t_{4(n-1)+j}) - y(t_{4(n-1)+j})) \\ &+ \int_{t_{4(n-1)+j}}^{s} a\{(\bar{u}_{it}(\tau) - y(\tau)) - \bar{K}_{4(n-1)+(j+1)} h^m P_m(2(\tau - t_{4(n-1)+j})/h - 1)\} d\tau \\ &+ \int_{t_{4q(n-1)}+qjh}^{qs} b\{(\bar{u}_{it}(\tau) - y(\tau)) - \bar{K}_{4q(n-1)+([qj]+1)} h^m P_m(2(\tau - t_{4q(n-1)+[qj]})/h - 1)\} d\tau \\ &+(-g_{4(n-1)+(j+1)}(s) + K_{4(n-1)+(j+1)}) h^m P_m(2(s - t_{4(n-1)+j})/h - 1), \\ &\qquad t_{4(n-1)+j} \le s \le t_{4(n-1)+(j+1)}, \quad 2 \le n \le [N/4], \quad 0 \le j \le 3 \end{aligned} \tag{2.14}$$

かつ

$$\begin{aligned} \bar{u}_{it}(s) - y(s) &= (u_{it}(t_{4q(n-1)+j}) - y(t_{4q(n-1)+j})) \\ &+ \int_{t_{4q(n-1)+j}}^{s} a\{(\bar{u}_{it}(\tau) - y(\tau)) - \bar{K}_{4q(n-1)+(j+1)} h^m P_m(2(\tau - t_{4q(n-1)+j})/h - 1)\} d\tau \\ &+ \int_{t_{4q^2(n-1)}+qjh}^{qs} b\{(\bar{u}_{it}(\tau) - y(\tau)) - \bar{K}_{4q^2(n-1)+([qj]+1)} h^m P_m(2(\tau - t_{4q^2(n-1)+[qj]})/h - 1)\} d\tau \\ &+(-g_{4q(n-1)+(j+1)}(s) + K_{4q(n-1)+(j+1)}) h^m P_m(2(s - t_{4q(n-1)+j})/h - 1), \\ &\qquad t_{4q(n-1)+j} \le s \le t_{4q(n-1)+(j+1)}, \quad 2 \le n \le [N/4], \quad 0 \le j \le 1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

を得る.

$$
\begin{cases}
\int_{-1}^{1} x^j P_m(x)dx = 0, \qquad 0 \le j \le m-1, \\
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x} P_m(\sigma)d\sigma dx = [x\int_{-1}^{x} P_m(\sigma)d\sigma]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} xP_m(x)dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{任意の } m \ge 2 \text{ に対して}) \\
\int_{-1}^{0} P_m(x)dx = \int_{0}^{1} P_m(x)dx = 0 \quad (\text{任意の } m \ge 2 \text{ の偶数に対して})
\end{cases}
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{4(n-1)+j}}^{t_{4(n-1)+(j+1)}} \int_{t_{4(n-1)+j}}^{s} P_m(2(\tau - t_{4(n-1)+j})/h - 1)d\tau ds \\
&\qquad = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{s} P_m(\sigma)d\sigma dx = 0, \qquad 0 \le j \le 3, \\
&\int_{t_{2(n-1)}+[j/2]h}^{t_{2(n-1)}+jh/2} P_m(2(\tau - (t_{2(n-1)} + [j/2]h))/h - 1)d\tau ds \\
&\qquad = \begin{cases} \frac{h}{2}\int_{0}^{1} P_m(x)dx = 0, & j = 0, 2, \\ \frac{h}{2}\int_{-1}^{0} P_m(x)dx = 0, & j = 1, 3, \end{cases}
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{3}\int_{t_{4(n-1)+j}}^{t_{4(n-1)+(j+1)}} \int_{t_{4q(n-1)+j}}^{qs} P_m(2(\tau - t_{4q(n-1)+[qj]})/h - 1)d\tau ds \\
&= \sum_{j=0}^{3} 2\int_{t_{2(n-1)}+jh/2}^{t_{2(n-1)}+(j+1)h/2} \int_{t_{2(n-1)}+jh/2}^{\tilde{s}} P_m(2(\tau - t_{2(n-1)+[j/2]})/h - 1)d\tau d\tilde{s} \\
&= \sum_{j=0}^{3} 2\int_{t_{2(n-1)}+jh/2}^{t_{2(n-1)}+(j+1)h/2} \int_{t_{2(n-1)}+[j/2]h}^{\tilde{s}} P_m(2(\tau - t_{2(n-1)+[j/2]})/h - 1)d\tau d\tilde{s} \\
&= \sum_{k=0}^{1} 2\int_{t_{2(n-1)+k}}^{t_{2(n-1)+(k+1)}} \int_{t_{2(n-1)+k}}^{\tilde{s}} P_m(2(\tau - t_{2(n-1)+k})/h - 1)d\tau d\tilde{s} \\
&= h\sum_{k=0}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x} P_m(\sigma)d\sigma dx = 0
\end{aligned}
$$

で, (2.16) より,

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{4(n-1)+j}}^{t_{4(n-1)+(j+1)}} (-g_{4(n-1)+(j+1)}(s) + K_{4(n-1)+(j+1)})h^m P_m(2(s - t_{4(n-1)+j})/h - 1)ds \\
&\qquad = \frac{h^{m+1}}{2}\int_{-1}^{1} G_j(x)P_m(x)dx = O(h^{2m+1}), \qquad 0 \le j \le 3.
\end{aligned}
$$

ここで

$$\begin{cases} G_j(x) = -g_{4(n-1)+(j+1)}(t_{4(n-1)+j} + \frac{h}{2}(x+1)) + K_{4(n-1)+(j+1)}, \\ G_j^{(k)}(x) = -(\frac{h}{2})^k g^{(k)}_{4(n-1)+(j+1)}(t_{4(n-1)+j} + \frac{h}{2}(x+1)), \qquad k \geq 1, \quad 0 \leq j \leq 3. \end{cases}$$

同様に

$$\int_{t_{4q(n-1)+j}}^{t_{4q(n-1)+(j+1)}} \int_{t_{4q(n-1)+j}}^{s} P_m(2(\tau - t_{4q(n-1)+j})/h - 1) d\tau ds$$
$$= \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{s} P_m(\sigma) d\sigma dx = 0, \quad 0 \leq j \leq 1,$$

$$\sum_{j=0}^{1} \int_{t_{4q(n-1)+j}}^{t_{4q(n-1)+(j+1)}} \int_{t_{4q^2(n-1)}+qjh}^{qs} P_m(2(\tau - t_{4q^2(n-1)+[qj]})/h - 1) d\tau ds$$
$$= \sum_{j=0}^{1} 2 \int_{t_{n-1}+jh/2}^{t_{n-1}+(j+1)h/2} \int_{t_{n-1}+jh/2}^{\tilde{s}} P_m(2(\tau - t_{n-1+[j/2]})/h - 1) d\tau d\tilde{s}$$
$$= \sum_{j=0}^{1} 2 \int_{t_{n-1}+jh/2}^{t_{n-1}+(j+1)h/2} \int_{t_{n-1}+[j/2]h}^{\tilde{s}} P_m(2(\tau - t_{n-1+[j/2]})/h - 1) d\tau d\tilde{s}$$
$$= 2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^{\tilde{s}} P_m(2(\tau - t_{2(n-1)})/h - 1) d\tau d\tilde{s} = h \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{x} P_m(\sigma) d\sigma dx = 0,$$

かつ，(2.16) より，

$$\int_{t_{4q(n-1)+j}}^{t_{4q(n-1)+(j+1)}} (-g_{4q(n-1)+(j+1)}(s) + K_{4q(n-1)+(j+1)}) h^m P_m(2(s - t_{4q(n-1)+j})/h - 1) ds$$
$$= \frac{h^{m+1}}{2} \int_{-1}^{1} \bar{G}_j(x) P_m(x) dx = O(h^{2m+1}), \quad 0 \leq j \leq 1$$

となる．ここで，

$$\begin{cases} \bar{G}_j(x) = -g_{2(n-1)+(j+1)}(t_{2(n-1)+j} + \frac{h}{2}(x+1)) + K_{2(n-1)+(j+1)}, \\ \bar{G}_j^{(k)}(x) = -\left(\frac{h}{2}\right)^k g^{(k)}_{2(n-1)+(j+1)}(t_{2(n-1)+j} + \frac{h}{2}(x+1)), \qquad k \geq 1, \quad 0 \leq j \leq 1. \end{cases}$$

それゆえに，(2.13)-(2.15) から，$2 \leq n \leq [N/4]$ に対して，

$$u_{it}(t_{4n}) - y(t_{4n}) = (u_{it}(t_{4(n-1)}) - y(t_{4(n-1)})) + ah \sum_{j=0}^{3} (u_{it}(t_{4(n-1)+j}) - y(t_{4(n-1)+j})) + O(h^{m+3})$$

を得る．ゆえに (2.12) より，$u_{it}(t_{4(n-1)+j}) - y(t_{4(n-1)+j}) = O(h^{m+2})$, $0 \leq j \leq 3$ となる．また，(2.12) と上式より，帰納法で簡単に補題 2.1 の結論を得る． □

補題 2.1 より，定理 1.1 を得る．

3 比例的遅れを持つ微分方程式に対する特別な超収束

比例的遅れ qt を持つ微分方程式

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(qt) + f(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

の解を $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n t^n$ とする．ここで，$0 < q < 1$, y_0, a, b は複素数で $f(t)$ は整関数である．

[3] の定義より，(3.1) の選点解 $v(t)$ を求める選点法を説明する．

$$\begin{cases} v'(c_k h) = av(c_k h) + bv(qc_k h) + f(c_k h), & k = 1, 2, \cdots, m \\ v(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

を満たす m 次多項式 $v(t) \in [0, h]$ を求める．ここで $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < 1$ である．

選点パラメータ $\{c_k\}_{k=1}^m$ は m 次の選点多項式 $M_m(t) = K \prod_{k=1}^{m}(t - c_k)$ の m 個の零点として決められる．ここで，K は 0 でない定数である．そこで選点解 $v(t)$ は

$$\begin{cases} v'(t) = av(t) + bv(qt) + \bar{f}_{m-1}(t) + K_0 M_m(t), & t \in [0, h] \\ v(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

を満たす．ここで，$\bar{f}_{m-1}(t)$ は $m-1$ 次以下の多項式であり，ある解析関数 $p(t)$ を用いて，

$$f(t) = p(t) M_m(t) + \bar{f}_{m-1}(t), \quad t \in [0, h] \tag{3.4}$$

と表せる．

以下，本節では，(3.1) の $f(t)$ が m 次以下の多項式の場合で，特別な超収束 $|v(h) - y(h)| = O(h^{2m+2})$ が起こる $0 < q < 1$ が存在する条件を調べる．まず，$|v(h) - y(h)| = O(h^{2m+1})$ を満たす選点多項式とその構成法に関し，[9] の Theorem 2.5 の結果を一般化する ([7] の Theorem 2.3 も参照).

次の補題は [8] の Lemma 2.5 の特別な場合である．

補題 3.1 $f(t)$ は m 次以下の多項式と仮定し，

$$\{\prod_{j=0}^{m}(a + b^j)\}\delta_0 + \{\prod_{j=1}^{m}(a + b^j)\}f_0 + \{\prod_{j=2}^{m}(a + b^j)\}f_1 + \cdots + (a + b^m) f_{m-1} + f_m = 0 \tag{3.5}$$

を満たす定数 δ_0 が存在すると仮定する．ただし，$f(t) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f_n}{n!} t^n$ である．このとき，$f(t)$ の次数と同じ多項式 $y_f(t)$ が存在し，

$$\begin{cases} y_f'(t) = ay_f(t) + by_f(qt) + f(t), & 0 < t \leq h \\ y_f(0) = \delta_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

を満たす．また，$z(t)=y(t)-y_f(t)$ に対し，

$$\begin{cases} z'(t)=az(t)+bz(qt), & 0<t\le h \\ z(0)=y(0)-\delta_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

を得る．(3.1) と (3.7) に対する選点解 $v(t)$ と $w(t)$ はそれぞれ同じ選点多項式 $M_m(t)$ から導かれ，

$$v(t)=w(t)+y_f(t), \qquad 0\le t\le h \tag{3.8}$$

となる．よって，

$$v(t)-y(t)=w(t)-z(t), \qquad 0\le t\le h. \tag{3.9}$$

特に，(3.5) で $\delta_0=y(0)$ となる必要十分条件は $\psi_{m+1}=0$ である．この場合，$z(t)=w(t)\equiv 0$ と $y(t)=v(t)=y_f(t)$ が成り立つ．

(証明) $y_f(t)=\sum_{n=0}^{m}\frac{\delta_n}{n!}t^n$，$f(t)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f_n}{n!}t^n$ と

$$\begin{cases} \delta_1=(a+1)\delta_0+f_0, \\ \delta_2=(a+b)\delta_1+f_1, \\ \qquad\vdots \\ \delta_m=(a+b^{m-1})\delta_{m-1}+f_{m-1} \end{cases}$$

とおくと (3.5) より，

$$(a+b^m)\delta_m+f_m=0$$

であり，$y_f(t)$ は (3.6) の $f(t)$ と同じ次数の多項式で (3.7), (3.8), (3.9) を得る． □

注意 3.1 補題 3.1 の条件のもとで，$w(h)$ は $z(h)$ に対する (m,m)-Padé 近似になる ([7] の Theorem 2.3 も参照)．$f(t)$ が定数関数でないならば，$v(h)=w(h)+y_f(h)$ は $y(h)$ に対する (m,m)-Padé 近似にはならないが，$y(h)$ に対する $(2m,m)$-有理関数近似になる．

[8] の Theorem 2.2 と補題 3.1 から，次の補題を得る ([7] 参照)．

補題 3.2 $f(t)$ は m 次以下の多項式とし，

$$\psi_{m+1}=0 \quad \text{または} \quad \sum_{k=0}^{m}\gamma_{k,n}=0, \qquad n=1,2,\cdots,m \tag{3.10}$$

を仮定する．ここで，(3.1) の m 次選点多項式 $M_m(t)=\sum_{n=0}^{m}\frac{M_n}{n!}t^n$ に対し，

$$\gamma_{k,n}=\{\prod_{j=1}^{n-1}(a+bq^{k+j})\}\frac{M_k}{(k+n)!}, \qquad k=0,1,2,\cdots,m, \quad n=1,2,\cdots,m.$$

このとき，選点多項式 $M_m(t)$ から導かれる (3.1) に対する選点解 $v(t)$ に対して，$v(h)=P_{m,m}(h)+y_f(h)$ かつ $|v(h)-y(h)|=O(h^{2m+1})$ が成り立つ．ただし，$P_{m,m}(h)$ は $z(h)$ に対する (m,m)-Padé 近似であり，$y_f(t)$ と $z(t)$ は補題 3.1 の (3.6) と (3.7) により定義される．

注意 3.2 補題 3.2 での $\psi_{m+1}=0$ は，補題 3.1 より $y(t)=y_f(t)$ を意味する．また $v(t)=y_f(t)$ は任意の選点多項式 $M_m(t)$ に対して (3.3) を満たす．(3.10) で $\psi_{m+1}\neq 0$ ならば，

$$M_{m,n}(t)=\sum_{k=0}^{m}\gamma_{k,n}t^{k+n}, \qquad n=1,2,\cdots,m$$

は次の方程式を満たす．

$$\begin{cases} M_{m,1}(t)=\int_0^t M_m(x)dx \\ M_{m,n}(t)=\int_0^t aM_{m,n-1}(x)dx+\int_0^1 M_{m,n-1}(qx)dx, \qquad n=2,3,\cdots,m. \end{cases}$$

また，[8] の (2.14) は次のように表される．

$$M_{m,n}(1)=0, \qquad n=1,2,\cdots,m.$$

よって，[8] の Theorem 2.2 と補題 3.2 は [3] の Theorem 3.3，[7] と [9] の Theorem 2.3 の拡張になっている．

補題 3.1-3.2 で

$$z(h)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\psi}_n h^n, \qquad \bar{\psi}_0=y(0)-\delta \tag{3.11}$$

とするとき，特別な超収束 $|v(h)-y(h)|=O(h^{2m+2})$ が起こる $0<q<1$ が存在する条件についての定理を得る．

定理 3.1 $f(t)$ は m 次以下の多項式と仮定する．任意の $0<q<1$ に対して，(3.10) と (3.11) が成り立つとすると，$v(h)=P_{m,m}(h)+y_f(h)$ と $|v(h)-y(h)|=O(h^{2m+1})$ が成り立つ．ここで，

$$P_{m,m}(h)=\frac{\Gamma_0+\Gamma_1 h+\cdots+\Gamma_m h^m}{\Lambda_0+\Lambda_1 h+\cdots+\Lambda_m h^m}$$

は $z(h)$ に対する (m,m)-Padé 近似であり，$y_f(t)$ と $z(t)$ は補題 3.1 の (3.6) と (3.7) で定義される．さらに，特別な超収束 $|v(h)-y(h)|=O(h^{2m+2})$ が起こる $0<q<1$ が存在する必要十分条件は，

$$\Lambda_0\bar{\psi}_{2m+1}+\Lambda_1\bar{\psi}_{2m}+\cdots+\Lambda_m\bar{\psi}_{m+1}=0 \tag{3.12}$$

を満たす $0<q<1$ が存在することである．

定理 3.1 の条件 (3.12) は $z(t)$ の (m,m)-Padé 近似 $P_{m,m}(t)$ に対し，特別な超収束 $|P_{m,m}(h)-z(h)|=O(h^{2m+2})$ が起こることを意味している．また，$m=2$ のとき，特別な超収束 $|v(h)-y(h)|=O(h^6)$ が起こる $0<q<1$ の全個数について，次の定理を得る．

定理 3.2 $a<0$ かつ $m=2$ に対し，定理 3.1 の条件を仮定する．このとき，(3.12) は固定した $a<0$ に対し，

$$\begin{aligned} F(q,b)\equiv\ & 6(a+bq^4)(a+bq^3)(a+3bq-2bq^2)-15(a+bq^2)(a+bq^3)(a+2bq-bq^3) \\ & +10(a+bq)(a+bq^2)(a-3bq^3+4bq^2)=0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

と同等であり，各 b に対し，$F(q,b)=0$ の根 $0<q<1$ の個数が，特別な超収束 $|v(t)-y(t)|=O(h^6)$ が起こる $0<q<1$ の全個数となる．

注意 3.3 定理 3.2 で

$$F(0,b)=a^3,\quad F(1,b)=(a+b)^3,\quad F_q(0,b)=-2a^2b,\quad F_q(1,b)=-4b(a+b)^2 \tag{3.14}$$

となるので，特別な超収束 $|v(t)-y(t)|=O(h^6)$ が起こる $0<q<1$ の全個数 r は，ある小さい $\varepsilon>0$ に対し，

$$r=\begin{cases}1, & b\geq -a,\\ 2, & \hat{b}^{+}+\varepsilon<b<-a,\\ 1, & b=\hat{b}^{+},\\ 0, & \hat{b}^{-}+\varepsilon<b<\hat{b}^{+}-\varepsilon,\\ 1, & b=\hat{b}^{-},\\ 2, & b<\hat{b}^{-}-\varepsilon\end{cases} \tag{3.15}$$

となる．ここで，定数 $\hat{b}^{-}$ と $\hat{b}^{+}$ は

$$F(q,b)=F_q(q,b)=0 \tag{3.16}$$

の 2 組の解 $(\hat{q}^{-},\hat{b}^{-})$ と $(\hat{q}^{+},\hat{b}^{+})$ で定まり，$0<\hat{q}^{-},\hat{q}^{+}<1$ かつ $\hat{b}^{-}<0<\hat{b}^{+}<-a$ である．

また，[8] の定理 2.2 の $\bar{Q}_{2m,m}(h)$ に対して，

$$\bar{Q}_{2m,m}(h)=\frac{\Gamma_0+\Gamma_1h+\cdots+\Gamma_{2m}h^{2m}}{\Lambda_0+\Lambda_1h+\cdots+\Lambda_mh^m},\qquad y(h)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_nh^n \tag{3.17}$$

とおくと，次の定理を得る．

定理 3.3 任意の $0<q<1$ に対し，[8] の定理 2.2 の (2.14) が成り立つとき，

$$v(h)=\bar{Q}_{2m,m}(h)+O(h^{2m+1})\quad \text{かつ}\quad |\bar{Q}_{2m,m}(h)-y(h)|=O(h^{2m+1}) \tag{3.18}$$

となる．さらに，特別な超収束 $|\bar{Q}_{2m,m}(h)-y(h)|=O(h^{2m+2})$ が起こる $0<q<1$ が存在する必要十分条件は

$$\Lambda_0\psi_{2m+1}+\Lambda_1\psi_{2m}+\cdots+\Lambda_m\psi_{m+1}=0 \tag{3.19}$$

を満たす $0<q<1$ が存在することである．

定理 3.3 での条件 (3.19) は $y(t)$ の $(2m,m)$-次有理関数近似 $\bar{Q}_{2m,m}(t)$ に対し，特別な超収束 $|\bar{Q}_{2m,m}(h)-y(h)|=O(h^{2m+2})$ が起こることを意味する．

4 数値実験例

ここで，数値実験例を示そう．

例 4.1 遅れ qt を持つ Volterra 積分方程式

$$y(t)=-\int_0^t y(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^{qt}y(s)ds+f(t),\qquad t\in[0,T] \tag{4.1}$$

に対し，$f(t)=(1+e^{-qt})/2$ とするとき，真の解は $y(t)=e^{-t}$ である．(4.1) を等分割格子点での Gauss 点を選点に使い，$m=2,3,4$ に対する反復選点法 (1.4) によって計算した．比較のために，遅れ q を $q=1,\ 0.8,\ 0.6,\ 0.5,\ 0.4, 0.2$ の場合とし，$h=2^{-n}$, $n=1,2,\cdots,6$ に対する第一格子点 $t=h$ における誤差 $e(h)=u_{it}(h)-y(h)$ を表 4.1 に示している．

定理 1.1 において，偶数 $m\geq 2$ で $q=1/2$ のとき，最適達成精度 $p^*=m+2$ を持つことを証明した．表 4.1 では第一格子点 $t_1=h$ でも，$q=1/2$ で $m=2,4$ のときに確かに $p^*=m+2$ を保っているが，$m=3$ のときは $p^*=m+1$ にしかならない（なお，表 4.1 では $q=1$ の場合は $p^*=2m+1$ であり，$q\neq 1,1/2$ の場合は $p^*=m+1$ となっていることに注意せよ)．

ここで，$2^{-3}=0.125$, $2^{-4}=0.0625$, $2^{-5}=0.03125$, $2^{-6}=0.015625$, $2^{-7}=0.0078125$, $2^{-8}=0.00390625$, $2^{-9}=0.001953125$ である．

表 4.1 $m=2,3,4$ **のときの各** q **に対する誤差** $e(h)$, $h=2^{-n}$, $n=1,2,\cdots,6$

m		2		3		4	
q	n	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(2h)}$
1	1	2.50284965E-06		2.1749E-09		1.08..E-12	
	2	9.38634.E-08	0.03750..	2.04..E-11	0.00938..	*	0.002343..
	3	3.2174..E-09	0.03427..	1.7..E-13	0.00857..	*	*
	4	1.053..E-10	0.03273..	*	*	*	*
	5	3.3..E-12	0.03198..	*	*	*	*
	6	1.0..E-13	0.03159..	*	*	*	*
0.8	1	4.137408851E-04		7.7484842E-06		5.31285..E-08	
	2	5.68620917.E-05	0.1374..	5.044674.E-07	0.06510..	2.4197..E-09	0.04554..
	3	7.4520136..E-06	0.1310..	3.20761..E-08	0.06358..	8.94..E-11	0.03694..
	4	9.537711..E-07	0.1279..	2.0202..E-09	0.06298..	3.0..E-12	0.03384..
	5	1.206375..E-07	0.1264..	1.267..E-10	0.06272..	9.0..E-14	0.03250..
	6	1.51689..E-08	0.1257..	7.9..E-12	0.06261..	3...E-15	0.03386..
0.6	1	2.989795045E-04		7.5214656E-06		2.584673..E-07	
	2	3.52231356.E-05	0.1178..	6.131556.E-07	0.08152..	8.8196..E-09	0.03412..
	3	4.1874574..E-06	0.1188..	4.33736..E-08	0.07073..	2.864..E-10	0.03247..
	4	5.069603..E-07	0.1210..	2.8781..E-09	0.06635..	9.1..E-12	0.03180..
	5	6.22383..E-08	0.1227..	1.852..E-10	0.06436..	2.8..E-13	0.03152..
	6	7.7057..E-09	0.1238..	1.17..E-11	0.06341..	9...E-15	0.03169..
0.5	1	1.422499420E-04		1.14844116E-05		5.80675..E-08	
	2	1.04452548.E-05	0.07342..	8.619737.E-07	0.07505..	1.08599..E-09	0.01870..
	3	7.080580..E-07	0.06778..	5.86593..E-08	0.06805..	1.85..E-11	0.01706..
	4	4.60939..E-08	0.06509..	3.8190..E-09	0.06510..	3.0..E-13	0.01631..
	5	2.9402..E-09	0.06378..	2.435..E-10	0.06376..	5...E-15	0.01615..
	6	1.856..E-10	0.06314..	1.53..E-11	0.06312..	*	*
0.4	1	2.79472627E-05		1.03392957E-05		1.781360..E-07	
	2	1.53655536E-05	0.5498..	7.224393.E-07	0.06987..	7.3311..E-09	0.04115..
	3	2.8430374.E-06	0.1850..	4.71828..E-08	0.06531..	2.611..E-10	0.03562..
	4	4.194978..E-07	0.1475..	3.0038..E-09	0.06366..	8.7..E-12	0.03331..
	5	5.66611..E-08	0.1350..	1.892..E-10	0.06301..	2.8..E-13	0.03224..
	6	7.3536..E-09	0.1297..	1.18..E-11	0.06274..	9...E-15	0.03126..
0.2	1	2.406769235E-04		2.9576197E-06		1.305976..E-07	
	2	4.45367946.E-05	0.1850..	3.184560.E-07	0.1076..	3.9328..E-09	0.03011..
	3	6.6310935..E-06	0.1488..	2.55924..E-08	0.08036..	1.1596..E-10	0.02947..
	4	9.008351..E-07	0.1358..	1.8062..E-09	0.07057..	3.4..E-12	0.02989..
	5	1.172775..E-07	0.1301..	1.198..E-10	0.06635..	1.0..E-13	0.03040..
	6	1.49573..E-08	0.1275..	7.71..E-12	0.06438..	3...E-15	0.03055..

この結果，$m \geq 2$ で奇数である $m = 3$ の場合で $q = 1/2$ のときは，等分割格子点での $p^* = m + 2$ は保証されないことがわかる．

参考文献

[1] Baker, C.T.H. and Derakhshan, M. S., Convergence and stability of quadrature methods applied to Volterra equations with delay, *IMA J. Numer. Anal.* **13**, 67-91 (1993).

[2] Brunner, H., Iterated collocation methods for Volterra integral equations with delay arguments, *Math. Comput.* **62**, 581-599 (1994).

[3] Brunner, H., On the discretization of differential and Volterra integral equations with variable delay, *BIT* **37**, 1-12 (1997).

[4] Brunner, H., Hu, Q. and Lin, Q., Geometric meshes in collocation methods for Vorterra integral equations with proportional delays, *IMA J. Numer. Anal.* **21**, 783-798 (2001).

[5] Brunner, H. and Van Der Houwen, P.J., The Numerical Solution of Volterra Equations, *CWI monographs*, **3**, Amsterdam: North-Holland (1986).

[6] Hu, Q., Multilevel correction for discrete collocation solutions of Volterra integral equations with delay arguments, *Appl. Numer. Math.* **31**, 159-171 (1999).

[7] Ishiwata, E., On the attainable order of collocation methods for the neutral functional-differential equations with proportional delays, *Computing* **64**, 207-222 (2000).

[8] Muroya, Y., Ishiwata, E. and Brunner, H., On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **152**, 347-366 (2003).

[9] Takama, N., Muroya, Y. and Ishiwata, E., On the attainable order of collocation methods for delay differential equations with proportional delay, *BIT* **40**, 374-394 (2000).