数理解析研究所講究録 1405 巻 2004 年 14-30



# Variational methods in Orlicz-Sobolev spaces to quasilinear elliptic equations*

徳島大学・工学部　深貝 暢良 (Nobuyoshi FUKAGAI)
Department of Mathematics, Faculty of Engineering
Tokushima University

徳島大学・総合科学部　伊藤 正幸 (Masayuki ITO)
Department of Mathematics and Computer Sciences
Tokushima University

鳴門教育大学　成川 公昭 (Kimiaki NARUKAWA)
Naruto University of Education

## 1 はじめに

$\boldsymbol{R}^N$ の全体において、準線形退化楕円型方程式

$$-\operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \phi_*(|u|)u + \lambda f(x,u) \tag{1.1}$$

の非負値解を考える。次元は $N \geq 2$ とする。各項の漸近性が

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\sim \begin{cases} t^{p_0-2} & (t \to +0) \\ t^{p_1-2} & (t \to \infty) \end{cases} \\
\phi_*(t) &\sim \begin{cases} t^{p_0^*-2} & (t \to +0) \\ t^{p_1^*-2} & (t \to \infty) \end{cases} \\
f(x,0) &= 0, \quad f(x,t) = o(\phi_*(t)t) \quad (t \to \infty)
\end{aligned}$$

$$1 < p_i < N, \quad p_i^* = \frac{Np_i}{N-p_i}, \quad i = 0,1$$

のときに、関数空間として $\phi$ から決まる Orlicz-Sobolev 空間を用意し、変分法を用いて (1) の非負な弱解を構成することが目標である。

*本研究の一部は、日本学術振興会・科学研究費補助金 (No. 14540211, No. 16540197) の補助を受けて行なわれた。

この種の問題としては、主要部が Laplacian ($p = 2$) あるいは $p$-Laplacian ($p > 1$) の場合の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda f(x,u) & \text{in } \Omega \subset \boldsymbol{R}^N \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

が先行している。実際、$\Omega$ が有界領域のときは Brezis and Nirenberg [5], Guedda and Véron [7], García Azorero and Peral Alonso [6]、そして $\Omega = \boldsymbol{R}^N$ または $\Omega$ が非有界領域のときは Benci and Cerami [3], Silva and Soares [10], Silva and Xavier [11] などに変分法的な取り扱いがみられ、また球対称な領域での球対称解をみつける立場からも各種の文献が現れている。

それらの議論を踏まえた上で、主要部を少し一般化た問題についての全領域における解を捉えるために、Orlicz-Sobolev 空間の枠組での設定を試みることにした。

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)sds \quad (t \geq 0) \tag{1.3}$$

とおく。$\Phi(t)$ の Sobolev conjugate funcion $\Phi_*(t)$ を

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{(N+1)/N}}ds \tag{1.4}$$

で定める。方程式 (1.1) の $\phi_*(t)$ は

$$\Phi_*(t) = \int_0^t \phi_*(s)sds \tag{1.5}$$

となるときを考える。これは $p$-Laplacian のときには臨界指数べきの右辺を与えたことに相当する。以下では、主要部の具体的な例として

1. $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$ $\quad$ $p$-Laplacian ($p_0 = p_1 = p$)

2. $\Phi(t) = t^p \log(1+t) \sim \begin{cases} t^{p+1} & (t \to 0) \\ t^p \log t & (t \to \infty) \end{cases}$

3. $\Phi(t) = (1+t^2)^\gamma - 1 \sim \begin{cases} 2\gamma t^2 & (t \to 0) \\ t^{2\gamma} & (t \to \infty) \end{cases}$

などが含まれるような条件を設定した。

## 2 仮定と主張

最初に $x \in \boldsymbol{R}^N$, $t \in \boldsymbol{R}$ のとき

$$F(x,t) = \int_0^t \bar{f}(x,s)ds, \quad \bar{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & (t > 0) \\ 0 & (t \le 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

とおく。実数 $p \in (1,N)$ に対して $p^* = Np/(N-p)$ と表す。関数 $\phi$, $b$, $f$ はつぎを満たすとする。

($\mathrm{H}_1$) $\phi(t) \in C^1((0,\infty))$, $\phi(t) > 0$, $(\phi(t)t)' > 0$ for $t > 0$;

($\mathrm{H}_2$) 定数の組 $\ell$, $m \in (1,N)$, $\ell \le m < \ell^*$ がとれて $\ell \le \dfrac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)} \le m$ for $t > 0$;

($\mathrm{H}_3$) 定数 $a_0 > 0$ がとれて $a_0\Phi'(t) \le \Phi''(t)t$ for $t > 0$;

($\mathrm{H}_4$) $f(x,t) \in C(\boldsymbol{R}^N \times [0,\infty))$ かつ $f(x,0) = 0$ for $x \in \boldsymbol{R}^N$;

($\mathrm{H}_5$) 定数の組 $r_0$, $r_1 > 0$ および非負関数 $g(x) \in L^1(\boldsymbol{R}^N) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ がとれて

$$\frac{m}{\ell^*}m^* < r_0 < m^*, \quad m < r_1 < \ell^*$$

$$|F(x,t)| \le \begin{cases} g(x)t^{r_0} & (0 \le t \le 1) \\ g(x)t^{r_1} & (t \ge 1) \end{cases} \quad \text{for } x \in \boldsymbol{R}^N;$$

($\mathrm{H}_6$) 開集合 $\Omega_0 \subset \boldsymbol{R}^N$ がとれて $F(x,t) > 0$ for $x \in \Omega_0$, $t > 0$;

($\mathrm{H}_7$) 定数 $C > 0$ がとれて $|f(x,t)t| \le C|F(x,t)|$ for $x \in \boldsymbol{R}^N$, $t \ge 0$.

このときつぎの状況となっている。

- $\Phi(t)$ 凸関数, $\Phi(0) = 0$
- $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ 増加, $\displaystyle\lim_{t\to+0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$
- $t \to +0$, $t \to \infty$ のそれぞれにおいて、$\Phi(t)$ はベキ乗のオーダで上下から評価される。

- $f(x,0)=0$
- $f(x,t)$ および $F(x,t)$ は $\phi(t)$ から決まるべきで評価される。

一般に、$N$-function $A=A(t)$ と開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^N$ が与えられたとき、Orlicz 空間 $L_A(\Omega)$ が定義される（Adams and Fournier [1, Chap. 8] 参照）。また、$A$ が $\Delta_2$ 条件、すなわち、ある定数 $k>0$ がとれて

$$A(2t)\le kA(t),\quad t\ge 0, \tag{2.2}$$

を満たすならば、Orlicz 空間 $L_A(\Omega)$ は

$$\int_\Omega A(|u(x)|)dx<\infty \tag{2.3}$$

なる $\Omega$ 上の可測関数 $u$ 全体と一致する。この $L_A(\Omega)$ は、つぎで定義される (Luxemburg) ノルム

$$\|u\|_A=\inf\left\{k>0;\ \int_\Omega A\Big(\frac{|u(x)|}{k}\Big)dx\le 1\right\}\quad\text{for } u\in L_A(\Omega) \tag{2.4}$$

によって Banach 空間となる。$A$ の Legendre 変換によって決まる関数

$$\widetilde{A}(s)=\max_{t\ge 0}(st-A(t))\quad\text{for } s\ge 0 \tag{2.5}$$

を $A$ の complement という。このとき、$A$ と $\widetilde{A}$ は互いに complement の関係にある。Young の不等式

$$st\le A(t)+\widetilde{A}(s) \tag{2.6}$$

から、簡単な計算で、$u\in L_A(\Omega)$, $v\in L_{\widetilde{A}}(\Omega)$ に対する Hölder 型の不等式

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right|\le 2\|u\|_A\|v\|_{\widetilde{A}} \tag{2.7}$$

を導くことができる。

つぎに、$\Phi$, $\Phi_*$ の complements を $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Phi_*}$ とする。上の仮定 ($\mathrm{H}_1$)–($\mathrm{H}_2$) より $\Phi$, $\Phi_*$, $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Phi_*}$ はすべて $N$-funktion であり $\Delta_2$ 条件をみたすことになる。空間 $C_0(\boldsymbol{R}^N)$ のノルム

$$|\,u\,|_{\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)}=\|u\|_{\Phi_*}+\|\nabla u\|_\Phi \tag{2.8}$$

による完備化で Banach 空間 $\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ を定義する。このとき、ある定数 $S_0 > 0$ がとれて、Orlicz-Sobolev 不等式

$$\|u\|_{\Phi_*} \le S_0 \|\nabla u\|_\Phi \tag{2.9}$$

for $u \in \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ が成り立ち、上で用いたノルム (2.8) は別のノルム

$$\|u\|_{\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)} = \|\nabla u\|_\Phi \tag{2.10}$$

と同値になる。ここでは、$\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ のノルムとして (2.10) を用いることにする。仮定 ($\mathrm{H}_1$)–($\mathrm{H}_2$) の下で $\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ は回帰的である。

以上の前提の下で、

**Theorem 2.1.** 十分大きな $\lambda > 0$ に対して、方程式 (1.1) は非負、非自明な（弱）解 $u = u_\lambda \in \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ をもつ。

# 3 Orlicz ノルムを計算するための補題

Orlicz 空間での計算を行なう場合、通常は具体的に Orlicz ノルムを捉えることが困難なのであるが、ここで考えている仮定の下ではその部分を都合よく工夫することができて、実際に各種のノルムを $\Phi(|u|)$, $\Phi_*(|u|)$, $\widetilde{\Phi}(|u|)$, $\widetilde{\Phi_*}(|u|)$ などの積分を用いて評価することが可能である。基本的な道具はつぎのとおり。

**Lemma 3.1.** $\zeta_0(t) = \min\{t^\ell, t^m\}$, $\zeta_1(t) = \max\{t^\ell, t^m\}$ として

$$\zeta_0(\|u\|_\Phi) \le \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi(|u|)dx \le \zeta_1(\|u\|_\Phi) \quad \textit{for } u \in L_\Phi(\boldsymbol{R}^N). \tag{3.1}$$

**Lemma 3.2.** $\zeta_2(t) = \min\{t^{\ell^*}, t^{m^*}\}$, $\zeta_3(t) = \max\{t^{\ell^*}, t^{m^*}\}$ として

$$\zeta_2(\|u\|_{\Phi_*}) \le \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi_*(|u|)dx \le \zeta_3(\|u\|_{\Phi_*}) \quad \textit{for } u \in L_{\Phi_*}(\boldsymbol{R}^N). \tag{3.2}$$

ここで、$p > 1$ の conjugate exponent を $p' = p/(p-1)$ とおき、$\ell$, $m$, $\ell^*$, $m^*$ の conjugate exponents を $\ell'$, $m'$, $(\ell^*)'$, $(m^*)'$ とする。

**Lemma 3.3.** $\zeta_4(s)=\min\{s^{\ell/(\ell-1)}, s^{m/(m-1)}\}$, $\zeta_5(s)=\max\{s^{\ell/(\ell-1)}, s^{m/(m-1)}\}$ として

$$\zeta_4(\|u\|_{\widetilde{\Phi}}) \le \int_{\boldsymbol{R}^N} \widetilde{\Phi}(|u|)dx \le \zeta_5(\|u\|_{\widetilde{\Phi}}) \quad \textit{for } u \in L_{\widetilde{\Phi}}(\boldsymbol{R}^N). \tag{3.3}$$

**Lemma 3.4.** $\zeta_6(s)=\min\{s^{\ell^*/(\ell^*-1)}, s^{m^*/(m^*-1)}\}$, $\zeta_7(s)=\max\{s^{\ell^*/(\ell^*-1)}, s^{m^*/(m^*-1)}\}$ として

$$\zeta_6(\|u\|_{\widetilde{\Phi_*}}) \le \int_{\boldsymbol{R}^N} \widetilde{\Phi_*}(|u|)dx \le \zeta_7(\|u\|_{\widetilde{\Phi_*}}) \quad \textit{for } u \in L_{\widetilde{\Phi*}}(\boldsymbol{R}^N). \tag{3.4}$$

さらに、$u_+=\max\{u,0\}$ とおくとき、上の補題を用いてつぎが分かる。

**Lemma 3.5.** ある定数 $M_0$, $M_1>0$ がとれて

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} |F(x,u)|dx \le M_0\zeta_2(\|u_+\|_{\Phi_*})^{r_0/m^*} + M_1\zeta_3(\|u_+\|_{\Phi_*})^{r_1/\ell^*} \tag{3.5}$$

*for* $u \in L_{\Phi_*}(\boldsymbol{R}^N)$.

# 4 Mountain-pass の状況

微分方程式 (1.1) の弱解 $u=u_\lambda \ge 0$ を構成するために、汎関数

$$I_\lambda(u)=\int_{\boldsymbol{R}^N}\{\Phi(|\nabla u|)-\Phi_*(u_+)-\lambda F(x,u)\}dx \tag{4.1}$$

の変分問題を考える。この $I_\lambda$ は $\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ において Fréchet 微分可能である。はじめに、Ambrosetti-Rabinowitz の mountain pass lemma から Palais-Smale 条件を除いたときの主張を思い起こそう。

**Lemma 4.1.** $I$ を Banach 空間 $E$ の $C^1$ 関数とする。$E$ の原点 0 の近傍 $U$ と実数 $\alpha$ がとれて、つぎを満たすとする。

(i) $I(u)\ge\alpha$ が $U$ の境界で成り立つ。

(ii) $I(0)<\alpha$ である。

(iii) $I(w_0) < \alpha$ となる $w_0 \notin U$ がとれる。

このとき

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = w_0\} \tag{4.2}$$

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{w \in \gamma} I(w) \quad (\geq \alpha) \tag{4.3}$$

とおくと、$E$ の点列 $\{u_n\}$ がとれて $I(u_n) \to c$ および $I'(u_n) \to 0$ in $E'$ を満たす。

この補題の証明は、例えば Ekeland の最小化原理に基づくものが、Aubin and Ekeland [2, p. 272, Theorem 5] に記載されている。また、Brezis [4, Lemma 7] にそのあらすじが書かれている。

さて、(4.1) の $I_\lambda$ は、上の (i), (ii), (iii) を満たすことが示される。

**Lemma 4.2.** 任意の $\lambda > 0$ に対して $\rho_0 = \rho_0(\lambda) > 0$ がとれて、$0 < \rho < \rho_0$ の とき

$$I_\lambda(u) > 0 \quad \textit{for any } u \in \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N) \textit{ with } \|\nabla u\|_\Phi = \rho \tag{4.4}$$

が成り立つ。

**Proof.** $u \in \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ とする。$\rho = \|\nabla u\|_\Phi$ が $0 < \rho < \min\{1/S_0, 1\}$ の範囲にあるとき、(3.1), (3.5), (2.9) より

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \zeta_0(\|\nabla u\|_\Phi) - \zeta_3(\|u\|_{\Phi_*}) - \lambda M_0 \zeta_3(\|u\|_{\Phi_*})^{r_0/m^*} \\ &\quad - \lambda M_1 \zeta_3(\|u\|_{\Phi_*})^{r_1/\ell^*} \\ &\geq \zeta_0(\|\nabla u\|_\Phi) - \zeta_3(S_0\|\nabla u\|_\Phi) - \lambda M_0 \zeta_3(S_0\|\nabla u\|_\Phi)^{r_0/m^*} \\ &\quad - \lambda M_1 \zeta_3(S_0\|\nabla u\|_\Phi)^{r_1/\ell^*} \\ &= \rho^m - (S_0\rho)^{\ell^*} - \lambda M_0 (S_0\rho)^{\ell^* r_0/m^*} - \lambda M_1 (S_0\rho)^{r_1} \end{aligned} \tag{4.5}$$

である。(H$_2$), (H$_5$) から

$$m < \ell^*, \quad m < \frac{\ell^* r_0}{m^*}, \quad m < r_1, \tag{4.6}$$

ゆえ、十分小さな $\rho > 0$ に対して (4.5) の右辺は正となる。□

**Lemma 4.3.** $\Omega_0 \subset \boldsymbol{R}^N$ を $(\mathrm{H}_6)$ の開集合とする。関数 $u_0 \in \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ が

$$u_0 \geq 0, \quad u_0 \neq 0, \quad \operatorname{supp} u_0 \subset \Omega_0. \tag{4.7}$$

を満たすならば、ある $t_0 = t_0(u_0) > 0$ がとれて

$$I_\lambda(t_0 u_0) < 0 \quad \textit{for any } \lambda > 0 \tag{4.8}$$

となる。

**Proof.** $(\mathrm{H}_6)$, Lemma 3.1, Lemma 3.2 により $t \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu_0) &= \int_{\boldsymbol{R}^N} \{\Phi(t|\nabla u_0|) - \Phi_*(tu_0) - \lambda F(x, tu_0)\} dx \\ &\leq \zeta_1(t) \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi(|\nabla u_0|) dx - \zeta_2(t) \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi_*(|u_0|) dx \\ &= t^m \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi(|\nabla u_0|) dx - t^{\ell^*} \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi_*(|u_0|) dx \end{aligned} \tag{4.9}$$

である。$t$ のべきが $m < \ell^*$ ゆえ、十分大きな $t = t_0(u_0) > 0$ に対して (4.9) の右辺は負となる。□

$\lambda > 0$ とする。Lemma 4.1 からつぎの Palais-Smale 列 $\{u_n\} \subset \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ がとれる。すなわち、$n \to \infty$ のとき

$$I_\lambda(u_n) \to c_\lambda \quad \text{および} \quad I'_\lambda(u_n) \to 0 \text{ in } \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)' \tag{4.10}$$

を満たす。ここで $c_\lambda$ は汎関数 $I_\lambda$、近傍 $U = U_\rho$、関数 $w_0 = t_0 u_0$ に対して決まる (4.3) の定数である。また、Lemma 4.4, Lemma 4.3 により $c_\lambda > 0$ である。Lemma 3.5 を用いてつぎが分かり、この列の有界性が得られる。

**Lemma 4.4.** $\tau > 0$ とする。このとき、定数 $M_2, M_3 > 0$ がとれて、任意の $u \in L_{\Phi_*}(\boldsymbol{R}^N)$ に対し

$$\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{R}^N} \left| F(x,u) - \frac{1}{\tau} \bar{f}(x,u) u \right| dx \\ &\leq M_2 \left( \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi_*(u_+) dx \right)^{r_0/m^*} + M_3 \left( \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi_*(u_+) dx \right)^{r_1/\ell^*} \end{aligned} \tag{4.11}$$

が成り立つ。

**Lemma 4.5.** (4.10) の列 $\{u_n\} \subset \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ は $\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ で有界である。

**Proof.** Lemma 4.4 の $\tau > 0$ を $m < \tau < \ell^*$ の範囲にとる。

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \tag{4.12}$$

を上と下から評価すると、$r_0/m^* < 1$, $r_1/\ell^* < 1$ であることから、ある定数 $c_1$, $c_2 > 0$ について

$$\left(1 - \frac{m}{\tau}\right)\zeta_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) \le c_1 + c_2\|\nabla u_n\|_\Phi \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.13}$$

が得られ、列 $\{\|\nabla u_n\|_\Phi\}$ は有界である。□

## 5 Palais-Smale 列の収束

前節のとおり $\{u_n\} \subset \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ を (4.10) の列とする。Lemma 4.5 より

$$\{\|\nabla u_n\|_\Phi\},\ \{\|u_n\|_{\Phi_*}\},\ \left\{\int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx\right\},\ \left\{\int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi_*(|u_n|)dx\right\}$$

は有界である。ところが、仮定 $(\mathrm{H}_1)$–$(\mathrm{H}_2)$ の下で Orlicz 空間 $L_\Phi(\boldsymbol{R}^N)$, $L_{\Phi_*}(\boldsymbol{R}^N)$, $L_{\widetilde{\Phi}}(\boldsymbol{R}^N)$, $L_{\widetilde{\Phi_*}}(\boldsymbol{R}^N)$, $\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ はすべて回帰的であった。したがって、部分列を取り直すことにより、ある $u \in \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ および符合付の Radon 測度 $\nu$, $\mu \in \mathscr{M}(\boldsymbol{R}^N)$ が定まって、$n \to \infty$ のとき

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{weakly in } L_{\Phi_*}(\boldsymbol{R}^N) \tag{5.1}$$

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad \text{weakly in } L_\Phi(\boldsymbol{R}^N) \tag{5.2}$$

$$\Phi_*(|u_n|) \rightharpoonup \nu \quad \text{weakly in } \mathscr{M}(\boldsymbol{R}^N) \tag{5.3}$$

$$\Phi(|\nabla u_n|) \rightharpoonup \mu \quad \text{weakly in } \mathscr{M}(\boldsymbol{R}^N) \tag{5.4}$$

であるとしてよい。ここで

$$\nu(\boldsymbol{R}^N) \le \limsup_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi_*(|u_n|)dx < \infty \tag{5.5}$$

$$\mu(\boldsymbol{R}^N) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|)dx < \infty \tag{5.6}$$

に注意する。さらに、$\Psi$ が $\Phi_*$ よりも本質的に遅い増大度をもつ $N$-function のとき、[1, p. 284] の Theorem 8.35 と対角線論法を用いて、任意の有界集合 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ に対し

$$u_n \to u \quad \text{in } L_\Psi(\Omega) \tag{5.7}$$

とすることができる。したがって、

$$u_n \to u \quad \text{in } L_\Phi(\Omega) \tag{5.8}$$

さらに部分列をとって

$$u_n \to u \quad \text{a.e. in } \boldsymbol{R}^N \tag{5.9}$$

として差し支えない。最後に P. L. Lions [9] の Lemma I.1 (second concentration lemma) を拡張した補題を用意する。

**Lemma 5.1.** (i) 高々可算集合 $J$, 異なる点の集合 $\{x_j\}_{j\in J}$ in $\boldsymbol{R}^N$ および定数 $\nu_j > 0$ の集合 $\{\nu_j\}_{j\in J}$ がとれて

$$\nu = \Phi_*(|u|) + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j} \tag{5.10}$$

ここで $\delta_{x_j}$ は Dirac measure である。

(ii) さらに、1 点 $x_j \in \boldsymbol{R}^N$ の $\mu$ 測度を $\mu_j = \mu(\{x_j\})$ とおくと、各 $j \in J$ について

$$0 < \nu_j \leq \max\left\{S_0^{\ell^*}\mu_j^{\ell^*/\ell}, S_0^{m^*}\mu_j^{m^*/\ell}, S_0^{\ell^*}\mu_j^{\ell^*/m}, S_0^{m^*}\mu_j^{m^*/m}\right\} \tag{5.11}$$

を満たす。

この補題を用いて concentration-compactness の（幾分長い）段階的な手続きを踏むと、仮定 $(\mathrm{H}_2)$, $(\mathrm{H}_5)$ から導かれる関係式

$$\frac{\ell^*}{m} > 1, \quad \frac{\ell^* r_0}{mm^*} > 1, \quad \frac{r_1}{m} > 1 \tag{5.12}$$

の下で、つぎの補題を得る。

**Lemma 5.2.** Lemma 5.1 の点集合 $\{x_j\}_{j\in J}$ は高々有限集合である。

そして、任意の $\Omega \subset\subset \boldsymbol{R}^N \setminus \{x_j\}_{j\in J}$ について、

$$u_n \to u \quad \text{strongly in } L_{\Phi_*}(\Omega) \tag{5.13}$$

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{strongly in } L_{\Phi}(\Omega) \tag{5.14}$$

が示される。また、さらに部分列をとることによって

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{a.e. in } \boldsymbol{R}^N \tag{5.15}$$

が得られる。

**Corollary 5.3.** Lemma 5.1 の $\{\mu_j\}_{j\in J}$ は

$$\mu \geq \Phi(|\nabla u|) + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j} \tag{5.16}$$

を満たす。

**Proposition 5.4.** 極限関数 $u \in \mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ は微分方程式

$$-\operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \phi_*(u_+)u_+ + \lambda f(x, u_+) \quad \text{on } \boldsymbol{R}^N \tag{5.17}$$

の弱解を与える。

# 6 Theorem 2.1 の証明

**Lemma 6.1.** 仮定 $(\mathrm{H}_6)$ の $\Omega_0$ に対して、つぎのように $u_0 \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ をとる。

$$u_0 \geq 0, \quad u_0 \neq 0, \quad \operatorname{supp} u_0 \subset \Omega_0, \quad \|\nabla u_0\|_\Phi = 1 \tag{6.1}$$

このとき

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(tu_0) \to 0 \quad \text{as } \lambda \to \infty \tag{6.2}$$

である。

**Proof.** $\lambda > 0$ とする。はじめに、$t \geq 1$ のとき、(4.9) と同様に (3.1), (3.2) を用いて

$$I_\lambda(tu_0) \leq t^m - c_0 t^{\ell^*} \tag{6.3}$$

(ただし $c_0 = \zeta_2(\|u_0\|_{\Phi_*}) > 0$) であり、$\max_{t\geq 0} I_\lambda(tu_0)$ の最大値を与える $t = t_\lambda$ は $0 < t_\lambda \leq T_0 \equiv \min\{1, c_0^{-1/(\ell^*-m)}\}$ の範囲に評価される。

そうすると、$\lambda \to \infty$ のとき $t_\lambda \to 0$ であることが分かる。実際、もしそうでなければ、$\lambda_j \to \infty$ と $\delta_0 > 0$ がとれて $t_{\lambda_j} \geq \delta_0 > 0$ となるので、supp $u_0$ の内部に含まれる閉球 $B$ をとって

$$c_1 = \min\{F(x, tu_0(x));\ x \in B,\ \delta_0 \leq t \leq T_0\} > 0 \tag{6.4}$$

ゆえに、$j \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0} I_{\lambda_j}(tu_0) &= I_{\lambda_j}(t_{\lambda_j}u_0) \\ &\leq \ (t_{\lambda_j})^m - c_0(t_{\lambda_j})^{\ell^*} - \lambda_j c_1 \mathrm{vol(B)} \to -\infty\end{aligned} \tag{6.5}$$

である。ところが、Lemma 4.2 より、任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(tu_0) > 0 \tag{6.6}$$

であったから、矛盾である。

最後に、$t_\lambda \to 0$ および (6.3) から (6.2) が得られる。□

**Lemma 6.2.** $n \to \infty$ のとき

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} F(x, u_n)dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} F(x, u)dx \tag{6.7}$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} \bar{f}(x, u_n)u_n dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} \bar{f}(x, u)u dx \tag{6.8}$$

である。

*Proof of Theorem* 2.1. 前節で用いた PS 列 $\{u_n\}$ の極限関数 $u = u_\lambda$ が $u \geq 0$ および $u \neq 0$ を満たすことをいえばよい。

(i) $I'_\lambda(u_n)$ に $(u_n)_- = \max\{-u_n, 0\}$ をかけて

$$\begin{aligned}\langle I'_\lambda(u_n), (u_n)_-\rangle &= \int_{\boldsymbol{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \cdot \nabla (u_n)_- dx \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^N} \phi(|\nabla (u_n)_-|)|\nabla (u_n)_-|^2 dx \\ &\geq \ell \int_{\boldsymbol{R}^N} \Phi(|\nabla (u_n)_-|)dx \geq \ell\, \zeta_0(\|\nabla (u_n)_-\|_\Phi) \end{aligned} \tag{6.9}$$

ここで (4.10) から $\langle I'_\lambda(u_n), (u_n)_-\rangle \to 0$ なので、(6.9) を用いて $(u_n)_- \to 0$ in $\mathscr{D}^{1,\Phi}(\boldsymbol{R}^N)$ である。よって、$u \geq 0$ が分かり、Proposition 5.4 から $u = u_\lambda$ は (1.1) の（非負な）弱解となる。

(ii) $\lambda$ を大きくとるときに、極限関数 $u$ が $u \neq 0$ となることを示そう。はじめに

$$\begin{aligned} M \;=\; &\min\{\ell^{\beta/(\beta-\alpha)} S_0^{-\alpha\beta/(\beta-\alpha)} (m^*)^{-\alpha/(\beta-\alpha)}; \\ &\qquad \alpha = \ell \text{ or } m,\ \beta = \ell^* \text{ or } m^* \ \} \end{aligned} \tag{6.10}$$

とおく。Lemma 6.2 より (4.10) の $c_\lambda > 0$ は $\lambda \to \infty$ のとき

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{w\in\gamma} I_\lambda(w) \to 0 \tag{6.11}$$

だから、$\lambda$ を大きく選んで

$$0 < c_\lambda < \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\ell^*}\right) M \tag{6.12}$$

が成り立つようにしておく。

以下は背理法である。すなわち、$u = 0$ と仮定する。さて、(4.10) より $n \to \infty$ のとき $\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \to 0$ である。ところで、

$$\begin{aligned}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= \int_{\boldsymbol{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx \\ &\quad - \int_{\boldsymbol{R}^N} \phi_*((u_n)_+)(u_n)_+^2 dx - \lambda \int_{\boldsymbol{R}^N} \bar{f}(x, u_n) u_n dx \end{aligned} \tag{6.13}$$

の右辺の各項はいづれも有界な列だから、部分列をとって、収束させることができる。特に、(6.8) および背理法の仮定より、第3項は 0 に収束するので

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^N}\phi_*((u_n)_+)(u_n)_+^2dx \tag{6.14}$$

であるとしてよい。この値を $K_\lambda$ とおくと、$K_\lambda \geq M > 0$ が分かる。

実際、$K_\lambda = 0$ を仮定すると、($H_2$) および $\Phi_*(t) \geq 0$ for $t \geq 0$ より

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= \int_{\boldsymbol{R}^N}\{\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi_*((u_n)_+) - \lambda F(x,u_n)\}dx \\ &\leq \frac{1}{\ell}\int_{\boldsymbol{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2dx - \lambda\int_{\boldsymbol{R}^N}F(x,u_n)dx \end{aligned} \tag{6.15}$$

ゆえ、(6.7) から $\limsup_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \leq 0$ となるのだが、これは (4.10) および $c_\lambda > 0$ に反する。ゆえに、$K_\lambda > 0$ である。

つぎに、$K_\lambda \geq M$ を示す。まず、(1.4) および ($H_2$) より $\ell^* \leq \dfrac{\phi_*(t)t^2}{\Phi_*(t)} \leq m^*$ for $t > 0$ だから

$$\frac{1}{m^*}\int_{\boldsymbol{R}^N}\phi_*((u_n)_+)(u_n)_+^2dx \leq \int_{\boldsymbol{R}^N}\Phi_*((u_n)_+)dx \leq \zeta_3(\|u_n\|_{\Phi_*}) \tag{6.16}$$

同様に、($H_2$) より

$$\zeta_0(\|\nabla u_n\|_\Phi) \leq \int_{\boldsymbol{R}^N}\Phi(|\nabla u_n|)dx \leq \frac{1}{\ell}\int_{\boldsymbol{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2dx \tag{6.17}$$

この (6.16), (6.17) と (2.9) を組み合わせて

$$\begin{aligned} &\zeta_3^{-1}\Big(\frac{1}{m^*}\int_{\boldsymbol{R}^N}\phi_*((u_n)_+)(u_n)_+^2dx\Big) \\ &\leq S_0\,\zeta_0^{-1}\Big(\frac{1}{\ell}\int_{\boldsymbol{R}^N}\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2dx\Big) \end{aligned} \tag{6.18}$$

となり、$n \to \infty$ として

$$\zeta_3^{-1}\Big(\frac{K_\lambda}{m^*}\Big) \leq S_0\,\zeta_0^{-1}\Big(\frac{K_\lambda}{\ell}\Big) \tag{6.19}$$

である。$\zeta_0(t) = \min\{t^{\ell}, t^m\}$, $\zeta_3(t) = \max\{t^{\ell^*}, t^{m^*}\}$ に注意して (6.19) の $K_\lambda$ を求めると、(6.10) の $M$ で $K_\lambda \geq M$ と評価される。

最後に、$\tau > 0$ を $m < \tau < \ell^*$ の範囲にとって

$$\begin{aligned}
& I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\tau}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \\
= & \int_{\boldsymbol{R}^N} \{\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi_*((u_n)_+) - \lambda F(x, u_n)\}dx \\
& -\frac{1}{\tau}\int_{\boldsymbol{R}^N} \{\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 - \phi_*((u_n)_+)(u_n)_+^2 - \lambda \bar{f}(x, u_n)u_n\}dx \\
\geq & \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\tau}\right)\int_{\boldsymbol{R}^N} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx \\
& +\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\ell^*}\right)\int_{\boldsymbol{R}^N} \phi_*((u_n)_+)(u_n)_+^2 dx \\
& -\lambda\int_{\boldsymbol{R}^N} F(x, u_n)dx + \frac{\lambda}{\tau}\int_{\boldsymbol{R}^N} \bar{f}(x, u_n)u_n dx
\end{aligned} \tag{6.20}$$

ゆえ、$n \to \infty$ として

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\tau}\right)K_\lambda + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\ell^*}\right)K_\lambda \geq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\ell^*}\right)M \tag{6.21}$$

これは矛盾である。したがって、$u \neq 0$ でなければならない。□

**Remark 6.3.**

1. $\ell \leq m$ および $\ell^* \leq m^*$ を仮定するだけではなく、さらに

$$\ell \leq m < \ell^* \leq m^*$$

   の場合を考察した。今回は十分大きな $\lambda > 0$ に対する結果となったのだが、実際は、任意の $\lambda > 0$ に対して非自明解 $u = u_\lambda \geq 0$ があるのではないかと思われる。

2. 逆の $m \geq \ell^*$ の場合は今後の課題である。このときは、解を持ち得る $\lambda$ の範囲が限定されて、十分大きな $\lambda$ での非負の非自明解は存在しないのではないかと思われる。

3. 仮定 $(\mathrm{H}_1)$-$(\mathrm{H}_2)$ の下で $L_\Phi(\Omega)$ は回帰的である。ここではその事実を随所に活用することができた。$L_\Phi(\Omega)$ が回帰的とは限らないない場合の考察は残されている。

## References


[1] A. Adams and J. F. Fournier, *Sobolev Spaces, 2nd ed.*, Academic Press, 2003.

[2] J.-P. Aubin and I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[3] V. Benci and G. Cerami, *Existence of positive solutions of the equation* $-\Delta u + a(x)u = u^{(N+2)/(N-2)}$ *in* $\boldsymbol{R}^N$, J. Funct. Anal. **88** (1990), 90–117.

[4] H. Brezis, *Some variational problems with lack of compactness*, Nonlinear functional analysis and its applications, Part 1 (Berkeley, Calif., 1983), 165–201, Proc. Sympos. Pure Math., 45, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[5] H. Brézis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[6] J. García Azorero and I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 877–895.

[7] M. Guedda and L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 879–902.

[8] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ja. B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Translated from the first Russian edition by L. F. Boron, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[9] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, The limit case, I*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145–201.

[10] E. A. de B. Silva and S. H. M. Soares, *Quasilinear Dirichlet problems in $\boldsymbol{R}^n$ with critical growth*, Nonlinear Anal. **43** (2001), 1–20.

[11] E. A. B. Silva and M. S. Xavier, *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003), 341–358.