数理解析研究所講究録 1400 巻 2004 年 157-169

反自己双対 Yang-Mills 方程式と Painlevé II 方程式の特殊函数解

神戸大学大学院 自然科学研究科 増田 哲 (Tetsu Masuda)

1 はじめに

反自己双対 Yang-Mills 方程式 (ASDYM 方程式) は,

$$\begin{aligned}&\partial_z A_w-\partial_w A_z+[A_z,A_w]=0,\\&\partial_{\tilde{z}}A_{\tilde{w}}-\partial_{\tilde{w}}A_{\tilde{z}}+[A_{\tilde{z}},A_{\tilde{w}}]=0,\\&\partial_z A_{\tilde{z}}-\partial_{\tilde{z}}A_z-\partial_w A_{\tilde{w}}+\partial_{\tilde{w}}A_w+[A_z,A_{\tilde{z}}]-[A_w,A_{\tilde{w}}]=0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

で与えられる. ここで, 各ゲージポテンシャル $A_*=A_*(z,w,\tilde{z},\tilde{w})$ は, $\mathrm{tr}A_*=0$ なる 2×2 行列すなわち $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に値をとる函数である. 線形作用素 L_1,L_2 を

$$\begin{aligned}L_1&=D_{\tilde{w}}-\zeta D_z=\partial_{\tilde{w}}-\zeta\partial_z+A_{\tilde{w}}-\zeta A_z,\\L_2&=D_{\tilde{z}}-\zeta D_w=\partial_{\tilde{z}}-\zeta\partial_w+A_{\tilde{z}}-\zeta A_w,\end{aligned}\tag{1.2}$$

と定義すると, ASDYM 方程式 (1.1) は, 波動函数 $\Psi=\Psi(z,w,\tilde{z},\tilde{w};\zeta)$ に対する線形方程式系

$$L_i\Psi=0,\quad (i=1,2)\tag{1.3}$$

の両立条件 $[L_1,L_2]=0$ として得られる.

元来は, 素粒子の相互作用を担うゲージ場を記述する Yang-Mills 方程式を特殊化したものであり, その場合は物理的要請からゲージポテンシャルは $\mathfrak{su}(2)$ または $\mathfrak{su}(N)$ に値をとる. また, 独立変数 $z,\tilde{z}$ および $w,\tilde{w}$ も互いに複素共役であったりするのだが, 以下ではこうした元々の由来は忘れて, 複素 4 変数の偏微分方程式だと考える.

ASDYM 方程式が可積分系において重要な対象である理由は, これが本質的に高次元系であるということに加え, KdV 方程式をはじめ多くの可積分方程式が, ASDYM 方程式からの簡約として得られる, という事実にある. Painlevé 方程式も例外ではない. しかしながら, こうした種々の可積分方程式との対応を特殊解のレベルで論じた研究は, これまでほとんどなかった.

可積分系研究の歴史を振り返ると, 特殊解についての知見を積み上げることで背後にある代数的・幾何学的構造の解明に至る, という状況がしばしば起こっている. そんな大袈裟なことをいわなくとも, 可積分系の研究である以上, 特殊解, それも τ-函数のレベルでの議論は不可欠であろう.

本研究の大元の動機は, Painlevé 方程式と ASDYM 方程式の対応を特殊解を通じて議論することで, 前者のアフィンワイル群対称性が後者の対称性の離散部分群としてどのように含まれているか, あるいは不変因子・多項式 Hamiltonian といった Painlevé 方程式にとって重要な量の幾何学的由来は何であるかを明らかにしたい, というものである.

このような目標からすれば, 現段階での到達は甚だ初歩的ではあるが, さしあたっての現状報告をするものである. 本稿では, Painlevé II 方程式の特殊函数解について考察する.

2 Yangの方程式と行列式解

本節では，ASDYM方程式と等価なYangの方程式 [11] を導出し，そのBäcklund変換と行列式で表される特殊解 [1, 2] について述べる．

ASDYM 方程式 (1.1) の第一・二式より，ゲージポテンシャルは2つの行列値函数 $H, \tilde{H}$ を用いて，

$$A_{\tilde{z}} = -\partial_{\tilde{z}}\tilde{H}\tilde{H}^{-1}, \quad A_{\tilde{w}} = -\partial_{\tilde{w}}\tilde{H}\tilde{H}^{-1}, \quad A_z = -\partial_z HH^{-1}, \quad A_w = -\partial_w HH^{-1}, \tag{2.1}$$

と表せることがわかる．これらは，変換 $H \mapsto H\tilde{M}, \tilde{H} \mapsto \tilde{H}M$ の自由度分を除いて一意に定まる．ここで，M および $\tilde{M}$ は，それぞれ z, w および $\tilde{z}, \tilde{w}$ のみに依存する 2×2 行列である．行列 J を

$$J = \tilde{H}^{-1}H, \tag{2.2}$$

で導入しよう．ASDYM 方程式 (1.1) の第三式から，行列 J は

$$\partial_w\left(J^{-1}\partial_{\tilde{w}}J\right) - \partial_z\left(J^{-1}\partial_{\tilde{z}}J\right) = 0, \tag{2.3}$$

を満たすことがわかる．これをYangの方程式と呼ぶ．明らかに，行列 J には変換

$$J \mapsto M^{-1}J\tilde{M}, \tag{2.4}$$

による自由度がある．言い換えれば，(2.4) は方程式 (2.3) のBäcklund変換になっている．

Yangの方程式 (2.3) には，もうひとつ別のBäcklund変換が知られている．それを見るために，

$$J = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 1 & g \\ e & f^2 + eg \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

とおこう．Yangの方程式は，

$$\begin{aligned} &\partial_z\partial_{\tilde{z}}(\log f) + \frac{(\partial_{\tilde{z}}e)(\partial_z g)}{f^2} = \partial_w\partial_{\tilde{w}}(\log f) + \frac{(\partial_{\tilde{w}}e)(\partial_w g)}{f^2}, \\ &\partial_{\tilde{z}}\left(\frac{\partial_z g}{f^2}\right) = \partial_{\tilde{w}}\left(\frac{\partial_w g}{f^2}\right), \\ &\partial_z\left(\frac{\partial_{\tilde{z}} e}{f^2}\right) = \partial_w\left(\frac{\partial_{\tilde{w}} e}{f^2}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

と等価である．このとき，変換 $\beta : (e, f, g) \mapsto (\hat{e}, \hat{f}, \hat{g})$ を

$$\begin{aligned} &\hat{f} = \frac{1}{f}, \\ &\partial_z\hat{g} = \frac{\partial_{\tilde{w}}e}{f^2}, \quad \partial_w\hat{g} = \frac{\partial_{\tilde{z}}e}{f^2}, \\ &\partial_{\tilde{z}}\hat{e} = \frac{\partial_w g}{f^2}, \quad \partial_{\tilde{w}}\hat{e} = \frac{\partial_z g}{f^2}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

で定義すると，$(\hat{e}, \hat{f}, \hat{g})$ も (2.6) と同じ形の方程式を満たすことがわかる．

Bäcklund 変換 (2.4) で,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

としたものを，とくに変換 γ と呼ぼう．すなわち，

$$\gamma: \qquad J \mapsto \Gamma J \Gamma, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

成分で書くと，

$$\gamma: \qquad f \mapsto \frac{f}{f^2+eg}, \quad g \mapsto \frac{e}{f^2+eg}, \quad e \mapsto \frac{g}{f^2+eg}, \tag{2.10}$$

である．Bäcklund 変換 β および γ は，2 回施すと元に戻るような変換（$\beta^2 = 1, \gamma^2 = 1$）である．しかし，これらは互いに非可換（$\beta \circ \gamma \neq \gamma \circ \beta$）なので，自明な解にこれらを交互に施すことにより，無限個の解を生成できる．実際，Corrigan らは，Laplace 方程式に帰着される自明な解

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\partial_w \partial_{\bar{w}} - \partial_z \partial_{\bar{z}})\varphi = 0, \tag{2.11}$$

から出発して，行列式で表示される解の族を構成した [1, 2].

命題　まず，τ_n^m を行列式によって，

$$\tau_n^m = \begin{vmatrix} \varphi_{m-n+1} & \varphi_{m-n+2} & \cdots & \varphi_m \\ \varphi_{m-n+2} & \varphi_{m-n+3} & \cdots & \varphi_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m & \varphi_{m+1} & \cdots & \varphi_{m+n-1} \end{vmatrix}, \tag{2.12}$$

と定義する．ここで，φ_j は関係式

$$\partial_{\bar{w}} \varphi_j = \partial_z \varphi_{j+1}, \quad \partial_{\bar{z}} \varphi_j = \partial_w \varphi_{j+1}, \tag{2.13}$$

を満たすものとする．各 φ_j は Laplace 方程式

$$(\partial_w \partial_{\bar{w}} - \partial_z \partial_{\bar{z}})\varphi_j = 0, \tag{2.14}$$

を満たしている．このとき，函数 τ_n^m の間には双線形関係式

$$\begin{aligned} D_{\bar{w}} \tau_n^m \cdot \tau_{n-1}^{m+1} &= D_z \tau_n^{m+1} \cdot \tau_{n-1}^m, \\ D_{\bar{z}} \tau_n^m \cdot \tau_{n-1}^{m+1} &= D_w \tau_n^{m+1} \cdot \tau_{n-1}^m, \\ \tau_{n+1}^m \tau_{n-1}^m &= \tau_n^{m+1} \tau_n^{m-1} - \tau_n^m \tau_n^m, \end{aligned} \tag{2.15}$$

が成り立ち，これらを用いて

$$J = \frac{1}{\tau_n^m} \begin{pmatrix} \tau_n^{m-1} & \tau_{n+1}^m \\ \tau_{n-1}^m & \tau_n^{m+1} \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

が Yang の方程式 (2.3) の解となることがわかる． ∎

蛇足　Corrigan らは双線形関係式 (2.15) と等価な式を帰納法で証明している．最初の 2 つの双線形関係式を行列式の恒等式に帰着させると，Plücker 関係式そのものではなく，それらの和になる． ∎

上の行列式解は，2 つの離散パラメータ m,n を持っている．n は行列式の大きさを表し，m は函数列 φ_j のラベルを指定する．変換 $\gamma\circ\beta$ は，パラメータ m を 1 だけ下げる変換になっている．さらに，変換 γ_1, γ_2 を

$$\begin{aligned} \gamma_1: &\quad J\mapsto\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}J\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix},\\ \gamma_2: &\quad J\mapsto\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}J\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

で定義しよう（やはり $\gamma_1^2=\gamma_2^2=1$ である）．このとき，変換 $\gamma_2\circ\beta\circ\gamma_1$ は，パラメータ n を 1 だけ上げる変換になっている．

3 Painlevé II 方程式への簡約

本節では [4, 6, 7, 3] にしたがい，ASDYM 方程式に適当な対称性を課して Painlevé II 方程式を導出する．ごく大雑把にいえば，Laplace 方程式に適当な座標変換と変数分離を施して，(Bessel 函数等々の) 特殊函数が満たす線形常微分方程式を導く過程の類似である．

3.1 座標変換

独立変数 $(z,w,\tilde{z},\tilde{w})\in\mathbb{C}^4$ の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_{2,4}(\mathbb{C})$ への埋め込みを

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & z & w\\ 0 & 1 & \tilde{w} & \tilde{z}\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

で与える．$\mathrm{Gr}_{2,4}$ の点は，ベクトル $(1,0,z,w)$ および $(0,1,\tilde{w},\tilde{z})$ で張られる（原点を通る）平面であるが，この平面上の（原点を通る）直線を，

$$(1,0,z,w)+\zeta(0,1,\tilde{w},\tilde{z}), \tag{3.2}$$

で表す（ζ は直線の傾き，すなわち $\mathbb{P}^1$ の非同次座標）．こうして，ゲージポテンシャル A_* を $\mathrm{Gr}_{2,4}$ 上の函数，波動函数 Ψ を旗多様体 $F_{1,2}(\mathbb{C}^4)$ 上の函数だと考える．

さて，Jordan 群

$$J_{(4)}=\left\{\begin{bmatrix}1 & a & b & c\\ & 1 & a & b\\ & & 1 & a\\ & & & 1\end{bmatrix}\right\}, \tag{3.3}$$

の $\mathrm{Gr}_{2,4}$ および $F_{1,2}$ への作用を考え，その作用が引き起こす座標変換に関して波動函数 Ψ が不変である，という条件を課そう．Jordan 群 $J_{(4)}$ の各生成元

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ & 1 & 0 & a \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ & 1 & a & 0 \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

の作用により，各座標は

$$\begin{aligned} &(z, w, \tilde{z}, \tilde{w}; \zeta) \mapsto (z, w + a, \tilde{z}, \tilde{w}; \zeta), \\ &(z, w, \tilde{z}, \tilde{w}; \zeta) \mapsto (z + a, w, \tilde{z} + a, \tilde{w}; \zeta), \\ &(z, w, \tilde{z}, \tilde{w}; \zeta) \mapsto (z - a\tilde{w} - a^2, w + a(z - \tilde{z}) - a^2\tilde{w}, \tilde{z} + a\tilde{w}, \tilde{w} + a; \zeta + a), \end{aligned} \tag{3.5}$$

と変換を受ける．これらの座標変換に対する Ψ の不変性より，

$$\begin{aligned} &\partial_w \Psi = 0, \\ &(\partial_z + \partial_{\tilde{z}})\, \Psi = 0, \\ &[\partial_{\tilde{w}} + (z - \tilde{z})\partial_w + \tilde{w}(\partial_{\tilde{z}} - \partial_z) + \partial_\zeta]\, \Psi = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

が得られる．

以上の要請により，ASDYM 方程式は一変数のみに依存する常微分方程式系に帰着する．その独立変数を t と書こう．さらに，

$$\partial_p = \partial_w, \quad \partial_q = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}, \quad \partial_r = \partial_{\tilde{w}} + (z - \tilde{z})\partial_w + \tilde{w}(\partial_{\tilde{z}} - \partial_z) + \partial_\zeta, \tag{3.7}$$

として，

$$(z, w, \tilde{z}, \tilde{w}; \zeta) \mapsto (p, q, r, t; \xi), \tag{3.8}$$

と座標変換することを考えよう．変数 t は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & z & w \\ 0 & 1 & \tilde{w} & \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ & 1 & a & b \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

となるよう a, b, c を選ぶことにより，定めることができる．具体的には，

$$a = -\tilde{w}, \quad b = -\tilde{z} + \tilde{w}^2, \quad c = -w + z\tilde{w}, \tag{3.10}$$

ととればよい．このとき，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & z & w \\ 0 & 1 & \tilde{w} & \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ & 1 & a & b \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{w} & z - \tilde{z} + \tilde{w}^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

であるから，$t=\tilde{z}-z-\tilde{w}^2$ であり，ベクトル (3.2) は，

$$(1,\zeta-\tilde{w},-t,0), \tag{3.12}$$

となる．

以上より，最終的な座標変換は，

$$z=q-\frac{r^2}{2}-t,\quad w=p-rt-\frac{r^3}{3},\quad \tilde{z}=q+\frac{r^2}{2},\quad \tilde{w}=r,\quad \zeta=\xi+r, \tag{3.13}$$

と与えられる．逆変換は

$$p=w+(\tilde{z}-z)\tilde{w}-\frac{2}{3}\tilde{w}^3,\quad q=\tilde{z}-\frac{1}{2}\tilde{w}^2,\quad r=\tilde{w},\quad t=\tilde{z}-z-\tilde{w}^2,\quad \xi=\zeta-\tilde{w}, \tag{3.14}$$

となる．この座標変換を用いて，ゲージポテンシャルを

$$A:=A_{\tilde{z}}d\tilde{z}+A_{\tilde{w}}d\tilde{w}+A_z dz+A_w dw=Pdp+Qdq+Rdr+Tdt, \tag{3.15}$$

と書き換えよう．ゲージ変換により一般性を失うことなく $T=0$ とできるので，

$$A_z=-rP,\quad A_w=P,\quad A_{\tilde{z}}=rP+Q,\quad A_{\tilde{w}}=(-r^2+t)P-rQ+R, \tag{3.16}$$

となる．

3.2 Painlevé II 方程式の導出

いま，波動函数 Ψ は t,ξ のみの函数である．したがって，線形方程式系 (1.3) は，

$$\begin{aligned}\partial_\xi\Psi&=\left[(R+tP)-\xi Q+\xi^2P\right]\Psi,\\ \partial_t\Psi&=(\xi P-Q)\Psi,\end{aligned} \tag{3.17}$$

となる．P,Q,R が t のみの函数であることに注意すれば，これらの両立条件より，

$$P'=0,\quad Q'=[R,P],\quad R'=[R+tP,Q],\quad '=\frac{d}{dt}, \tag{3.18}$$

を得る．もちろん，これらは ASDYM 方程式 (1.1) から直接導くこともできる．以下，行列 P の固有値が 0 でない場合を考えよう．ゲージ変換により一般性を失うことなく，

$$P=\begin{pmatrix}k&0\\0&-k\end{pmatrix},\quad k\neq 0, \tag{3.19}$$

とできる．行列 Q,R を

$$Q=\begin{pmatrix}\lambda&\mu\\\nu&-\lambda\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\rho&\sigma\\\tau&-\rho\end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

とおき，これら 6 個の変数に対する方程式を書き下せば，

$$\begin{gathered}\lambda'=0,\quad \mu'=-2k\sigma,\quad \nu'=2k\tau,\\ \rho'=\nu\sigma-\mu\tau,\quad \sigma'=2(\mu\rho-\lambda\sigma)+2kt\mu,\quad \tau'=2(\lambda\tau-\nu\rho)-2kt\nu,\end{gathered} \tag{3.21}$$

となる．見かけは1階6連立の方程式系だが，以下の3つの量

$$\begin{aligned}
l &= \mathrm{tr}\,(PQ) = 2k\lambda,\\
m &= \mathrm{tr}\left(PR + \tfrac{1}{2}Q^2\right) = 2k\rho + \lambda^2 + \mu\nu,\\
n &= \mathrm{tr}\,(QR) = 2\lambda\rho + \mu\tau + \nu\sigma,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

がtに依らない保存量（積分定数）となるので，実質的には1階3連立の方程式系である．

これらの関係式を用いて，$y = \dfrac{\sigma}{\mu} = -\dfrac{1}{2k}(\log\mu)'$ およびρについての方程式を書き下してみると，

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left(\rho - \frac{4k^2m - l^2}{8k^3}\right) + 2k\left(y - \frac{l}{4k^2}\right)^2 + \left(2kt + \frac{m}{k} - \frac{3l^2}{8k^3}\right),\\
\rho' &= -4k\left(y - \frac{l}{4k^2}\right)\left(\rho - \frac{4k^2m - l^2}{8k^3}\right) - \frac{8k^4n - 4k^2lm + l^3}{8k^4},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

が得られる．変数y, ρ, tおよびパラメータnに適当なアフィン変換を施せば，

$$\begin{aligned}
y' &= -4\rho - y^2 + 2t,\\
\rho' &= 2y\rho - \alpha,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

となる．これらはPainlevé II方程式

$$y'' = 2y^3 - 4ty + 4\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \tag{3.25}$$

に対する正準方程式に他ならない．

先ほど，(3.21)は実質的に1階3連立の方程式系だと述べた．上で得られた$\mathrm{P_{II}}$の正準方程式は1階2連立である．もうひとつの自由度はどこに行ったのだろうか？それを見るために，$y_- = \dfrac{\tau}{\nu} = \dfrac{1}{2k}(\log\nu)'$ およびρについての方程式を書き下してみよう．すると，

$$\begin{aligned}
y_-' &= -2\left(\rho - \frac{4k^2m - l^2}{8k^3}\right) - 2k\left(y_- - \frac{l}{4k^2}\right)^2 - \left(2kt + \frac{m}{k} - \frac{3l^2}{8k^3}\right),\\
\rho' &= 4k\left(y_- - \frac{l}{4k^2}\right)\left(\rho - \frac{4k^2m - l^2}{8k^3}\right) + \frac{8k^4n - 4k^2lm + l^3}{8k^4},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

が得られる．ここからρを消去し，先と同様のアフィン変換施せば，やはり$\mathrm{P_{II}}$

$$y_-'' = 2y_-^3 - 4ty_- + 4\left(\alpha - \frac{1}{2}\right), \tag{3.27}$$

が得られる．ここで，(3.25)と比べてパラメータαが1だけずれていることに注意しよう．すなわち，ASDYM方程式からの簡約として得られた方程式系(3.21)は，正確には，$\mathrm{P_{II}}$とそのBäcklund変換と等価であることがわかる．

4　行列 H についての注意

特殊解の構成に話を進める前に，行列 H についてひとこと注意をしておこう．ゲージポテンシャル A_z, A_w は定数行列 P のスカラー倍

$$A_z = \begin{pmatrix} -k\tilde{w} & \\ & k\tilde{w} \end{pmatrix}, \quad A_w = \begin{pmatrix} k & \\ & -k \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

であるから，Painlevé II 方程式の任意の解に対して，

$$H = \begin{pmatrix} e^{k(-w+\tilde{w}z)} & \\ & e^{-k(-w+\tilde{w}z)} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

ととれることがわかる（もちろん行列 $\tilde{M}$ による規格化の自由度がある）．

5　Riccati 解

それでは，Painlevé II 方程式の Riccati 解を書き下してみよう．構成の仕方は，もうお馴染みのものである．正準方程式 (3.23) において，

$$n = \frac{4k^2lm - l^3}{8k^4}, \tag{5.1}$$

のとき，

$$\rho = \frac{4k^2m - l^2}{8k^3}, \tag{5.2}$$

と特殊化できることがわかる．このとき y についての方程式は

$$y' = 2k\left(y - \frac{l}{4k^2}\right)^2 + \left(2kt + \frac{m}{k} - \frac{3l^2}{8k^3}\right), \tag{5.3}$$

となる．これは Riccati 方程式であるから，

$$y = -\frac{1}{2k}\left(\frac{\psi'}{\psi} - \frac{l}{2k}\right), \tag{5.4}$$

とおくと，ψ に対する線形方程式

$$\psi'' = -\left(4k^2t + 2m - \frac{3l^2}{4k^2}\right)\psi, \tag{5.5}$$

が得られる．これは，先のアフィン変換のもとで Airy の微分方程式 $\psi'' = 2t\psi$ となる．関係式 $\mu' = -2k\sigma$ に注意すれば，

$$\mu = e^{-\frac{l}{2k}t}\psi, \quad \sigma = -\frac{e^{-\frac{l}{2k}t}}{2k}\left(\psi' - \frac{l}{2k}\psi\right), \tag{5.6}$$

と書ける．また，$\nu = \tau = 0$ であることもわかる．以上より，Riccati 解に対するゲージポテンシャル Q, R は，上三角行列

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{l}{2k} & e^{-\frac{l}{2k}t}\psi \\ & -\frac{l}{2k} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{4k^2m - l^2}{8k^3} & -\frac{e^{-\frac{l}{2k}t}}{2k}\left(\psi' - \frac{l}{2k}\psi\right) \\ & -\frac{4k^2m - l^2}{8k^3} \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

となる．もとの変数で書けば，

$$A_{\tilde{z}}=\begin{pmatrix} k\tilde{w}+\dfrac{l}{2k} & e^{-\frac{l}{2k}(\tilde{z}-z-\tilde{w}^2)}\psi \\ & -k\tilde{w}-\dfrac{l}{2k}\end{pmatrix},$$

$$A_{\tilde{w}}=\begin{pmatrix} k(\tilde{z}-z-2\tilde{w}^2)-\dfrac{l}{2k}\tilde{w}+\dfrac{4k^2m-l^2}{8k^3} & -\dfrac{e^{-\frac{l}{2k}(\tilde{z}-z-\tilde{w}^2)}}{2k}\left(2k\tilde{w}\psi+\psi'-\dfrac{l}{2k}\psi\right) \\ & -k(\tilde{z}-z-2\tilde{w}^2)+\dfrac{l}{2k}\tilde{w}-\dfrac{4k^2m-l^2}{8k^3}\end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

である．

注釈　Murata, Woodhouse は，$P_{II}\sim P_{VI}$ の Riccati 解に対するゲージポテンシャルを構成している [8, 9]. ∎

次に，線形方程式

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{H}=-A_{\tilde{z}}\tilde{H},\quad \partial_{\tilde{w}}\tilde{H}=-A_{\tilde{w}}\tilde{H}, \tag{5.9}$$

を解いて行列 $\tilde{H}$ を求めよう．いまの場合，$A_{\tilde{z}}, A_{\tilde{w}}$ が上三角であるから容易に解くことができる．実際，

$$\tilde{H}=\begin{pmatrix} F & G \\ & F^{-1}\end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

とおいて計算すれば，

$$\begin{aligned} F&=\exp\left[-\left(k\tilde{w}+\frac{l}{2k}\right)\tilde{z}+k\left(z\tilde{w}+\frac{2}{3}\tilde{w}^3\right)+\frac{l}{4k}\tilde{w}^2-\frac{4k^2m-l^2}{8k^3}\tilde{w}\right],\\ G&=-\exp\left[-\left(k\tilde{w}+\frac{l}{2k}\right)\tilde{z}\right]\\ &\quad\times\int^{\tilde{z}}\exp\left[k\tilde{w}(2\tilde{z}-z)+\frac{l}{2k}(\tilde{z}+z)-\frac{2}{3}k\tilde{w}^3+\frac{l}{4k}\tilde{w}^2+\frac{4k^2m-l^2}{8k^3}\tilde{w}\right]\psi d\tilde{z}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

が導かれる．前節で得られた行列 H とあわせて $J=\tilde{H}^{-1}H$ により行列 J は与えられるのだが，これに行列 $M,\tilde{M}$ による変換を施して対角成分を 1 に規格化しよう．そのためには，

$$\begin{aligned} M&=\begin{pmatrix} e^{\chi} & \\ & e^{-\chi}\end{pmatrix},\quad \tilde{M}=\begin{pmatrix} e^{\tilde{\chi}} & \\ & e^{-\tilde{\chi}}\end{pmatrix},\\ \chi&=-kw,\quad \tilde{\chi}=-\left(k\tilde{w}+\frac{l}{2k}\right)\tilde{z}+\frac{2}{3}k\tilde{w}^3+\frac{l}{4k}\tilde{w}^2-\frac{4k^2m-l^2}{8k^3}\tilde{w}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

ととればよい．このとき，

$$M^{-1}J\tilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ & 1\end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

と書くと，

$$\varphi=\int^{\tilde{z}}\exp\left[2k\left(w+(\tilde{z}-z)\tilde{w}-\frac{2}{3}\tilde{w}^3\right)+\frac{l}{2k}(\tilde{z}+z)+\frac{4k^2m-l^2}{4k^3}\tilde{w}\right]\psi d\tilde{z}, \tag{5.14}$$

となる．

次節以降の議論との関係で重要なのは，次の事実である．

命題　式 (5.14) で与えられた函数 φ は，Laplace 方程式

$$(\partial_w\partial_{\tilde{w}}-\partial_z\partial_{\tilde{z}})\varphi=0, \tag{5.15}$$

を満たす． ∎

第 2 節で示した Yang の方程式の自明な解 (2.11) と見比べれば，Laplace 方程式の特殊解として (5.14) を選んだものが $\mathrm{P_{II}}$ の Riccati 解に対応する，ということがわかる．

命題　$\mathrm{P_{II}}$ の Riccati 解に対する行列 J は

$$J=\begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

$$\varphi=\int^{\tilde{z}} e^{\eta}\psi d\tilde{z},\quad \eta=2k\left(w+(\tilde{z}-z)\tilde{w}-\frac{2}{3}\tilde{w}^3\right)+\frac{l}{2k}(\tilde{z}+z)+\frac{4k^2m-l^2}{4k^3}\tilde{w}, \tag{5.17}$$

で与えられる．行列 H を

$$\begin{aligned} H&=\begin{pmatrix} e^{\xi} & \\ & e^{-\xi} \end{pmatrix},\\ \xi&=k(-w+\tilde{w}z)-\left(k\tilde{w}+\frac{l}{2k}\right)\tilde{z}+\frac{2}{3}k\tilde{w}^3+\frac{l}{4k}\tilde{w}^2-\frac{4k^2m-l^2}{8k^3}\tilde{w}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

と定義すると，Riccati 解に対するゲージポテンシャルは，

$$A_z=-\partial_zHH^{-1},\quad A_w=-\partial_wHH^{-1}, \tag{5.19}$$

および

$$A_{\tilde{z}}=(-\partial_{\tilde{z}}H+HJ^{-1}\partial_{\tilde{z}}J)H^{-1},\quad A_{\tilde{w}}=(-\partial_{\tilde{w}}H+HJ^{-1}\partial_{\tilde{w}}J)H^{-1}, \tag{5.20}$$

により再現される． ∎

6　特殊函数解に対する行列 J

以上の議論を踏まえて，本節では Painlevé II 方程式の特殊函数解に対する行列 J を構成する．期待される結果は，第 2 節で与えた行列式解の特殊化として得られる，というものである．

まず，$\mathrm{P_{II}}$ の特殊函数解の行列式表示 [10] について述べておこう．

命題　函数 τ_N を行列式を用いて，

$$\tau_N=\begin{vmatrix} \psi^{(0)} & \psi^{(1)} & \cdots & \psi^{(N-1)} \\ \psi^{(1)} & \psi^{(2)} & \cdots & \psi^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi^{(N-1)} & \psi^{(N)} & \cdots & \psi^{(2N-2)} \end{vmatrix},\quad \psi^{(i)}=\left(\frac{d}{dt}\right)^i\psi, \tag{6.1}$$

と定義する．ここで，ψ は Airy の微分方程式 (5.5) の一般解である．このとき，双線形関係式

$$
\begin{gathered}
\left[D_t^2+\left(4k^2t+2m-\frac{3l^2}{4k^2}\right)\right]\tau_{N+1}\cdot\tau_N=0,\\
\tau_{N+1}\tau_{N-1}=\tau_N''\tau_N-\left(\tau_N'\right)^2,\\
D_t\tau_{N+1}\cdot\tau_{N-1}=-4k^2N\tau_N^2,
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

が成り立ち，したがって

$$
y=-\frac{1}{2k}\left[\frac{d}{dt}\left(\log\frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}\right)-\frac{l}{2k}\right],\quad \rho=\frac{4k^2m-l^2}{8k^3}+\frac{1}{2k}\frac{\tau_{N+1}\tau_{N-1}}{\tau_N^2},
\tag{6.3}
$$

は方程式系 (3.23) の解となる．ここで，パラメータの値は，

$$
n=\frac{4k^2lm-l^3}{8k^4}-2kN,
\tag{6.4}
$$

である． ∎

上の命題より，直ちに

$$
\begin{aligned}
&\mu=\frac{e^{-\frac{l}{2k}t}}{(2k)^{2N}}\frac{\tau_{N+1}}{\tau_N},\quad \nu=-(2k)^{2N}e^{\frac{l}{2k}t}\frac{\tau_{N-1}}{\tau_N},\\
&\sigma=-\frac{e^{-\frac{l}{2k}t}}{(2k)^{2N+1}}\frac{\left(D_t-\frac{l}{2k}\right)\tau_{N+1}\cdot\tau_N}{\tau_N^2},\quad \tau=(2k)^{2N-1}e^{\frac{l}{2k}t}\frac{\left(D_t-\frac{l}{2k}\right)\tau_N\cdot\tau_{N-1}}{\tau_N^2},
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

が得られる．定数倍の不定性については，後の議論を考慮して上のように固定した．したがって，ゲージポテンシャル Q,R は

$$
\begin{aligned}
Q&=\begin{pmatrix}\dfrac{l}{2k} & \dfrac{e^{-\frac{l}{2k}t}}{(2k)^{2N}}\dfrac{\tau_{N+1}}{\tau_N}\\ -(2k)^{2N}e^{\frac{l}{2k}t}\dfrac{\tau_{N-1}}{\tau_N} & -\dfrac{l}{2k}\end{pmatrix},\\
R&=\begin{pmatrix}\dfrac{4k^2m-l^2}{8k^3}+\dfrac{1}{2k}\dfrac{\tau_{N+1}\tau_{N-1}}{\tau_N^2} & -\dfrac{e^{-\frac{l}{2k}t}}{(2k)^{2N+1}}\dfrac{\left(D_t-\frac{l}{2k}\right)\tau_{N+1}\cdot\tau_N}{\tau_N^2}\\ (2k)^{2N-1}e^{\frac{l}{2k}t}\dfrac{\left(D_t-\frac{l}{2k}\right)\tau_N\cdot\tau_{N-1}}{\tau_N^2} & -\dfrac{4k^2m-l^2}{8k^3}-\dfrac{1}{2k}\dfrac{\tau_{N+1}\tau_{N-1}}{\tau_N^2}\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

と書ける．

ひとまず，$N=1$ の場合を考えよう．式 (5.14) で与えた φ を φ_{-1} とし，函数列 φ_j を関係式 (2.13) で構成する．以下で必要になるのは $j\geq -1$ のものである．行列 J を

$$
J=\frac{1}{\tau_1^0}\begin{pmatrix}\tau_1^{-1} & \tau_2^0\\ 1 & \tau_1^1\end{pmatrix},\qquad \tau_1^j=\varphi_j,\quad \tau_2^0=\begin{vmatrix}\varphi_{-1} & \varphi_0\\ \varphi_0 & \varphi_1\end{vmatrix},
\tag{6.7}
$$

で与えると，(5.18),(5.20) によりゲージポテンシャル (6.6) が再現される．Riccati 解に対する結果ともあわせ，一般の N に対する表示が予想できる．

定理 函数 φ_j $(j=-1,0,1,2,\cdots)$ を

$$\varphi_{-1}=\int^{\tilde{z}} e^{\eta}\psi d\tilde{z},\quad \eta=2k\left(w+(\tilde{z}-z)\hat{w}-\frac{2}{3}\tilde{w}^3\right)+\frac{l}{2k}(\tilde{z}+z)+\frac{4k^2m-l^2}{4k^3}\tilde{w} \tag{6.8}$$

および

$$\varphi_{j+1}=\frac{1}{2k}\partial_{\tilde{z}}\varphi_j, \tag{6.9}$$

で定義し，函数 τ_n^m を (2.12) で定義する．このとき，$\mathrm{P_{II}}$ の特殊函数解に対する行列 J は，

$$J=\frac{1}{\tau_N^{N-1}}\begin{pmatrix}\tau_N^{N-2} & \tau_{N+1}^{N-1}\\ \tau_{N-1}^{N-1} & \tau_N^{N}\end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

で与えられる．ゲージポテンシャル (6.6) は，式 (5.18),(5.20) により再現される． ∎

7 まとめと今後の課題

本稿では，Painlevé II 方程式の特殊函数解に対する行列 J を構成し，それが Corrigan らの行列式解の特殊化として得られることを示した．

冒頭でも述べたように本研究の動機のひとつは，Painlevé 方程式のアフィンワイル群対称性を，ASDYM 方程式の対称性から説明することにある．本稿で与えた結果から，$\mathrm{P_{II}}$ の $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ 対称性のうち，平行移動部分群については由来が読みとれる．具体的には，変換 $\gamma_1\circ\beta\circ\gamma_1\circ\beta$ が，パラメータ N（したがって α）を 1 だけ下げる平行移動となっている．鏡映も含めた $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ 対称性全体について把握するためには，有理解に対する行列 J を構成することが必要なようであり，今後の課題のひとつである．

ASDYM 方程式から $\mathrm{P_{II}}$ への簡約には，Jordan 群 $J_{(4)}$ の作用に対する不変性を課した．4 の分割に対応する Jordan 群としては，$J_{(2,2)}, J_{(3,1)}, J_{(2,1,1)}, J_{(1,1,1,1)}$ があるが，これらに対する不変性を課すことにより，それぞれ $\mathrm{P_{III}}, \mathrm{P_{IV}}, \mathrm{P_{V}}, \mathrm{P_{VI}}$ が得られる [4]．これらの特殊函数解 [5] も，Corrigan らの行列式解の特殊化として捉えられると期待される．

ゲージポテンシャルが値をとる Lie 環を $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ と設定すれば，$A_{n-1}^{(1)}$ 型 Noumi-Yamada 系も，ASDYM 方程式の簡約として導出できると思われる．

参考文献

[1] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, Bäcklund transformations and the construction of the Atiyah-Ward ansätze for self-dual $SU(2)$ gauge fields, Phys. Lett. **72 B** (1978) 354-356.

[2] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, The construction of self-dual solutions to $SU(2)$ gauge theory, Commun. Math. Phys. **58** (1978) 223-240.

[3] 川向洋之，新田貴士，ヤン・ミルズ方程式から見たパンルヴェ方程式の退化，数理解析研究所講究録 No.1367 「複素領域における微分方程式の大域解析と漸近解析」(2004) 134-147.

[4] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse, Integrability, Self-duality and Twister Theory, Oxford University Press, 1996.

[5] T. Masuda, Classical transcendental solutions of the Painlevé equations and their degeneration, to appear in Tohoku Math. J. **56** (2004).

[6] Y. Murata, Painlevé systems reduced from Anti-Self-Dual Yang-Mills equations, to appear.

[7] 村田嘉弘，反自己双対ヤン・ミルズ方程式から見たパンルベ方程式,「超幾何系ワークショップ in 神戸 '99」における講演，神戸大学，1999.11.30–12.3.

[8] Y. Murata and N.M.J. Woodhouse, Generalized confluent hypergeometric systems on Grassmann variety, in preparation.

[9] Y. Murata and N.M.J. Woodhouse, Generalized confluent hypergeometric systems included in matrix Painlevé systems, in preparation.

[10] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations III, second and fourth Painlevé equations, P_{II} and P_{IV}, Math. Ann. **275** (1986) 222-254.

[11] C. N. Yang, Condition of selfduality for $SU(2)$ gauge fields on Euclidean four-dimensional space. Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1377-1379.