数理解析研究所講究録 1421 巻 2005 年 26-37

離散系列に付随した等方表現について

山下 博 (Hiroshi Yamashita)

概 要

ハリシュ-チャンドラ加群に対する随伴サイクルは，半単純リー群の無限次元許容表現に対して，リー代数の冪零軌道に関わる重要な不変量を与える．また，このサイクルに現れる重複度は，単なる正の整数ではなく，等方表現とよばれる有限次元表現の次元として理解できることが知られている (Vogan [14])．等方表現や随伴多様体は，対応する既約許容表現のホィッタッカー模型と深く関係し ([20])，保型形式の研究に役立つものと期待される．

本論文では，既約な随伴多様体をもつハリシュ-チャンドラ加群に付随する等方表現を初等的に記述するための手法を整備し，それを半単純リー群の離散系列表現に適用する (定理 5)．さらに，離散系列に付随する等方表現と一般旗多様体の (閉軌道に関する) 余法束上で定義されるモーメント写像のファイバーとの関係を明らかにする (定理 6)．このようにして，離散系列表現の随伴サイクルに関して，$\mathcal{D}$-加群の理論を用いた陳 (J.-T. Chang [2], [3]) による既存の理論とは異なる新たなアプローチが得られる．

さらに，上述のモーメント写像の一般ファイバーの構造ついて考察する．ファイバーを定める点の固定部分群はファイバー集合に自然に作用するが，ユニタリ群 $SU(p,q)$ の場合に，その作用が推移的でない例を具体的に構成する (定理 18)．

1 随伴多様体と等方表現

$\mathfrak{g}$ を複素半単純リー代数とし，リー代数 $\mathfrak{g}$ の非自明な対合的自己同型に関する対称分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ とする．$\mathfrak{g}$ をリー代数にもつ連結リー群 G と，$\mathfrak{k}$ に対応する G の連結リー部分群 K をとる．いま，$\boldsymbol{X}$ を既約な $(\mathfrak{g},K)$-加群 (ハリシュ-チャンドラ加群) とする．$\boldsymbol{X}$ は対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ に対応する半単純リー群の既約許容表現を与える点でとくに重要である．$\boldsymbol{X}$ の有限次元既約 K-部分加群 (τ,V_τ) を固定し，V_τ から $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の自然なフィルトレーション $U_n(\mathfrak{g})$ $(n=0,1,\dots)$ をとおして得られる次数つき $(S(\mathfrak{g}),K)$-加群

$$M=\operatorname{gr}\boldsymbol{X}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M_n,\quad M_n=U_n(\mathfrak{g})V_\tau/U_{n-1}(\mathfrak{g})V_\tau \tag{1.1}$$

を考える．ここに $S(\mathfrak{g})\simeq\operatorname{gr}U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の対称線形代数である．このとき，$\mathfrak{k}\cdot M=\{0\}$ および $M=S(\mathfrak{p})V_\tau$ に注意せよ．$\mathfrak{g}$ のキリング形式をとおして $S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ 上の多項式全体のなす環と同一視する．$S(\mathfrak{g})$-加群 M の零化イデアル $\operatorname{Ann}_{S(\mathfrak{g})}M$ が定める代数多様体

$$\operatorname{Supp}M:=\{X\in\mathfrak{g}\mid f(X)=0\quad(\forall f\in\operatorname{Ann}_{S(\mathfrak{g})}M)\} \tag{1.2}$$

は V_τ のとりかたによらず，$\mathfrak{p}$ における冪零 K-軌道のいくつかの和で表されるアフィン錐となる．これを $(\mathfrak{g},K)$-加群 $\boldsymbol{X}$ の随伴多様体とよび，$\mathcal{V}(\boldsymbol{X})=\operatorname{Supp}M$ で表す．なお，対称対に付随した冪零軌道の基礎事項は [8] を参照せよ．

本稿では $\mathcal{V}(\boldsymbol{X})$ が既約である場合を扱う．このとき $\mathcal{V}(\boldsymbol{X})=\overline{\mathcal{O}}$ となる冪零 K-軌道 $\mathcal{O}$ $(\subset\mathfrak{p})$ がただひとつ存在する．なお，離散系列表現やユニタリ最高ウェイト表現など，楕円型軌道に付随する重要な表現が既約な随伴多様体をもつことが知られている．

さて，I を既約多様体 $\overline{\mathcal{O}}$ の定義イデアルとする．$S(\mathfrak{g})$-加群 M における $\overline{\mathcal{O}}$ の重複度は，局所化 $S(\mathfrak{g})_I$-加群 M_I の長さとして定義される．ここで重要なことは，この重複度は単なる正の整数ではなく，$X\in\mathcal{O}$ の固定部分群 $K(X):=Z_K(X)$ の然るべき有限次元表現 $(\varpi_{\mathcal{O}},\mathcal{W})$ の次元して解釈できるということである (Vogan [14], [15])．表現 $\varpi_{\mathcal{O}}$ を $\boldsymbol{X}$ に付随する等方表現という．

命題 1. $\boldsymbol{X}$ に付随する等方表現 $(\varpi_{\mathcal{O}},\mathcal{W})$ は

$$\mathcal{W}=\bigoplus_{j=0,1,\dots} I^jM/\mathfrak{m}(X)I^jM \tag{1.3}$$

で与えられる．ここに $\mathfrak{m}(X)$ は一点 $\{X\}$ に対応する $S(\mathfrak{g})$ の極大イデアルであり，商空間 $I^jM/\mathfrak{m}(X)I^jM$ には自然な $K(X)$-加群の構造を入れる．とくに，M の $S(\mathfrak{g})$ における零化イデアルが I に一致するならば，等方表現 $\varpi_{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{U}_X:=M/\mathfrak{m}(X)M$ 上に実現される．

注意 2. $\boldsymbol{X}$ が最高ウェイトをもつユニタリ表現に対応するとき，最高ウェイトベクトルが生成する既約 K-部分加群 V_τ が定める次数つき加群 $M=\operatorname{gr}\boldsymbol{X}$ の零化イデアルは素イデアルとなる (Joseph)．このとき，上の命題を用いて，$\boldsymbol{X}$ に付随する等方表現を具体的に記述することができる ([16], [20], [22])．

2　$\operatorname{Ann}_{S(\mathfrak{g})}M$ が素イデアルとなるための十分条件

ここでは前節の議論とは独立に，既約 K-加群 V_τ を固定したとき，$\mathfrak{k}\cdot M=\{0\}$, $M=S(\mathfrak{p})V_\tau$, $V_\tau=M_0$ なる次数つき $(S(\mathfrak{g}),K)$-加群 $M=\bigoplus_{n=0}^\infty M_n$ を任意に考える．このような M たちのなかで最も普遍的な加群は $\tilde{M}=S(\mathfrak{p})\otimes V_\tau$ であり，M は $\tilde{M}$ のある剰余加群 $\tilde{M}/N$ と同型になる．ゆえに，M の K-有限な双対加群 M^* は $\tilde{M}^*=S(\mathfrak{p})\otimes V_\tau^*$ における N の直交空間 $N^\perp$ と同型になる：$M^*\simeq N^\perp$.

さて，$X\in\mathfrak{p}$ とする．$V_\tau=M_0\subset M$ から商空間 $\mathcal{U}_X=M/\mathfrak{m}(X)M$ への自然な写像が全射であることに注意して，双対空間 $\mathcal{U}_X^*$ を $V_\tau^*\subset\tilde{M}^*$ の $K(X)$-部分加群と標準的に同一視する．そして，$X^n\otimes\mathcal{U}_X^*$ $(n=0,1,\dots)$ が生成する $\tilde{M}^*$ の $(S(\mathfrak{g}),K)$-部分加群を Ψ で表す．

命題 3. $\mathcal{U}_X\neq\{0\}$ と仮定し，$\mathcal{O}:=\operatorname{Ad}(K)X$ とおく．

(1) $\overline{\mathcal{O}}\subset\operatorname{Supp}M$.　(2) $\Psi\subset N^\perp$.

(3) I を $\overline{\mathcal{O}}$ を定義する $S(\mathfrak{g})$ の素イデアルとし，$S(\mathfrak{p})$ のイデアル $I\cap S(\mathfrak{p})$ の斉次元からなる生成系 $D_1,\dots,D_r$, $\deg D_j=n(j)$ $(j=1,\dots,r)$ を任意にとる．このとき，$\Psi_{n(j)}=N_{n(j)}^\perp$

($j=1,\dots,r$) であれば，M の零化イデアルは I に一致する： $\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}M=I$. とくに $\mathrm{Supp}\,M=\overline{\mathcal{O}}$ が成り立つ．ここで，$\Psi_{n(j)}$, $N^{\perp}_{n(j)}$ はそれぞれ Ψ, $N^{\perp}$ の $n(j)$ 次斉次部分を表す．

3 離散系列に付随する等方表現

前節の結果を離散系列表現の場合に適用しよう．そのため，離散系列表現が存在するためのハリシュ-チャンドラ階数条件 $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}=\mathrm{rank}\,\mathfrak{k}$ を仮定し，$\mathfrak{k}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{t}$ をとる．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を (複素化) カルタン分解にもつ半単純リー群の離散系列表現に対する $(\mathfrak{g},K)$-加群 $\boldsymbol{X}$，及び，$\boldsymbol{X}$ の最低 K-タイプ (τ,V_τ) を考える．$\boldsymbol{X}$ のハリシュ-チャンドラ添数 $\Lambda\in\mathfrak{t}^*$ が優 (支配的) となるような正ルート系をとり，非コンパクトな負のルートに対するルートベクトルたちが生成する $\mathfrak{p}$ の部分空間を $\mathfrak{p}_-$ で表す．V_τ の最高ウェイトを $\lambda\in\mathfrak{t}^*$ とするとき，K-加群のテンソル積 $\mathfrak{p}\otimes V_\tau$ において，最高ウェイトが $\lambda-\beta$ (β は非コンパクトな正のルート) の形である既約 K-部分表現たちの和を V_τ^- とかく．

このとき，$\boldsymbol{X}$, V_τ に付随する $(S(\mathfrak{g}),K)$-加群 $M=\mathrm{gr}\,\boldsymbol{X}$ について，離散系列表現の実現に関する理論（堀田-Parthasarathy [5], Schmid [10], Hecht-Schmid [4]) をから次のことが分かる．

定理 4. 最高ウェイト λ がコンパクトルートの定める壁から十分離れているとき，$(S(\mathfrak{g}),K)$-加群の同型

$$M\simeq\{S(\mathfrak{p})\otimes V_\tau\}/N,\quad N:=S(\mathfrak{p})V_\tau^- \tag{3.1}$$

が成り立つ．

さて，$\mathfrak{p}$ における冪零 K-軌道は有限個なので，$\mathcal{O}\cap\mathfrak{p}_-$ が $\mathfrak{p}_-$ で開かつ稠密であるような冪零 K-軌道 $\mathcal{O}$ がただひとつ存在し，$\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p}_-=\overline{\mathcal{O}}$ となる．命題 1, 命題 3 および 定理 4 を用いて次のふたつの定理を証明することができる．

定理 5. V_τ の最高ウェイト λ がコンパクトルートの定める壁から十分離れているとき，$\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}M$ は $\overline{\mathcal{O}}$ の定義イデアルと一致する．よって，$\mathcal{V}(\boldsymbol{X})=\overline{\mathcal{O}}$ が成り立ち，$\boldsymbol{X}$ に付随する等方表現 $\varpi_{\mathcal{O}}$ は空間 $\mathcal{W}=\mathcal{U}_X$ ($X\in\mathcal{O}\cap\mathfrak{p}_-$) 上に実現される．

定理 6. v_λ^* を V_τ の双対表現 (τ^*,V_τ^*) の最低ウェイトベクトルとする．このとき，定理 5 の仮定のもとに

$$\mathcal{U}_X^*\cap\tau^*(K)v_\lambda^*=\tau^*(\mathcal{N})^{-1}v_\lambda^* \tag{3.2}$$

が成り立つ．ここに $\mathcal{N}:=\{k\in K\mid\mathrm{Ad}(k)X\in\mathfrak{p}_-\}$ である．

注意 7. G/Q をコンパクト単純ルート全体の集合に対応した $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数 $\mathfrak{q}=\mathrm{Lie}\,Q$ が定める一般旗多様体とする．集合 $\mathcal{N}^{-1}/Q_c$, $Q_c:=Q\cap K$ は，G/Q の原点 eQ をとおる閉 K-軌道の余法束上で定義されたモーメント写像のファイバーを与える．詳しくは第 5 節を参照せよ．

4 対称対に付随するリチャードソン軌道

離散系列に付随する等方表現を記述するために重要な働きをする K の部分集合 $\mathcal{N}$ の構造を詳しく調べたい．そのため，ここでは前節での状況設定を見直して，群 G および K のリチャードソン軌道についての基本事項をまとめておこう．

複素半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのカルタン部分代数 $\mathfrak{t}$ に対して，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関するルート系を Δ で表す．Δ の正ルートの集合 Δ^+ を固定し，対応する単純ルートの集合を Π とかく．いま，S を Π の部分集合とする (前節の設定ではコンパクトな単純ルート全体の集合を考えることになる)．このとき，

$$\alpha(H_S) = 0 \ (\alpha \in S), \quad \alpha(H_S) = 1 \ (\alpha \in \Pi \backslash S) \tag{4.1}$$

なる半単純元 $H_S \in \mathfrak{t}$ が一意に存在する．H_S の随伴作用 $\operatorname{ad} H_S$ による $\mathfrak{g}$ の固有空間分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(j), \quad \mathfrak{g}(j) := \{Y \in \mathfrak{g} \mid [H_S, Y] = jY\} \tag{4.2}$$

を考える．ここに $\mathfrak{g}(j)$ は $\operatorname{ad} H_S$ の固有値 j に属する固有空間である．この分解を用いて $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数 $\mathfrak{q} := \bigoplus_{j \le 0} \mathfrak{g}(j)$ を定義する．このリー代数 $\mathfrak{q}$ は，$\mathfrak{l} := \mathfrak{g}(0)$ をレビ部分，$\mathfrak{u} := \bigoplus_{j<0} \mathfrak{g}(j)$ を冪零根基にもつ： $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ (レビ分解)．一方，

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{j:\, even} \mathfrak{g}(j), \quad \mathfrak{p} = \bigoplus_{j:\, odd} \mathfrak{g}(j) \tag{4.3}$$

とおけば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ の対称分解を与える．また，$\mathfrak{q}_c := \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{l} \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$ は $\mathfrak{k}$ の放物型部分代数であり，ベクトル空間 $\mathfrak{p}_- := \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ に随伴作用により働く：$[\mathfrak{q}_c, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-$．

次に $Q := N_G(\mathfrak{u})$ を $\mathfrak{q}$ に対応する G の放物型部分群とする．このとき，ベクトル空間 $\mathfrak{u}$ の G-飽和集合 $\operatorname{Ad}(G)\mathfrak{u}$ は $2 \dim \mathfrak{u}$ 次元の既約アフィン多様体であり，$\mathfrak{g}$ の冪零元からなる．また，次の条件 (1) – (3) をみたす冪零 G-軌道 $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathfrak{g}$ がただひとつ存在することがよく知られている ([6] 参照)：

(1) $\operatorname{Ad}(G)\mathfrak{u} = \overline{\tilde{\mathcal{O}}}$,
(2) $\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{u}$ の開かつ稠密な部分集合,
(3) $\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{u}$ 単一の Q-軌道からなる．

軌道 $\tilde{\mathcal{O}}$ を $\mathfrak{u}$ に対する G のリチャードソン軌道とよぶ．いま，$\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{u}$ に対して，

$$\tilde{\mathcal{N}} := \{g \in G \mid Ad(g)\tilde{X} \in \mathfrak{u}\} \tag{4.4}$$

とおくとき，

$$\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{u} = \operatorname{Ad}(\tilde{\mathcal{N}})\tilde{X}, \quad \tilde{\mathcal{N}} = QG(\tilde{X}) \tag{4.5}$$

が成り立つことに注意しよう．ここに $G(\tilde{X}) := Z_G(\tilde{X})$ は $\tilde{X}$ の G における固定部分群であり，2番目の等式は性質 (3) と同値である．

一方，$\mathfrak{p}_-$ の K-飽和集合 $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p}_-$ は $\mathfrak{p}$ に含まれる既約なアフィン多様体であって，明らかに $\overline{\mathcal{O}} = \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{u}$ に含まれる．冪零軌道の個数は有限だから，次の条件 (1'), (2') をみたす冪零 K-軌道 $\mathcal{O} \subset \mathfrak{p}$ がただひとつ存在することが分かる：

(1') $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p}_- = \overline{\mathcal{O}}$,
(2') $\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ は $\mathfrak{p}$ の開かつ稠密な Q_c-不変部分集合.

ここに，$Q_c := K \cap Q$ は $\mathfrak{q}_c$ に対応する K の放物型部分群である．$\mathcal{O}$ を $\mathfrak{p}_-$ に対する K のリチャードソン軌道という．なお，$X \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ に対して，K の部分集合

$$\mathcal{N} = \{k \in K |\ \mathrm{Ad}(k)X \in \mathfrak{p}_-\} \quad (\text{cf. 定理 6})$$

を用いて，

$$\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_- = \mathrm{Ad}(\mathcal{N})X \tag{4.6}$$

と表されることに注意せよ．明らかに，$\mathcal{N}$ は K の左 Q_c-不変，かつ右 $K(X)$-不変な部分集合で単位元 $e \in K$ を含む．したがって，

$$\mathcal{N} \supset Q_c K(X) \tag{4.7}$$

が成り立つ．

注意 8. 一般に，$\mathfrak{g}$ の任意の θ-不変な放物型部分代数 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ に対して対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に付随するリチャードソン軌道を同様に定義することができる ([9], [11], [13] 参照)．本稿では，レビ部分 $\mathfrak{l}$ が $\mathfrak{k}$ に含まれ，かつ冪零部分 $\mathfrak{u}$ が $\mathfrak{p}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(-1)$ で生成される場合を扱っている．

5　モーメント写像とリチャードソン軌道

一般旗多様体 G/Q の余接束

$$T^*(G/Q) := \{(gQ, Y) \in G/Q \times \mathfrak{g} \mid Y \in \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{u}\} \tag{5.1}$$

は，$G \times \mathfrak{g}$ で $(2\dim\mathfrak{u})$-次元の既約部分多様体をなす．G/Q の原点 eQ をとおる K-軌道

$$\mathcal{C} := K \cdot eQ \simeq K/Q_c \subset G/Q$$

について，$\mathcal{C}$ の G/Q における余法束

$$T^*_{\mathcal{C}}(G/Q) = \{(kQ_c, Y) \in K/Q_c \times \mathfrak{p} \mid Y \in \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{p}_-\} \subset T^*(G/Q) \tag{5.2}$$

を考えよう．

余接束 $T^*(G/Q)$ において，第 2 成分への射影

$$\tilde{\gamma} : T^*(G/Q) \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \tilde{\gamma}((gQ, Y)) = Y \tag{5.3}$$

を G/Q に関するモーメント写像という．写像 $\tilde{\gamma}$ の $T^*_{\mathcal{C}}(G/Q)$ への制限を γ で表す．

このとき，前節で定義した冪零軌道 $\tilde{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ および集合 $\tilde{\mathcal{N}} = QG(\tilde{X})$, $\mathcal{N}$ はモーメント写像 $\tilde{\gamma}$, γ を用いて次のように表される．

命題 9. (1) モーメント写像 $\tilde{\gamma}$ の像は $\tilde{\gamma}(T^*(G/Q)) = \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{u} = \overline{\tilde{\mathcal{O}}}$ で与えられる．また，$\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{u}$ の $\tilde{\gamma}$ によるファイバーは

$$\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{X}) = \{(gQ, \tilde{X}) \mid g \in \tilde{\mathcal{N}}^{-1}\} \simeq G(\tilde{X})Q/Q \tag{5.4}$$

と表される．さらに，ファイバー $\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{X})$ は G/Q の有限集合であって，固定部分群 $G(\tilde{X})$ が推移的に作用する．

(2) $\gamma = \tilde{\gamma}|_{T^*_{\mathcal{C}}(G/Q)}$ については，$\gamma(T^*_{\mathcal{C}}(G/Q)) = \mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p}_- = \overline{\mathcal{O}}$ が成り立つ．また，$X \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ のファイバーは

$$\gamma^{-1}(X) = \{(kQ_c, X) \mid k \in \mathcal{N}^{-1}\} \simeq \mathcal{N}^{-1}/Q_c \tag{5.5}$$

と表される．

注意 10. $\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{p}_- \neq \emptyset$ ならば，$X = \tilde{X} \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{p}_-$ ととることで，$\gamma^{-1}(X)$ は $\gamma^{-1}(\tilde{X})$ の部分集合と同一視できる．このとき，命題 9 より $\gamma^{-1}(X)$ は有限集合で，固定部分群 $K(X)$ は $\gamma^{-1}(X)$ に推移的に働くことがわかる (命題 12)．しかし，一般には $\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{p}_- \neq \emptyset$ は成立せず，$K(X)$ のファイバーへ $\gamma^{-1}(X)$ の作用が推移的でない例も存在する (定理 18)．

6 問題の設定

K のリチャードソン軌道 $\mathcal{O}$ に対して，$\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ は Q_c-安定な集合であるが，その軌道分解はどのようになっているだろうか？ まず，G-軌道 $\tilde{\mathcal{O}}$ に対する第 4 節 (3) と類似の性質をもつかどうかを明らかにしたい．すなわち，次の命題 (A), あるいはより弱い形の命題 (B) の真偽を問題にする ([21], [23] 参照)．

(A) $\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ は単一の Q_c-軌道である．すなわち $\mathcal{N} = Q_cK(X)$ が成り立つ．

(B) 集合 $\mathfrak{p}_-$ に開 Q_c-軌道が存在する．

以下この問題ついて論じる．なお，$\mathfrak{p}_-$ における開 Q_c-軌道はもし存在するならば一意的であることに注意しよう．

注意 11. 任意の θ-不変な放物型部分代数 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を対象にした場合，命題 (B) が成り立たない例がある．実際，$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(8, \mathbb{C})$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(4, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ として，θ-不変なボレル部分代数 $\mathfrak{q}$ を考えると，$\mathfrak{p}_- = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ には開 Q_c-軌道が存在しない (Tauvel [11])．ただし，この例は第 4 節の設定の外にあり，本稿で扱う命題 (B) に対する反例にはなっていない．

7 一般的考察及び既存の結果

G-軌道 $\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O}$ は $\tilde{\mathcal{O}}$ の閉包に含まれるが，このふたつの冪零 G-軌道が一致する場合には事情が簡単になる (注意 10 参照).

命題 12 (cf. [23, Prop.4.2]). 次の 3 条件 (a), (b), (c) は互いに同値である：

$$\text{(a) } \mathrm{Ad}(G)\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}, \quad \text{(b) } \dim \mathcal{O} = \dim \mathfrak{u}, \quad \text{(c) } \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{p}_- \neq \emptyset.$$

このとき命題 (A) は真であり，$\gamma^{-1}(X) = K(X)Q_c/Q_c$ ($X \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$) は有限集合である.

いま，$Q_c = LU_c$ を Q_c のレビ分解とする．レビ部分群 $L = Z_G(H_S)$ の $\mathfrak{g}(-1)$ への随伴作用は必ず開軌道をもつことが知られている (Vinberg). $\mathfrak{p}_-$ における Q_c-軌道と $\mathfrak{g}(-1)$ における L-軌道との関係を次に述べよう.

命題 13. $Y = \sum_j Y_j \in \mathfrak{p}_-$ ($Y_j \in \mathfrak{g}(j)$) に $\rho(Y) := Y_{-1} \in \mathfrak{g}(-1)$ を対応させる写像は，軌道の集合の間の対応

$$\mathfrak{p}_-/Q_c \ni \mathrm{Ad}(Q_c)Y \overset{\rho}{\longmapsto} \mathrm{Ad}(L)Y_{-1} \in \mathfrak{g}(-1)/L \tag{7.1}$$

を誘導する．また，$\mathfrak{p}_-$ に開 Q_c-軌道 $\mathcal{S}$ が存在するとき，$\rho(\mathcal{S})$ は $\mathfrak{g}(-1)$ の開 L-軌道である.

原理的には，この命題で与えた写像 ρ の像とファイバーを決定することで，$\mathfrak{p}_-$ の Q_c-軌道分解が得られることになる.

さて，我々が当面問題にする主張 (A), (B) の真偽の判定ついて，次の命題は結構役に立つ.

命題 14. (1) 主張 (A) が真であるためには，任意の $Y \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ に対して $[\mathfrak{q}_c, Y] = \mathfrak{p}_-$ が成り立つことが必要十分条件である.

(2) $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1) \neq \emptyset$ ならば (B) が成り立つ．このとき，$\mathfrak{p}_-$ における唯一の開 Q_c-軌道は

$$(\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1)) + \left(\bigoplus_{j<-1,\, odd} \mathfrak{g}(j) \right)$$

に等しい．よって $\rho(\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-) \subset \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1)$ ならば (A) が成り立つ.

(3) $Y = \sum_j Y_j \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ ($Y_j \in \mathfrak{g}(j)$) があって $[\mathfrak{l}, Y_{-1}] \neq \mathfrak{g}(-1)$ となるとき，(A) は成り立たない.

なお，主張 (A) について，陳 [3] は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が階数 1 の実単純リー群に対応する対称対のとき，(A) が正しいことを具体的な計算により証明している．他に，$SO_0(n,2)$ に対する谷口 [12] の結果, $SU(p,q)$ に対する Barchini-Zierau [1] の研究などがあるが，ともかく，(A) に対する反例はこれまでに見つかってはいなかった.

8 AIII 型の場合

最後に，$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ が AIII 型の実単純リー群 $SU(p,q)$ に対応する場合に，命題 (A) の真偽を詳しく論じる．いま，

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),\quad [\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\simeq\mathfrak{sl}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(q,\mathbb{C})\ (n=p+q)$$

とする．このとき，問題となる $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ は n の分割 $(n_1,n_2,\dots,n_t)$ $(n_i\geq 1)$ のうち

$$p=n_1+n_3+\cdots\quad \text{または}\quad q=n_1+n_3+\cdots$$

なるものに対応する．$N:=\max(n_1,\dots,n_t)$ とおく．

冪零軌道 $\mathcal{O}$ および $\tilde{\mathcal{O}}$ を特定しよう．まず，$\mathfrak{p}$ における冪零 K-軌道は，サイズ n の ab-ヤング図形で，a の個数が p，b の個数が q であるものに対応している ([7])．さて，$p=n_1+n_3+\cdots$ のとき，n_1 個の a, n_2 個の b, ... を順に並べた n 文字のワード

$$\Phi:\quad \overbrace{a\cdots a}^{n_1}\overbrace{b\cdots b}^{n_2}\overbrace{a\cdots a}^{n_3}\cdots$$

を考える．$q=n_1+n_3+\cdots$ のときには，上のワードで a と b の役割を入れ替えたものを Φ とする．このワードから $abab\cdots$ あるいは $baba\cdots$ なる部分列 (a と b が交互に現れる部分列) で最長のもの $\phi(1)$ をとる．次に Φ から $\phi(1)$ を除いたワードの列について同じ操作を行い，部分列 $\phi(2)$ をとる．この操作をワードが空になるまで繰り返す．このとき得られる $\phi(1),\phi(2),\dots$ を (各行として) 上からならべた ab-ヤング図形が軌道 $\mathcal{O}$ を与える (cf. [13], [17])．

一方，ジョルダン標準形を考えることで，冪零 G-軌道はサイズ n のヤング図形と対応している．冪零 K-軌道 $\mathcal{O}$ を含む G-軌道 $\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O}$ は，$\mathcal{O}$ を与える ab-ヤング図形から a,b の情報を除いたヤング図形に対応する．また，$\mathfrak{q}$ に対するリチャードソン軌道 $\tilde{\mathcal{O}}$ は，$(n_1,n_2,\dots,n_t)$ を t 文字の置換 σ によって大小の順にならびかえて得られる n の分割

$$(n_{\sigma(1)},n_{\sigma(2)},\dots,n_{\sigma(t)}),\quad n_{\sigma(1)}\geq n_{\sigma(2)}\geq\cdots\geq n_{\sigma(t)}$$

が定めるヤング図形の転置と対応している．

このとき，冪零 G-軌道 $\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ を与えるヤング図形をそれぞれ比較することで，次の定理を得る．

定理 15. $\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}$ であるためには分割 $(n_1,\dots,n_t)$ が次の条件を満たすことが必要十分条件である：$m=1,\dots,N-1$ に対して，

$$1\leq i<j\leq t,\ j-i\in 2\mathbb{Z},\ n_i-m,n_j-m>0,\ n_\ell-m\leq 0\ (i<\ell<j)$$

なる番号 i,j は存在しない．とくに，$(n_1,\dots,n_t)$ が単峰ならばつねに $G\cdot\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}$，したがって主張 (A) が成り立つ．

例 16. (1) $p, q \leq 3$ のとき，任意の $\mathfrak{q}$ に対して $\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$ が成り立つ．

(2) (Vogan による例) $p = 4$, $q = 1$ のとき，分割 $(2,1,2)$ に対応する $\mathfrak{q}$ について，冪零 K-軌道 $\mathcal{O}$ は ab-ヤング図形

$$\begin{matrix} a & b & a \\ a & & \\ a & & \end{matrix}$$

で表され，$\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O}$ は 5 の分割 $(3,1,1)$ に対応する．一方，冪零 G-軌道 $\tilde{\mathcal{O}}$ は 5 の分割 $(3,2)$ で表される．よって $\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O} \neq \tilde{\mathcal{O}}$ となる．しかし $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1) \neq \emptyset$ かつ $\mathfrak{g}(-3) = \{0\}$ であることから，命題 14 (2) より主張 (A) は正しい．

(2) $p = q = 3$ のとき，分割 $(2,1,1,2)$ は単峰ではないが定理 15 の条件をみたす．実際，K-軌道 $\mathcal{O}$ は ab-ヤング図形

$$\begin{matrix} a & b & a & b \\ a & b & & \end{matrix}$$

で与えられ，6 の分割 $(4,2)$ は $(2,2,1,1)$ を転置したものに一致する．この場合 $\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$ で (A) が成立するが，$\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1) = \emptyset$ である．

命題 17. $q = 1, 2$ のとき，任意の $\mathfrak{q}$ に対して，

$$\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1) \neq \emptyset, \quad \rho(\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-) \subset \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1)$$

が成り立つ．したがって命題 (A) は正しい．

このように考えると，AIII 型では命題 (A) が常に真であるかとも思えてくる．しかし，これは正しくない．

定理 18 (坂田・山下). $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が AIII 型のとき，(B) は真だが (A) は成立しない例が存在する．

証明. $p = 5$, $q = 4$ のとき，9 の分割 $(2,2,1,2,2)$ が定める標準放物型部分代数 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{sl}(9, \mathbb{C})$ (冪零部分 $\mathfrak{u}$ が下半三角行列のみからなるようにとる) について，対応する冪零 K-軌道 $\mathcal{O}$ は，ab-ヤング図形

$$\begin{matrix} a & b & a & b & a \\ a & b & a & & \\ b & & & & \end{matrix}$$

で与えられる．また，G-軌道 $\tilde{\mathcal{O}}$ は分割 $(5,4)$ に対応するので，$\mathrm{Ad}(G)\mathcal{O} \neq \tilde{\mathcal{O}}$ である．さらに，$\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(-1) = \emptyset$ であることもわかる．

さて，行列

$$Y = (E_{9,7} + E_{7,5} + E_{5,4} + E_{4,2}) + (E_{8,6} + E_{6,1}) \quad (E_{i,j} \text{ は第 } (i,j)\text{-行列単位})$$

は $\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$ に属するが，Y の $\mathfrak{g}(-1)$-成分

$$Y_{-1} = (E_{9,7} + E_{8,6}) + E_{7,5} + E_{5,4} + E_{4,2} \in \mathfrak{g}(-1)$$

について，$[\mathfrak{l}, Y_{-1}] \neq \mathfrak{g}(-1)$ である．よって，命題 14 (3) から (A) が成立しないことがわかる．一方，$Z := Y + E_{3,1}$ とすれば，$[\mathfrak{q}_c, Z] = \mathfrak{p}_-$ となり，$\mathrm{Ad}(Q_c)Z$ は $\mathfrak{p}_-$ の開 Q_c-軌道を与える．□

注意 19. 上の証明と同様にして，

$$Y' := (E_{3,1} + E_{5,3} + E_{6,5} + E_{8,6}) + (E_{4,2} + E_{9,4}) \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-$$

であるが，$\mathrm{Ad}(Q_c)Y'$ は $\mathfrak{p}_-$ の開軌道ではない．また，$\rho(\mathrm{Ad}(Q_c)Y) \neq \rho(\mathrm{Ad}(Q_c)Y')$ ゆえ，$\mathrm{Ad}(Q_c)Y$, $\mathrm{Ad}(Q_c)Y'$ は相異なる Q_c-軌道を与える．ここで，$\rho : \mathfrak{p}_-/Q_c \to \mathfrak{g}(-1)/L$ は命題 13 で与えた写像である．

参考文献

[1] L. Barchini, Remarks on characteristic cycle of discrete series of $SU(p,q)$, 2004 年度表現論シンポジウム講演集, 150–159.

[2] J.-T. Chang, Characteristic cycles of holomorphic discrete series, Trans. Amer. Math. Soc., **334** (1992), 213–227.

[3] J.-T. Chang, Characteristic cycles of discrete series for $\mathbb{R}$-rank one groups, Trans. Amer. Math. Soc., **341** (1994), 603–622.

[4] H. Hecht and W. Schmid, A proof of Blattner's conjecture, Invent. Math. **31** (1975), 129–154.

[5] R. Hotta and R. Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series, Invent. Math. **26** (1974), 133–178.

[6] J.-E. Humphreys, Conjugacy classes in semisimple algebraic groups, Mathematical Surveys and Monographs, **43**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[7] H. Kraft and C. Processi, Closures of conjugacy classes of matrices are normal, Invent. Math., **53** (1979), 227–247.

[8] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math., **83** (1971), 753–809.

[9] A. Noël, Some remarks on Richardson orbits in complex symmetric spaces, preprint, 2004.

[10] W. Schmid, Some properties of square-integrable representations of semisimple Lie groups, Ann. of Math., **102** (1975), 535–564.

[11] P. Tauvel, Quelques résultats sur les algèbres de Lie symétriques, Bull. Sci. math., **125** (2001), 641–665.

[12] K. Taniguchi, On discrete series Whittaker functions $SO_0(2n, 2)$ (Japanese), *in*: "Automorphic forms on $Sp(2; R)$ and $SU(2,2)$, II (Kyoto, 1998)", RIMS Kōkyūroku, **1094** (1999), 11–27.

[13] P. Trapa, Richardson orbits for real classical groups, preprint.

[14] D.A. Vogan, Associated varieties and unipotent representations, *in*: "Harmonic Analysis on Reductive Groups (W.Barker and P.Sally eds.)", Progress in Math., Vol. **101**, Birkhäuser, 1991, 315–388.

[15] D. A. Vogan, The method of coadjoint orbits for real reductive groups, *in*: "Representation Theory of Lie Groups (eds. J. Adams and D. Vogan)", 177–238, IAS/Park City Mathematics Series **8**, AMS, 2000.

[16] A. Wachi and H. Yamashita, Isotropy representations for singular unitary highest weight modules (tentative), in preparation.

[17] A. Yamamoto, Orbits in the flag variety and images of the moment map for classical groups. I. Represent. Theory, **1** (1997), 329–404.

[18] H. Yamashita, Associated varieties and Gelfand-Kirillov dimensions for the discrete series of a semisimple Lie group, Proc. Japan Acad., **70A** (1994), 50–55.

[19] H. Yamashita, Description of the associated varieties for the discrete series representations of a semisimple Lie group: An elementary proof by means of differential operators of gradient type, Comment. Math. Univ. St. Paul., **47** (1998), 35–52.

[20] H. Yamashita, Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules, *in*: "Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations", Astérisque, **273** (2001), 81–137.

[21] H. Yamashita, Isotropy representations attached to the associated cycles of Harish-Chandra modules, RIMS Kōkyūroku, **1238** (2001), 233-247.

[22] H. Yamashita, Isotropy representation and projection to the PRV-component, RIMS Kōkyūroku, **1294** (2002), 62-71.

[23] H. Yamashita, Isotropy representation for Harish-Chandra module, preprint (2004), to appear in "Infinite Dimensional Harmonic Analysis 2003 (H. Heyer, T. Hirai, T. Kawazoe, B. Kuemmerer and K. Saito Eds.)", Proceedingss of Japanese-German Symposium held from September 14th to 21st, 2003 at Tübingen University.

山下　博 (Hiroshi Yamashita)
〒060-0810 札幌市北区北10条西8丁目
北海道大学大学院理学研究科数学専攻
(Department of Mathematics, Hokkaido University,
Sapporo, 060-0810, JAPAN)
Email: yamasita@math.sci.hokudai.ac.jp