数理解析研究所講究録 1410 巻 2005 年 139-153

Symplectic Lie 環の普遍包絡環の permanent 型中心元

伊藤稔（鹿児島大学理学部）
Minoru ITOH (Faculty of Science, Kagoshima University)

序論. Symplectic Lie 環の普遍包絡環の中心の新しい生成元を得たことを報告する．これは最近和地によって与えられた直交 Lie 環の普遍包絡環の中心元 ([W]) の類似と見なせる．和地の中心元は「列行列式 (column-determinant)」と呼ばれる単純な非可換行列式で表され, 既約表現における固有値が簡単に計算できるという点で優れている．本稿で与える中心元は「列パーマネント (column-permanent)」という非可換パーマネントで表され, やはり固有値が簡単に計算できるという利点を持つ.

固有値の明瞭さと比べるとこの元が普遍包絡環の中心元であることはあまり明らかではない．しかしこの中心性も次のような手順で証明できる．この列パーマネントで表される元とは別に,「対称化したパーマネント (symmetrized permanent)」で表される普遍包絡環の元を考える．既に述べたように前者は固有値が簡単に計算できるが, その中心性はあまり明らかではない．逆に後者は中心性は明らかだが, 固有値の計算は困難である．この一見異なる二つの元が実は一致する．この二つの表示のあいだの等号を示すことで前者の中心性の問題と後者の固有値の問題が同時に解決できるのである．同様の議論は和地の中心元に対しても有効である.

主結果を説明しよう．$J \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ を非退化な N 次の交代行列とする．Symplectic 群はこの J から決まる双線型形式を不変にする一次変換全体として実現される:

$$Sp(J) = \{g \in GL_N \,|\, {}^t g J g = J\}.$$

対応する Lie 環は次のように表される:

$$\mathfrak{sp}(J) = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \,|\, {}^t Z J + JZ = 0\}.$$

この $\mathfrak{sp}(J)$ の元として $F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)} = E_{ij} - J^{-1}E_{ji}J$ をとる（ここで E_{ij} は $\mathfrak{gl}_N$ の標準的な基底)．そしてこれを成分とする行列 $F^{\mathfrak{sp}(J)} = (F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)})_{1\le i,j\le N}$ を考える．以下この行列の成分を普遍包絡環 $U(\mathfrak{sp}(J))$ の元と見なして議論を進める.

表現論的には

$$J = J_0 = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}$$

の場合が重要である. このときには $\mathfrak{sp}(J_0)$ の三角分解が次のように取れる:

$$\mathfrak{sp}(J_0) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+. \tag{0.1}$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ はそれぞれ $i > j$, $i = j$, $i < j$ となるような $F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ で生成される $\mathfrak{sp}(J_0)$ の部分環である. つまり行列 $F^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ の下三角部分, 対角部分, 上三角部分の成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属している. この $\mathfrak{sp}(J_0)$ を symplectic Lie 環の「split 実現」と呼ぶ.

このsplit 実現における次の結果が本稿の主定理である:

定理 A. 次の元は任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{sp}(J_0))$ の中心元になる:

$$D_k(u) = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} \frac{1}{I!} \operatorname{per}(\widetilde{F}_I^{\mathfrak{sp}(J_0)} + u\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I \operatorname{diag}(\tfrac{k}{2}, \tfrac{k}{2} - 1, \ldots, -\tfrac{k}{2} + 1)).$$

さらに $D_2(u), D_4(u), \ldots, D_N(u)$ は $U(\mathfrak{sp}(J_0))$ の中心を生成する.

記号を説明する. まず per は「列パーマネント (column-permanent)」と呼ばれる非可換パーマネントであり, 一般に（可換とは限らない）結合的 $\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{A}$ の元を成分とする行列 $Z = (Z_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ に対し次のように定める:

$$\operatorname{per} Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} Z_{\sigma(1)1} Z_{\sigma(2)2} \cdots Z_{\sigma(N)N}.$$

よって $\operatorname{per} Z$ もまた $\mathcal{A}$ の元となる. 定理では $\mathcal{A}$ として普遍包絡環を考えている. また $\widetilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)} = (\widetilde{F}_{ij}^{\mathfrak{sp}(J_0)})$ は次の行列を表す:

$$\widetilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)} = F^{\mathfrak{sp}(J_0)} + \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0).$$

さらに非減少数列 $I = (i_1, \ldots, i_k)$ に対し, $(\widetilde{F}_{i_a i_b}^{\mathfrak{sp}(J_0)})_{1 \le a,b \le k}$ という行列を $\widetilde{F}_I^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ と表す. 最後に $I! = m_1! \cdots m_N!$ とおく. ただし $m_1, \ldots, m_N$ は $I = (i_1, \ldots, i_k)$ の重複度を表す:

$$I = (i_1, \ldots, i_k) = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{m_1}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m_2}, \ldots, \overbrace{N, \ldots, N}^{m_N}).$$

この中心元 $D_k(u)$ の既約表現における固有値は簡単に計算できる（三角分解 (0.1) に注意すればよい. 定理 3.4 を参照のこと）. しかし $D_k(u)$ の中心性はあまり明らかではない.

この $D_k(u)$ とは別に, 次のような普遍包絡環の中心元も考える:

$$D'_k(u) = \mathrm{Per}_k(F + u\mathbf{1}\,;\, \tfrac{k}{2} - 1, \tfrac{k}{2} - 2, \ldots, -\tfrac{k}{2} + 1, 0).$$

ここで Per_k は次のような「対称化したパーマネント」を表す:

$$\mathrm{Per}_k(Z\,;\, a_1, \ldots, a_k) = \frac{1}{k!} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_N} \frac{1}{I!} Z_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma'(1)}}(a_1) \cdots Z_{i_{\sigma(k)} i_{\sigma'(k)}}(a_k).$$

ただし $Z_{ij}(a) = Z_{ij} + \delta_{ij} a$ とする. $D'_k(u)$ の中心性はこの Per_k の不変性からすぐにわかる（命題 3.2）. しかし $D'_k(u)$ の固有値を直接計算するのは困難である.

実はこの一見異なる二つの元は一致する:

定理 B. 次の等式が成立する: $D_k(u) = D'_k(u)$.

この定理の証明は略すが, 対称テンソル代数を利用した計算で示すことができる ([I4]). $D_k(u)$ の中心性と $D'_k(u)$ の固有値はこの定理 B からすぐに導ける（$D_k(u)$ の固有値と $D'_k(u)$ の中心性は明らかだから）. このように二つのパーマネントのあいだの等号を示すことで二つの問題が同時に解決されるのである.

本稿で与える中心元は最近和地によって与えられた直交 Lie 環の普遍包絡環の中心元 ([W]) の symplectic Lie 環における対応物と見なせる（さらにその原型には一般線型 Lie 環の普遍包絡環の中心元である Capelli 行列式がある）. 実際これらの元も 2 種類の非可換行列式による表示を持つ. 第一の表示は「列行列式 (column-determinant)」によるものであり, この表示の下ではその既約表現における固有値が簡単に計算できる. 第二の表示は「対称化した行列式 (symmetrized determinant)」によるもので, この表示の下では普遍包絡環における中心性を簡単に確かめることができる. これらの表示の一致を示すことで, 第一の表示の中心性の問題, そして第二の表示の固有値の問題という二つの問題がやはり同時に解決されるのである. これらについては §1, §2 で詳しく説明する.

1. 一般線型 Lie 環の普遍包絡環の Capelli 型中心元. まず一般線型 Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_N)$ のよく知られた中心元である Capelli 行列式, さらにその小行列式による拡張, パーマネントによる類似を復習する. これらは本稿で与える symplectic Lie 環の普遍包絡環の中心元 (§3), また和地の与えた直交 Lie 環の普遍包絡環の中心元 (§2.2, §2.3) の原型と見なせる.

1.1. まず Capelli 行列式を復習する. E_{ij} を一般線型 Lie 環 $\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ の標準的な基底とする. そして $E = (E_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ という行列を考える. これを $\mathrm{Mat}_N(U(\mathfrak{gl}_N))$ の元と

見なして次の行列式を普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_N)$ で考える．これは「Capelli 行列式」という名前で知られている ([Ca1], [H], [U1]):

$$C^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \det(E + u\mathbf{1} + \operatorname{diag} \natural_N).$$

ただし $\natural_N$ は $\natural_N = (N-1, N-2, \ldots, 0)$ という長さ N の数列である．また det は「列行列式 (column-determinant)」と呼ばれる非可換行列式である．つまり任意の（成分が非可換かも知れない）N 次の正方行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し，

$$\det Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) Z_{\sigma(1)1} Z_{\sigma(2)2} \cdots Z_{\sigma(N)N}$$

とおく．上の式ではこのような行列式を普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中で計算している．この $C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は普遍包絡環の中心元になることが知られている:

定理 1.1. $C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心元になる．

Capelli 行列式は Capelli 恒等式との関わりで知られている．既約表現における固有値が簡単に計算できるという点でも興味深い:

定理 1.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ で決まる $\mathfrak{gl}_N$ の既約表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}$ に対して次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}(C^{\mathfrak{gl}_N}(u)) = (u + l_1) \cdots (u + l_N).$$

ただし $l_i = \lambda_i + N - i$ とする．

これは以下の手順ですぐにわかる．次のような $\mathfrak{gl}_N$ の三角分解を考える:

$$\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+. \tag{1.1}$$

$\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+$ はそれぞれ $i > j, i = j, i < j$ を満たす E_{ij} で生成される $\mathfrak{gl}_N$ の部分環である．つまり行列 E の下三角部分, 対角部分, 上三角部分の成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+$ に属する．これに注意すると $C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の最高ウェイトベクトルへの作用は簡単に計算できる（列行列式の定義に現れる $N!$ 個の項のうち作用が 0 にならないのは単純に対角成分を掛け合わせた 1 項のみである）．定理 1.2 はそれからすぐに導かれる．

このように $C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の固有値はすぐにわかるが，一方で定義式を見ただけではこの元の中心性はあまり明らかではない．しかし以下述べるように $C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ はこの列行列式による定義式の他に「対称化した行列式 (symmetrized determinant)」による表示も持つのである．

$C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ とは別に次のような普遍包絡環の中心元を考える:

$$C'^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \mathrm{Det}(E + u\mathbf{1}\,;\, \natural_N).$$

ここで Det は「対称化した行列式」という非可換行列式を表す. すなわち N 次の正方行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し,

$$\mathrm{Det}\, Z = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma,\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') Z_{\sigma(1)\sigma'(1)} Z_{\sigma(2)\sigma'(2)} \cdots Z_{\sigma(N)\sigma'(N)}$$

と定める. これはもし行列成分が可換なら通常の行列式に一致する. さらに一般に N 個のパラメータ $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ に対し次のように定義する:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Det}(Z\,;\, a_1, \ldots, a_N) \\ &\quad = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma,\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') Z_{\sigma(1)\sigma'(1)}(a_1) Z_{\sigma(2)\sigma'(2)}(a_2) \cdots Z_{\sigma(N)\sigma'(N)}(a_N). \end{aligned}$$

ここで $Z_{ij}(a) = Z_{ij} + \delta_{ij} a$ とする.

この $C'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ が普遍包絡環の中心元になることは比較的容易にわかる. 実際, 一般に次の命題が成立する:

命題 1.3. 任意の $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ に対して, 次の元は $GL_N(\mathbb{C})$ の随伴作用に関して不変となる. 特に $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心元となる.

$$\mathrm{Det}(E\,;\, a_1, \ldots, a_N).$$

これは次の二つの補題からすぐにわかる:

補題 1.4. 対称化した行列式は $g \in GL_N(\mathbb{C})$ による共役変換で不変である:

$$\mathrm{Det}(gZg^{-1}\,;\, a_1, \ldots, a_N) = \mathrm{Det}(Z\,;\, a_1, \ldots, a_N).$$

ここで Z はある結合的 $\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{A}$ の元を成分とする任意の N 次の正方行列とする.

補題 1.5. 行列 E は任意の $g \in GL_N(\mathbb{C})$ に対し次の関係式を満たす:

$$\mathrm{Ad}(g)E = {}^t g \cdot E \cdot {}^t g^{-1}.$$

ここで $\mathrm{Ad}(g)E$ は $(\mathrm{Ad}(g)E_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を意味する.

補題 1.5 は直接的な計算でわかる. 補題 1.4 も Det を外積代数を利用して表示するとすぐにわかる ([IU] などを参照のこと).

命題 1.3 から $C'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の中心性は明らかである. それに対しこの中心元の固有値を計算するのは難しい. 対称化した行列式による表示では三角分解 (1.1) が生かせないからである. しかし実際にはこの一見異なる二つの元が一致するのである:

定理 1.6 (伊藤–梅田). 次の等式が成立する: $C^{\mathfrak{gl}_N}(u) = C'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$.

一旦この定理 1.6 が示されれば, 両辺を見比べることにより (i) $C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の中心性, および (ii) $C'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の固有値の計算, という二つの問題が同時に解決されてしまう.

定理 1.6 は直接的な計算でも証明できるが, 外積代数を用いた簡潔な証明方法がある. 詳細は[IU] などを見よ.

1.2. Capelli 行列式は次のような小行列式の和に一般化できる:

$$C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le N} \det(E_I + u\mathbf{1} + \operatorname{diag}\natural_k).$$

ただし $I=(i_1,\dots,i_k)$ という数列および行列 $Z=(Z_{ij})$ に対し, $(Z_{i_a i_b})_{1\le a,b\le k}$ という小行列を Z_I で表す. この元を「k 次の Capelli 元」と呼ぶ. この $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ もやはり普遍包絡環の中心元になる:

定理 1.7. $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は任意の $u\in\mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心元になる.

さらに次のようなパーマネントによる類似も考えられる ([N]):

$$D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le N} \frac{1}{I!}\operatorname{per}(E_I + u\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I \operatorname{diag}\natural_k).$$

ここで per は「列パーマネント (column-permanent)」を表す. すなわち N 次の正方行列 $Z=(Z_{ij})$ に対し,

$$\operatorname{per} Z = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} Z_{\sigma(1)1}\cdots Z_{\sigma(N)N}$$

と定める. また $I! = m_1!\cdots m_N!$ とおく. ただし $m_1,\dots,m_N$ は数列 $I=(i_1,\dots,i_k)$ の重複度である:

$$I=(i_1,\dots,i_k)=(\overbrace{1,\dots,1}^{m_1},\overbrace{2,\dots,2}^{m_2},\dots,\overbrace{N,\dots,N}^{m_N}).$$

I には一般に重複があるから, $Z_I=(Z_{i_a i_b})_{1\le a,b\le k}$ は必ずしも Z の小行列とは限らない. この $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ もやはり普遍包絡環の中心元となる:

定理 1.8. $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は任意の $u\in\mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心元になる.

注意. 実際には $\{C_1^{\mathfrak{gl}_N}(u),\dots,C_N^{\mathfrak{gl}_N}(u)\}$, $\{D_1^{\mathfrak{gl}_N}(u),\dots,D_N^{\mathfrak{gl}_N}(u)\}$ がそれぞれ $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心の生成系になる.

$C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の既約表現における固有値は簡単に計算できる. 証明は定理 1.2 とほぼ同じである:

定理 1.9. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ で決まる $\mathfrak{gl}_N$ の既約表現 $\pi = \pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}$ において, 次の等式が成立する:

$$\pi(C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N} (u + \lambda_{i_1} + k - 1)(u + \lambda_{i_2} + k - 2) \cdots (u + \lambda_{i_k}),$$
$$\pi(D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)) = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} (u + \lambda_{i_1} - k + 1)(u + \lambda_{i_2} - k + 2) \cdots (u + \lambda_{i_k}).$$

このように列行列式, 列パーマネントによる定義式を見ると $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の固有値が簡単に計算できるが, 一方でその中心性はそれほど明らかでない. しかし上記の定義式の他に以下のような「対称化した行列式」および「対称化したパーマネント」による表示も可能なのである.

次のような普遍包絡環の中心元を考える:

$$C_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \mathrm{Det}_k(E + u\mathbf{1}\,;\natural_k), \qquad D_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \mathrm{Per}_k(E + u\mathbf{1}\,; -\natural_k).$$

ここで Det_k と Per_k は次のように定める. まず

$$\mathrm{Per}\, Z = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_N} Z_{\sigma(1)\sigma'(1)} \cdots Z_{\sigma(N)\sigma'(N)}$$

とおく. そして $\mathrm{Det}_k(Z)$, $\mathrm{Per}_k(Z)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_k(Z) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N} \mathrm{Det}\, Z_I \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') Z_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma'(1)}} \cdots Z_{i_{\sigma(k)} i_{\sigma'(k)}}, \\
\mathrm{Per}_k(Z) &= \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} \frac{1}{I!} \mathrm{Per}\, Z_I \\
&= \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} \frac{1}{I!} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_k} Z_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma'(1)}} \cdots Z_{i_{\sigma(k)} i_{\sigma'(k)}}.
\end{aligned}$$

さらに k 個のパラメータ $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ を含む場合を次のように定める:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}_k(Z\,; a_1, \dots, a_k) \\
&\quad = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') Z_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma'(1)}}(a_1) \cdots Z_{i_{\sigma(k)} i_{\sigma'(k)}}(a_k), \\
&\mathrm{Per}_k(Z\,; a_1, \dots, a_k) \\
&\quad = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} \frac{1}{I!} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_k} Z_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma'(1)}}(a_1) \cdots Z_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma'(1)}}(a_k).
\end{aligned}$$

この函数 Det_k, Per_k は共役変換に関する不変性を持つ:

補題 1.10. 任意の $g \in GL_N(\mathbb{C})$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\mathrm{Det}_k(gZg^{-1}\,;a_1,\dots,a_k) = \mathrm{Det}_k(Z\,;a_1,\dots,a_k),$$
$$\mathrm{Per}_k(gZg^{-1}\,;a_1,\dots,a_k) = \mathrm{Per}_k(Z\,;a_1,\dots,a_k).$$

よって, 補題 1.5 と組み合わせることにより, 次の命題が得られる:

命題 1.11. 任意のパラメータ $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{C}$ に対し, 次の元は $GL_N(\mathbb{C})$ の随伴作用で不変になる. 特に $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心元となる.

$$\mathrm{Det}_k(E\,;a_1,\dots,a_k), \qquad \mathrm{Per}_k(E\,;a_1,\dots,a_k).$$

命題 1.11 より $C_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し普遍包絡環の中心元になる. 一方でこれらの中心元の既約表現における固有値を直接計算するのは難しい. このように $C_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ （という表示式）は $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ と対照的である.

しかし実際は一見異なるこの 2 種類の表示式が一致するのである:

定理 1.12. 次の等式が成立する:

$$C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = C_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u), \qquad D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = D_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u).$$

この定理も定理 1.6 と同様の方法で証明することができる. このように二つの表示の同値性を示すことで (i) $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ と $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の中心性, そして (ii) $C_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ と $D_k'^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の既約表現における固有値の決定, という二つの問題を同時に解決することができる.

2. 直交 Lie 環の普遍包絡環の Capelli 型中心元. Symplectic Lie 環における主結果を述べる前に, 直交 Lie 環の場合を見ておく. 直交 Lie 環の普遍包絡環の中心元で Capelli 行列式の類似と見なせるものが二つ知られている. 一つは Howe と梅田[HU] によって与えられたもので, もう一つは最近和地[W] によって与えられたものである.

2.1. まず直交 Lie 環の一般的な実現から始める. $S \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ を非退化な N 次の対称行列とする. 直交群は S で決まる双線型形式を不変にする一次変換全体として実現できる:

$$O(S) = \{g \in GL_N \mid {}^t gSg = S\}.$$

対応する Lie 環は次のように表される:

$$\mathfrak{o}(S) = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \mid {}^t ZS + SZ = 0\}.$$

この直交 Lie 環 $\mathfrak{o}(S)$ の元として $F_{ij}^{\mathfrak{o}(S)} = E_{ij} - S^{-1}E_{ji}S$ を取り, これを成分とする $F^{\mathfrak{o}(S)} = (F_{ij}^{\mathfrak{o}(S)})_{1\le i,j\le N}$ という行列を考える（ただし E_{ij} は $\mathfrak{gl}_N$ の標準的な基底）. これを $\mathrm{Mat}_N(U(\mathfrak{o}(S)))$ の元と見なす. 直接的な計算で次の関係式がわかる:

補題 2.1. 任意の $g \in O(S)$ に対して, 次の等式が成立する:

$$\mathrm{Ad}(g)F^{\mathfrak{o}(S)} = {}^t g \cdot F^{\mathfrak{o}(S)} \cdot {}^t g^{-1}.$$

ただし $\mathrm{Ad}(g)F^{\mathfrak{o}(S)}$ は $(\mathrm{Ad}(g)F_{ij}^{\mathfrak{o}(S)})_{1 \le i,j \le N}$ を意味する.

この関係式と補題 1.10 を組み合わせることで次の命題を得る:

命題 2.2. 次の元は $O(S)$ の随伴作用で不変である. 特に $U(\mathfrak{o}(S))$ の中心元となる.

$$\mathrm{Det}_k(F^{\mathfrak{o}(S)}; a_1, \ldots, a_k), \qquad \mathrm{Per}_k(F^{\mathfrak{o}(S)}; a_1, \ldots, a_k).$$

よって一般線型 Lie 環のときと同様に, 対称化した行列式および対称化したパーマネントを用いて $U(\mathfrak{o}(S))$ の中心元をいろいろ構成することができる. それに対し列行列式や列パーマネントで $U(\mathfrak{o}(S))$ の中心元を構成するのは少なくとも一般の S に対しては難しい.

しかし, 特別な S に対しては列行列式で表される Capelli 行列式の類似が知られている. 以下 実際に $S = \mathbf{1}$ の場合と $S = S_0 = (\delta_{i,N+1-j})_{1 \le i,j \le N}$ の場合の結果を見る.

2.2. まず S が単位行列 $\mathbf{1}$ に一致する場合を見る. このとき直交 Lie 環は交代行列全体のなす Lie 環として実現される:

$$\mathfrak{o}(\mathbf{1}) = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \mid Z + {}^t Z = 0\}.$$

このとき Howe と梅田によって次のような Capelli 行列式の類似が得られている.

定理 2.3 (Howe–梅田). 次の元は任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{o}(\mathbf{1}))$ の中心元となる:

$$C^{\mathfrak{o}(\mathbf{1})}(u) = \det(F^{\mathfrak{o}(\mathbf{1})} + u\mathbf{1} + \mathrm{diag}\, \natural_N).$$

Capelli 行列式と同様, これは対称化した行列式で書き直すことができる. $C'^{\mathfrak{o}(\mathbf{1})}(u)$ とは別に, 次のような普遍包絡環の元を考える:

$$C'^{\mathfrak{o}(\mathbf{1})}(u) = \mathrm{Det}(F^{\mathfrak{o}(\mathbf{1})} + u\mathbf{1}; \natural_N).$$

これは命題 2.2 より任意の $u \in \mathbb{C}$ に対して普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(\mathbf{1}))$ の中心元になる. 実はこの $C'^{\mathfrak{o}(\mathbf{1})}(u)$ は $C^{\mathfrak{o}(\mathbf{1})}(u)$ と一致する:

定理 2.4（伊藤–梅田）．次の等式が成立する: $C^{\mathfrak{o}(1)}(u) = C'^{\mathfrak{o}(1)}(u)$.

定理 2.3 はこの定理 2.4 からすぐに出る．定理 2.4 は一般線型 Lie 環の場合の定理 1.6 の証明とほぼ同じ計算で証明できる．詳細は[IU] を参照のこと．

注意. (1) 一般線型 Lie 環の場合と同様に次のような $C^{\mathfrak{o}(1)}(u)$ の一般化が考えられる:

$$C_k^{\mathfrak{o}(1)}(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \det(F_I^{\mathfrak{o}(1)} + u\mathbf{1} + \operatorname{diag} \natural_k).$$

これはまた対称化した行列式で次のように書き直せる:

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \det(F_I^{\mathfrak{o}(1)} + u\mathbf{1} + \operatorname{diag} \natural_k) = \operatorname{Det}_k(F^{\mathfrak{o}(1_N)} + u\mathbf{1}\,;\, \natural_k).$$

(2) $C_k^{\mathfrak{o}(1)}(u)$ は Capelli 元 $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ に非常によく似ているが，残念ながらその固有値が簡単に計算できるわけではない．なぜなら $\mathfrak{o}(1)$ という実現においては，その三角分解は (1.1) のようにシンプルには取れないからである．

2.3. 次に $S = S_0 = (\delta_{i,N+1-j})$ の場合を見てみる:

$$\mathfrak{o}(S_0) = \{Z = (Z_{ij}) \in \mathfrak{gl}_N \mid Z_{ij} + Z_{N+1-j,N+1-i} = 0\}.$$

この「split 実現」では三角分解を次のように取ることができる:

$$\mathfrak{o}(S_0) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ は $i > j$, $i = j$, $i < j$ であるような $F_{ij}^{\mathfrak{o}(S_0)}$ で生成される $\mathfrak{o}(S_0)$ の部分環である．つまり行列 $F^{\mathfrak{o}(S_0)}$ の下三角部分，対角部分，上三角部分の成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する．よって もし Capelli 行列式のように「$F^{\mathfrak{o}(S_0)}$ の列行列式」という形で表される普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心元があれば，その固有値は非常に簡単に計算できるはずである．実際に次のような中心元が和地によって与えられた:

定理 2.5（和地）．任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し，次の元は普遍包絡環の中心元になる:

$$C^{\mathfrak{o}(S_0)}(u) = \det(F^{\mathfrak{o}(S_0)} + u\mathbf{1} + \operatorname{diag} \tilde{\natural}_N).$$

ここで $\tilde{\natural}_N$ は次のような長さ N の数列である:

$$\tilde{\natural}_N = \begin{cases} (\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \ldots, 0, 0, \ldots, -\frac{N}{2} + 1), & N\text{: even}, \\ (\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \ldots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{N}{2} + 1), & N\text{: odd}. \end{cases}$$

和地はこの定理を直接的な計算で示した ([W]) が，この中心性の証明はそれほど易しくはない．一方で上記の三角分解に気を付けるとこの元の固有値の計算は非常に易しい．

定理 2.6 (和地). $\pi_\lambda^{\mathfrak{o}(S_0)}$ を分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{[N/2]})$ で決まる $\mathfrak{o}(S_0)$ の既約表現とする ($[N/2]$ は $N/2$ を越えない最大の整数). このとき次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{o}(S_0)}(C^{\mathfrak{o}(S_0)}(u))=\begin{cases}(u^2-l_1^2)(u^2-l_2^2)\cdots(u^2-l_{N/2}^2), & N\text{: even},\\ u(u^2-l_1^2)(u^2-l_2^2)\cdots(u^2-l_{[N/2]}^2), & N\text{: odd}.\end{cases}$$

ただし $l_i=\lambda_i+N/2-i$ とする.

$C^{\mathfrak{o}(S_0)}(u)$ は対称化した行列式で表すこともできる. 次の普遍包絡環の元を考えよう:

$$C'^{\mathfrak{o}(S_0)}(u)=\mathrm{Det}(F^{\mathfrak{o}(S_0)}+u\mathbf{1}\,;\,\tilde{\mathfrak{h}}_N).$$

命題 2.2 からこの元は任意の $u\in\mathbb{C}$ に対して中心元になることが容易にわかる. しかしこの元の既約表現における固有値はそれほど簡単に計算できるわけではない. しかし複雑な計算によって次の結果が得られている:

定理 2.7 (伊藤). 次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{o}(S_0)}(C'^{\mathfrak{o}(S_0)}(u))=\begin{cases}(u^2-l_1^2)(u^2-l_2^2)\cdots(u^2-l_{N/2}^2), & N\text{: even},\\ u(u^2-l_1^2)(u^2-l_2^2)\cdots(u^2-l_{[N/2]}^2), & N\text{: odd}.\end{cases}$$

これは $C^{\mathfrak{o}(S_0)}(u)$ の固有値に一致する. つまりこれで $C^{\mathfrak{o}(S_0)}(u)=C'^{\mathfrak{o}(S_0)}(u)$ という等式が成立することがわかった:

定理 2.8 (和地). 次の等式が成立する:

$$\det(F^{\mathfrak{o}(S_0)}+u\mathbf{1}+\mathrm{diag}\,\tilde{\mathfrak{h}}_N)=\mathrm{Det}(F^{\mathfrak{o}(S_0)}+u\mathbf{1}\,;\,\tilde{\mathfrak{h}}_N).$$

この等式は和地によって実際に以上のような方法で与えられたものである ([W]). つまりこの証明は定理 2.5, 定理 2.7 というふたつの非自明な結果に基づく.

しかし定理 2.8 を直接的な計算で示すことも可能である (その計算は $\mathfrak{gl}_N$ の場合の定理 1.6, $\mathfrak{o}(1)$ の場合の定理 2.4 よりは複雑である. 詳細は[I3] を参照のこと). そして一旦定理 2.8 が示されれば定理 2.5, 定理 2.7 は逆に定理 2.8 から導くことが可能なのである.

2.4. さらにこれらの結果は小行列式の等式に一般化できる:

定理 2.9 (和地). 次の元は任意の $u\in\mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心元となる:

$$C_k^{\mathfrak{o}(S_0)}(u)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le N}\det(\widetilde{F}_I^{\mathfrak{o}(S_0)}+u\mathbf{1}+\mathrm{diag}(\tfrac{k}{2},\tfrac{k}{2}-1,\ldots,-\tfrac{k}{2}+1)).$$

ここで $\widetilde{F}^{\mathfrak{o}(S_0)}$ は次のような行列である:

$$\widetilde{F}^{\mathfrak{o}(S_0)}=\begin{cases}F^{\mathfrak{o}(S_0)}-\mathrm{diag}(1,\ldots,1,0,\ldots,0), & N\text{: even},\\ F^{\mathfrak{o}(S_0)}-\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\tfrac{1}{2},0,\ldots,0), & N\text{: odd}.\end{cases}$$

この中心元もやはり対称化した行列式で書き表すことができる:

定理 2.10 (和地). 次の等式が成立する:

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le N} \det(\widetilde{F}_I^{\mathfrak{o}(S_0)} + u\mathbf{1} + \mathrm{diag}(\tfrac{k}{2}, \tfrac{k}{2}-1, \ldots, -\tfrac{k}{2}+1)) = \mathrm{Det}_k(F^{\mathfrak{o}(S_0)} + u\mathbf{1}\,;\,\tilde{\mathfrak{h}}_k).$$

これらの定理は定理 2.5 および定理 2.8 から導かれる. 詳しくは[W] を参照のこと.

注意. 一般の S に対し次の等式が成立する [IU]:

$$\mathrm{Det}_{2k}(F^{\mathfrak{o}(S)}\,;\,\tilde{\mathfrak{h}}_{2k}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le N} \mathrm{Pf}(F^{\mathfrak{o}(S)}S)_I\,\mathrm{Pf}(S^{-1}F^{\mathfrak{o}(S)})_I. \tag{2.1}$$

ただし $2k$ 次の交代行列 $Z=(Z_{ij})$ に対し, パフィアン (Pfaffian) $\mathrm{Pf}\,Z$ を次で定義する:

$$\mathrm{Pf}\,Z = \frac{1}{2^k k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2k}} \mathrm{sgn}(\sigma) Z_{\sigma(1)\sigma(2)} Z_{\sigma(3)\sigma(4)}\cdots Z_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}.$$

3. Symplectic Lie 環の普遍包絡環の Capelli 型中心元. 今節では本稿の主結果を述べる. つまり symplectic Lie 環の普遍包絡環における Capelli 行列式の類似である. この中心元は前節で述べた和地による中心元 $C_k^{\mathfrak{o}(S_0)}(u)$ の直接的な対応物と見なせる. しかし列行列式ではなく列パーマネントで与えられるのである.

3.1. まず symplectic Lie 環の一般的な実現から始める. 対称化した行列式および対称化したパーマネントはどちらもこの一般的な実現において普遍包絡環の中心元を構成する手段となる.

$J\in\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ を非退化な N 次の交代行列とする (よって N は偶数となる). Symplectic 群はこの J で決まる双線型形式を不変にする一次変換全体として実現される:

$$Sp(J) = \{g\in GL_N \mid {}^t gJg = J\}.$$

対応する Lie 環は次のように表される:

$$\mathfrak{sp}(J) = \{Z\in\mathfrak{gl}_N \mid {}^tZJ + JZ = 0\}.$$

この $\mathfrak{sp}(J)$ の元として $F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)} = E_{ij} - J^{-1}E_{ji}J$ を取り, これを成分とする $F^{\mathfrak{sp}(J)} = (F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)})_{1\le i,j\le N}$ という行列を考える. これを $\mathrm{Mat}_N(U(\mathfrak{sp}(J)))$ の元と見なして議論を進める. 直接的な計算でこの行列は次のような関係式を満たすことがわかる:

補題 3.1. 任意の $g \in Sp(J)$ に対し次の等式が成立する:

$$\mathrm{Ad}(g)F^{\mathfrak{o}(J)} = {}^t g \cdot F^{\mathfrak{sp}(J)} \cdot {}^t g^{-1}.$$

ここで $\mathrm{Ad}(g)F^{\mathfrak{sp}(J)}$ は $(\mathrm{Ad}(g)F^{\mathfrak{sp}(J)}_{ij})_{1\le i,j\le N}$ という行列を意味する.

この関係式と補題 1.10 を組み合わせることで次の補題がわかる:

命題 3.2. 次の元は $Sp(J)$ の随伴作用で不変である. 特に普遍包絡環 $U(\mathfrak{sp}(J))$ の中心元となる.

$$\mathrm{Det}_k(F^{\mathfrak{sp}(J)}; a_1, \ldots, a_k), \qquad \mathrm{Per}_k(F^{\mathfrak{sp}(J)}; a_1, \ldots, a_k).$$

このように対称化した行列式および対称化したパーマネントは $\mathfrak{gl}_N$ の場合と同様に $U(\mathfrak{sp}(J))$ の中心元を構成する手段として有効である. その一方, 列行列式や列パーマネントは少なくとも任意の J に対する $U(\mathfrak{sp}(J))$ の中心元の構成手段とはならないようである.

3.2. しかし symplectic Lie 環を split 実現した場合には列パーマネントを用いて普遍包絡環の中心元を構成することができる. つまり

$$J = J_0 = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}$$

の場合である. この場合の実現 $\mathfrak{sp}(J_0)$ は表現論的に具合いが良い. 実際三角分解が次のように取れる:

$$\mathfrak{sp}(J_0) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ はそれぞれ $i > j$, $i = j$, $i < j$ となるような $F^{\mathfrak{sp}(J_0)}_{ij}$ で生成される $\mathfrak{sp}(J_0)$ の部分環である. すなわち行列 $F^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ の下三角部分, 対角部分, 上三角部分の成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する. この $\mathfrak{sp}(J_0)$ を symplectic Lie 環の「split 実現」と呼ぶ.

本稿の主題は次の $U(\mathfrak{sp}(J_0))$ の元である:

$$D^{\mathfrak{sp}(J_0)}_k(u) = \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le N} \frac{1}{I!}\,\mathrm{per}(\widetilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)}_I + u\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I\,\mathrm{diag}(\tfrac{k}{2}, \tfrac{k}{2}-1, \ldots, -\tfrac{k}{2}+1)).$$

ここで $\widetilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ は次の行列を意味する:

$$\widetilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)} = F^{\mathfrak{sp}(J_0)} + \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0).$$

次が本稿の主結果である:

定理 3.3. $D_k^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ は任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{sp}(J_0))$ の中心元となる.

この中心元は既約表現における固有値は簡単に計算できるという点で興味深い:

定理 3.4. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ で決まる $\mathfrak{sp}(J_0)$ の既約表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ に対し, 次の等式が成立する (ただし $i' = N+1-i$, $n = N/2$ とする):

$$
\begin{aligned}
\pi_\lambda^{\mathfrak{sp}(J_0)}(D_k(u)) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{\substack{1 \le i_1 \le \cdots \le i_l \le n \\ n+1 \le i_{l+1} \le \cdots \le i_k \le N}} & (u + \lambda_{i_1} - \tfrac{k}{2} + 1)(u + \lambda_{i_2} - \tfrac{k}{2} + 2) \cdots (u + \lambda_{i_l} - \tfrac{k}{2} + l) \\
& \cdot (u - \lambda_{i'_{l+1}} - \tfrac{k}{2} + l)(u - \lambda_{i'_{l+2}} - \tfrac{k}{2} + l + 1) \cdots (u - \lambda_{i'_k} + \tfrac{k}{2} - 1).
\end{aligned}
$$

これは $\mathfrak{sp}(J_0)$ の三角分解に注意するとすぐにわかる. このように $D_k^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ は中心性は明らかではないが, その固有値は簡単に計算できる.

さて $D_k^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ とは別に次のような元を新たに考える:

$$
D_k'^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u) = \mathrm{Per}_k(F^{\mathfrak{sp}(J_0)} + u\mathbf{1}\,;\, \tilde{\mathfrak{h}}_k).
$$

命題 3.2 から, この $D_k'^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ が任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し中心元となることはすぐにわかる. しかしこの元の固有値を直接計算するのは困難である.

実際にはこれら二つの元 $D_k^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$, $D_k'^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ は一致するのである:

定理 3.5. 次の等式が成立する:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le N} \frac{1}{I!} \mathrm{per}(\widetilde{F}_I^{\mathfrak{sp}(J_0)} + u\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I \,\mathrm{diag}(\tfrac{k}{2}, \tfrac{k}{2} - 1, \ldots, -\tfrac{k}{2} + 1)) \\
= \mathrm{Per}_k(F^{\mathfrak{sp}(J_0)} + u\mathbf{1}\,;\, \tilde{\mathfrak{h}}_k).
\end{aligned}
$$

定理 3.3 はこの等式からすぐに導かれる. さらにこの定理 3.5 と定理 3.4 を組み合わせることで $D_k'^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ の固有値の決定という問題も同時に解決できる. このように, $\mathfrak{gl}_N$, $\mathfrak{o}(S_0)$ の場合と同様に, 二つの非可換パーマネントを結ぶ等式を利用して二つの問題が同時に解決されるのである.

定理 3.5 は基本的には定理 1.6, 定理 2.4, 定理 2.8 などと同様の方針で証明できる. しかし定理 1.6, 定理 2.4 よりは遥かに難しく, 定理 2.8 と比べても複雑な計算になる. 詳しくは[I4] を参照のこと.

注意. (1) 実際は $D_k^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ は単に中心元であるというだけでなく, 偶数次の元たち $D_2^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u), D_4^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u), \ldots, D_N^{\mathfrak{sp}(J_0)}(u)$ が $U(\mathfrak{sp}(J_0))$ の中心を生成する.

(2) 直交 Lie 環の場合の (2.1) に対応する等式として, 次が一般の J に対して成立する:

$$\mathrm{Per}_{2k}(F^{\mathfrak{sp}(J)}\,;\,\tilde{\mathfrak{h}}_{2k}) = \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le N} \frac{1}{I!}\,\mathrm{Hf}(F^{\mathfrak{sp}(J)}J)_I\,\mathrm{Hf}(J^{-1}F^{\mathfrak{sp}(J)})_I.$$

ただし $2k$ 次の対称行列 $Z=(Z_{ij})$ に対しハフニアン (Hafnian) Hf Z を次のように定める:

$$\mathrm{Hf}\,Z = \frac{1}{2^k k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2k}} \cdot Z_{\sigma(1)\sigma(2)}Z_{\sigma(3)\sigma(4)}\cdots Z_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}.$$

REFERENCES

[Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.

[Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[H] ———, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.

[HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[I1] ———, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), 463–489.

[I2] ———, *Capelli identities for the dual pair* (O_M, Sp_N), Math. Z. **246** (2004), 125–154.

[I3] ———, *Central elements of determinant type in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, in preparation.

[I4] ———, *Central elements of permanent type in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras*, in preparation.

[IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), 333–359.

[M] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.

[MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.

[MNO] A. Molev, M. Nazarov, and G. Ol′shanskiĭ,, *Yangians and classical Lie algebras*, Uspekhi Mat. Nauk **51** (1996), 27–104; Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.

[N] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.

[NUW] M. Noumi, T. Umeda, and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on* $GL_q(n)$, Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.

[U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sūgaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in "Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants," AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu.

[U2] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint (1997).

[W] A. Wachi, *Cenral elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras*, preprint (2003).