数理解析研究所講究録 1422 巻 2005 年 120-133

局所誘導階層 - 渦のスケルトン

九州大学 大学院数理学研究院　福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

概 要

非圧縮性流体中における渦糸の 3 次元運動の最小限のエッセンスだけを抽出した発展方程式が局所誘導方程式 (Localized induction equation: LIE) である．この方程式は橋本変換を介して非線形 Schrödinger 方程式と等価であり，したがって，完全可積分発展方程式であることは有名である．局所誘導方程式を出発点とする完全可積分発展方程式の系列は局所誘導階層 (Localized induction hierarchy: LIH) とよばれる．局所誘導階層の 2 番目の方程式は修正 KdV 方程式と等価で，渦管の中を流れる軸流の効果に対応物をもつ．LIE のもとで剛体的運動をする渦糸 (= 木田クラス) と Kirchhoff のエラスティカが等価であることはよく知られている．本稿では，軸流をもつ渦糸も Kirchhoff のエラスティカと密接なかかわりをもつことを示す．とくに，変分原理を通してこれらのアナロジーの起源について考える．

1　渦ジェット糸の運動方程式

細長い渦管のことを **'渦糸'** とよぶ．境界のない領域を満たす非圧縮流体中の渦糸の 3 次元運動について考えよう．領域の各点で渦度が与えられると，流速場は Biot-Savart の法則によって一意的に定まる．Helmholtz-Kelvin の定理によれば，渦線は流体とともに動くので，渦糸の運動速度求めるには，渦糸上の各点で Biot-Savart 積分を計算すればよいだろう．しかし，この手続きを実行するのは容易ではない；体積積分を線積分で近似しようとすると，渦糸直上で発散 (代数的，対数的) が避けられない．相互作用が遠隔的であるので，たとえ線積分にもち込めたとしても，渦糸曲線全長にわたる積分の定量的評価はコンパクトな形にまとめられない．

そこで，渦糸のおおまかな特徴 (= "スケルトン") を残しつつ，できるだけスリムな取り扱いを目指したのが **'局所誘導近似 (Localized induction equation: LIA)'** である．Biot-Savart の法則を線積分で置き換え，(i) 全長からの誘導のうち，考えている点の両側の有限長さ L の部分からの寄与のみ取り込み，さらに，(ii) 渦糸の太さの有限性を考慮に入れて，対数発散を正則化する．渦糸の循環を Γ とし，渦糸の中心線を，弧長パラメータ s と時間 t を用いて，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s,t)$ と表すと，この簡単化のもとでは，中心線の運動は局所誘導方程式 (LIE)

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}=c\kappa \boldsymbol{b};\quad c=\frac{\Gamma}{4\pi}\left[\log\left(\frac{L}{\sigma}\right)\right] \tag{1.1}$$

にしたがう (Da Rios 1906). ここで, $\kappa = \kappa(s,t)$ と $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(s,t)$ は, それぞれ, 中心線の曲率と陪法線ベクトルである. パラメータ L は局所的な近似渦輪 (= 接触円) の半径, σ は渦核の半径と同程度と考えている. この扱いの範囲内では, L と σ は決まらないが, 簡単のため, c は定数とする. 乱暴な近似ではあるが, 渦糸の運動に対する直感が得られた気になれる. 渦輪の運動を経験的に知っているからである ; 進む方向は渦輪が囲む面に垂直 (= 陪法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ 方向), リング半径が小さい (= 曲率 κ が大きい) ほど速い.

Da Rios (1906) と Betchov (1965) は (1.1) を曲率 κ と捩率 τ だけの式に書き直した :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial t} &= -c\left(2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s\right), \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= c\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\kappa_{ss}}{\kappa} - \tau^2 + \frac{\kappa^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

下付き添え字 s は, s についての偏微分を表す記号である. Hasimoto (1972) は, 曲率 $\kappa(s,t)$ と捩率 $\tau(s,t)$ を組み合わせた複素数値関数 (**橋本変換** または **橋本写像**)

$$\psi(s,t) = e^{i\int^s \tau ds} \tag{1.3}$$

を導入すると, (1.1) が非線形 Schrödinger 方程式

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\left(\psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi\right) + a(t)\psi = 0 \tag{1.4}$$

に帰着することを発見した. $a(t)$ は時間についての任意関数である. この事実より, (1.1) が完全可積分発展方程式であることがしたがう. 1 ソリトン解の渦糸版は, **橋本ソリトン** として広く知られている. また, Hasimoto (1971) は, 平面内に制限された渦糸の形が **Euler のエラスティカ** と同じであることにも気づいている. Kida (1981) は変形しないで運動する渦糸の 3 次元形状をすべて決めたが, これは Euler のエラスティカの 3 次元版 **Kirchhoff のエラスティカ** と同じものである (Hasimoto & Kambe 1986; Tsuru 1987; Langer & Singer 1996; Fukumoto 1997). このアナロジーは §3 でざっと復習するが, 次節以降 (§2-5) の主題は Kirchhoff のエラスティカにまつわる話である.

完全可積分発展方程式のより正確な言い方は, '無限自由度完全可積分 Hamilton 力学系' ということである ; 無限自由度 Hamilton 力学系で, 互いに独立な第一積分を無限個もち, それらは包含系をなす. 非線形 Schrödinger 方程式の場合について, Magri (1978) は, この性質の背後に biHamiltonian 構造が潜むことを見抜き, 2 つの Hamiltonian 構造を利用して, 無限個の積分 (= 保存量) および (しかるべき Lie 括弧に関して) 可換な Hamilton ベクトル場を逐次生成する '再帰演算子' を具体的に構成した. Langer & Perline (1991) は, 橋本写像が Poisson 写像であるという性質を利用して, 局所誘導方程式での対応物を構成した. 得られた互いに可換な無限個のベクトル場は **'局所誘導階層 (LIH)'** と呼ばれる. LIH の n 番目のベクトル場を $\boldsymbol{V}^{(n)} = \boldsymbol{V}^{(n)}(s,t)$ とかくと, 最初の数個およ

び再帰演算子は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}^{(1)} &= \kappa\boldsymbol{b}, & (1.5)\\
\boldsymbol{V}^{(2)} &= \frac{1}{2}\kappa^2\boldsymbol{t} + \kappa_s\boldsymbol{n} + \kappa\tau\boldsymbol{b}, & (1.6)\\
\boldsymbol{V}^{(3)} &= \kappa^2\tau\boldsymbol{t} + (2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s)\boldsymbol{n} + (\kappa\tau^2 - \kappa_{ss} - \frac{1}{2}\kappa^3)\boldsymbol{b}, & (1.7)\\
&\vdots\\
\boldsymbol{V}^{(n)} &= -\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{V}_s^{(n-1)} + \mathcal{T}^{(n)}\boldsymbol{X}_s, & (1.8)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

である．再帰演算子 (1.8) 中の $\mathcal{T}^{(n)}$ は一種の射影演算子で，曲線の弧長パラメータのとり方と矛盾しないように決める： $\boldsymbol{V}_s^{(n)} \cdot \boldsymbol{X}_s = 0$.

最初の $\boldsymbol{V}^{(1)}$ は, 時間スケールを若干変えるだけで (1.1) の右辺になる．排水口の上にできる渦のほか，飛行機の翼端渦や竜巻など，典型的な渦管は，渦核内に渦管に沿う流れ，軸流，をもつことが知られている (Maxworthy, Hopfinger & Redekopp 1985)．語呂がよくないが，記述の短縮のため，軸流 (= ジェット) をもつ渦糸を **'渦ジェット糸 (vortex-jet filament)'** とよぶことにしよう．Moore & Saffman (1972) は軸流をもつ渦管の切片にはたらく力のつり合いを注意深く計算することによって，渦ジェット糸の運動速度の漸近形を求めた．局所誘導近似の精神で簡単化すると，Moore-Saffman 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = c\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss} + W\left[\boldsymbol{X}_{sss} + \frac{3}{2}(\boldsymbol{X}_{ss}\cdot\boldsymbol{X}_{ss})\boldsymbol{X}_s\right] \tag{1.9}$$

と読み取れる (Fukumoto & Miyazaki 1991)．ここで，第 2, 3 項の係数 W は，渦軸をまわる速度場 $v^{(0)}(r)$ と軸方向速度場 $w^{(0)}(r)$ を用いて，

$$W \approx \frac{4\pi}{\Gamma}c[\int_0^\infty rw^{(0)}\mathrm{d}r] + \frac{2\pi}{\Gamma}\int_0^\infty r^2v^{(0)}w^{(0)}\mathrm{d}r \tag{1.10}$$

と書ける．r は渦管の中心線からの距離である．以降，W も定数と思う．第 2 項は LIH の 2 番目のベクトル場 $\boldsymbol{V}^{(2)}$ に他ならず，Moore-Saffman 方程式 (1.9) は，構造的には，

$$\boldsymbol{X}_t = c\boldsymbol{V}^{(1)} + W\boldsymbol{V}^{(2)} \tag{1.11}$$

である．橋本変換 (1.3) を用いると，(1.9) は広田方程式 (Hirota 1973)

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} + c\left(\psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi\right) - \mathrm{i}W\left(\psi_{sss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi_s\right) = 0 \tag{1.12}$$

に移行する．当然，非線形 Schrödinger 階層の最初の 2 項の重ね合わせである．2 番目は修正 KdV 方程式である．§2 では，(1.9) と Kirchhoff のエラスティカとの関係に焦点を

当てる．§4, 5 では，変分原理を通して，Kirchhoff のエラスティカと LIH との結びつきについて考える．

ついでにいうと，3 番目のベクトル場 $\boldsymbol{V}^{(3)}$ は渦管の有限太さの効果に対応している．渦管の曲げによって渦核内に生じる双極子場が遠隔的に誘導する速度や，渦核の形が楕円にひずんだことに起因する運動速度の補正項は (1.7) の形にまとめられる (Fukumoto & Moffatt 2000; Fukumoto 2002; Fukumoto & Okulov 2005)．Navier-Stokes 方程式の内部解の導出は必ずしも見通しよくいかない．LIH という可積分構造は，渦管の運動速度の漸近展開を高次まで進める道の先々を照らしてくれる灯りとしてなくてはならない存在である．

2 渦ジェット系の定常形

変形しないで一定速度 $\boldsymbol{V}$ で並進運動する渦ジェット系の形を求めよう．回転運動は除外するが，接線 ($\boldsymbol{t}$-) 方向へのすべり運動は形には影響しないので許す．渦糸曲線の運動は

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = -c_0 \boldsymbol{t} + \boldsymbol{V} \tag{2.1}$$

にしたがう．ここで，c_0 はすべり速度で，定数とは限らない．この運動速度を (1.9) の右辺と等置することで，渦糸の中心線の形を決める方程式が，

$$-c_0 \boldsymbol{t} + \boldsymbol{V} = c\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_s + W\left(\boldsymbol{t}_{ss} + \frac{3}{2}\kappa^2 \boldsymbol{t}\right) \tag{2.2}$$

のように導かれる．

この式から c_0 を追い出す．単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ との内積をとると，

$$c_0 = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t} - \frac{1}{2}\kappa^2 \tag{2.3}$$

が得られ，これを (2.2) にもどすと，

$$\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t})\boldsymbol{t} = c\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_s + W\left[\boldsymbol{t}_{ss} + (\boldsymbol{t}_s)^2 \boldsymbol{t}\right] \tag{2.4}$$

に還元される．

左右を組み変えて，

$$W\boldsymbol{t}_{ss} = \boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t})\boldsymbol{t} - W(\boldsymbol{t}_s)^2 \boldsymbol{t} + c\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_s \tag{2.5}$$

と書き直すと，磁場中での電荷をもった球面振り子の運動に対する方程式とみなすことができる (*cf.* Fukumoto 1997)；弧長パラメータ s を時間 t と読み替える．質点の質量が W，位置が $\boldsymbol{t}$ で，$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} = 1$ より質点は単位球面上 S^2 に拘束されていることになる．定べ

クトル $\boldsymbol{V}$ が重力に相当し，右辺の最初の 2 つの項でその S^2 への接線成分を取り出す．第 3 項は向心力で，質点を S^2 上に引き留めておく．最後のベクトル積で与えられる項はローレンツ力で，原点におかれた単極子磁場 $\boldsymbol{B}$ によってもたらされる．質点がもつ電荷を q とおくと，磁場は

$$q\boldsymbol{B} = -c\frac{\boldsymbol{t}}{|\boldsymbol{t}|^3} \tag{2.6}$$

で与えられる．単極子の強さは，(1.1) で定義された局所誘導の強さ c で決まる．$c > 0$ より磁場はつねに $\boldsymbol{t}$-方向内向きである．

磁気単極子をもち出さなくても，右辺第 4 項は実現できる．有限の大きさの球状の振り子を考え，それを $\boldsymbol{t}$ 軸のまわりに回転させる．空気から受けるマグナス力は第 4 項と同じ形をしている．ボールのカーブの原理である．

単極子磁場中の荷電振り子の運動は Lagrange のこまと等価であり (Fukumoto 1997)，ゆえに弾性ひもの 3 次元平衡形，**Kirchhoff のエラスティカ**，と等価である (Love 1926)．弾性ひもは細長く，(i) 「断面形状は円で」，(ii) 「その大きさは長さ方向に一様である」とする．材質は等方的であることを暗に仮定している．ひもの各部に働く体積力 (典型的には，重力) は無視する．弾性ひもの形状を記述するには，本来，ひもの中心線上の各点 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(s)$ に，接線ベクトル $\boldsymbol{t}(s)$ をメンバーとする正規直交枠 $(\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{t}(s))$，**物質正規直交枠**，あるいは縮めて**物質枠** (material frames)，を付与し，それらの長さ $(\boldsymbol{t}(s)$-) 方向への変化を各点 $\boldsymbol{X}(s)$ で知ればよい．ひもがまっすぐでかつ捩れがないとき，互いに平行に列なるように配置しておく．断面の SO(2) 対称性により，記述を $\boldsymbol{t}(s)$ だけに還元できる．

物質枠の単位長さ当たりの回転角を $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(s)$ とおくと，接線ベクトル $\boldsymbol{t}(s)$ の変化率は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{t} \tag{2.7}$$

と書ける．両辺と接線ベクトル $\boldsymbol{t}(s)$ とのベクトル積をとると，

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_s + (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{t} \tag{2.8}$$

となる．円形断面のひもに対しては，回転率 $\boldsymbol{\omega}$ の断面成分に曲げ剛性 (bending stiffness) A を，接線成分に捩り剛性 (torsional rigidity) C を付与することで，内部応力のモーメントが得られる：

$$\boldsymbol{M} = A\,(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_s) + C\omega_3\boldsymbol{t}\,. \tag{2.9}$$

ここで，

$$\omega_3 = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{2.10}$$

とおいた．弾性ひもの長さ方向への一様性により，A, C は定数である．体積力がないときには，内部応力 $\boldsymbol{T}$ はひもの長さ全体にわたって一定である：

$$\boldsymbol{T}_s = \boldsymbol{0}. \tag{2.11}$$

モーメントのつり合いの式は，

$$\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0} \tag{2.12}$$

で与えられる．式 (2.9) と (2.12) より，

$$\omega_3 = \text{const.} \tag{2.13}$$

が容易に導ける (Landau & Lifshitz 1986).

渦ジェット糸の定常形が Kirchhoff のエラスティカと同じであることをみるには，(2.4) または (2.5) を次のように書き直して，(2.12) と比較すればよい：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[W\left(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_s\right) - c\boldsymbol{t}\right] = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{V}. \tag{2.14}$$

対応関係をまとめると，次節の表 1 の真ん中の列のようになる．すべり速度 c_0 はおもてに出てこない．物質枠の $\boldsymbol{t}$ 軸まわりの回転率は $\omega_3(=-c/C) < 0$ に限られるが，曲げ剛性 W が正・負両方の値をとり得るので，自由度としては変わらない．

3　渦糸の定常形：復習

局所誘導方程式 (1.1) と Kirchhoff のエラスティカとのかかわりは以前からよく知られている．静止流体中を変形しないで運動する渦糸の形 (Kida 1981) は Kirchhoff のエラスティカそのものである (Hasimoto & Kambe 1985; Fukumoto 1997)．頭の中を整理するために，このアナロジーを要約しておこう．

Kida (1981) は，そのような運動が，ある方向（z 軸方向としよう）への並進，その方向を軸とする剛体回転，及び渦糸自身に沿うすべりよりなることを洞察し，以下の式に帰着させた：

$$c\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss} = -\hat{c}_0\boldsymbol{X}_s + \hat{\Omega}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{X} + \hat{V}\boldsymbol{e}_z. \tag{3.1}$$

ここに，$\hat{\Omega}$ と $\hat{V}$ は定数で，それぞれ，回転角速度，並進速度を表す．$\hat{c}_0$ はすべり速度で，これも定数であることが示せる．この解は，Da Rios-Betchov の方程式 (1.2)，同じことであるが，非線形 Schrödinger 方程式 (1.4) の進行波解でもある．式 (3.1) を，弧長パラメータ s で微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[c\left(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_s\right) + \hat{c}_0\boldsymbol{t}\right] + \boldsymbol{t} \times \hat{\Omega}\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0} \tag{3.2}$$

Kirchhoff のエラスティカ	=	渦ジェット糸	渦糸
A (曲げ剛性)	$\longleftrightarrow$	W	c
$C\omega_3$ (C: 捩り剛性)	$\longleftrightarrow$	$-c$	$\hat{c}_0$
$\boldsymbol{T}$ (内部応力)	$\longleftrightarrow$	$-\boldsymbol{V}$	$\hat{\Omega}\boldsymbol{e}_z$

表 1: 弾性ひもと渦ジェット糸および渦糸との対応

となって，弾性ひものつり合いの式 (2.9)–(2.12) と同等であることはすぐわかる．

表 1 の右に渦糸とのアナロジーを追加しておく．局所誘導の強さ c の役割が ‘捩り’ から ‘曲げ’ に移っている．弾性ひもの内部応力 $\boldsymbol{T}$ に対応するものは，渦ジェット糸では並進速度 $-\boldsymbol{V}$ であったのに対し，渦糸では回転角速度 $\hat{\Omega}\boldsymbol{e}_z$ である．式 (3.2) を s で微分すれば (2.5) と同じ形になることからこのパラメータの役割の移行は理解できる．もとはといえば，再帰演算子 (1.8) の構造に由来する．

4　変分原理 I

§2 (そして §3) で述べたアナロジー (表 1) が自然なものであることを変分原理によって理解したい．それには文献 [20] が参考になる．

ひものもつ全弾性エネルギーは屈曲エネルギーと捩りエネルギーの和である (Landau & Lifshitz 1986)：

$$E = \frac{A}{2}\int_0^L \kappa^2 \mathrm{d}s + \frac{C}{2}\int_0^L \omega_3^2 \mathrm{d}s\,. \tag{4.1}$$

このエネルギーを極小にするひもの配位が Kirchhoff のエラスティカである．直接的な導出は次節 (§5) で示す (文献 [15], [30] も参照のこと)．

弾性ひもの単位長さ当たりの捩れ角，すなわち，物質正規直交枠の $\boldsymbol{t}$ 軸まわりの回転率 ω_3 (2.10) とひもの中心線の形状の捩率 τ は別物であることに注意されたい．捩りエネルギー (式 (4.1) の第 2 項) の中にある ω_3 をあらわすには，物質正規直交枠 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{t})$ のうちの $\boldsymbol{e}_1$ または $\boldsymbol{e}_2$ を必要とする．片や，渦ジェット糸の定常形を決める式 (2.14) は接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ だけで書けているので，目指すところに直接行けない．

接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ だけに関する変分原理を構成するにはどうすればよいのであろうか? 捩りエネルギー極小の要請から $\omega_3 =$ 一定 (2.13) が導かれること (Langer & Singer 1996) をあらかじめ織り込んでおく．捩りエネルギーをエネルギー汎関数から捨て去りたいのだが，捩りこそがひもの形状を 3 次元たらしめるので，その情報を何らかの形で「曲げエネルギー極小の条件」に組み込んでやらなければならない．Langer & Singer (1996) は，ω_3 と τ は，別物とはいっても，その全長にわたる積分の間には関係があることに着目した．弾性ひものクラスを，「中心線が閉曲線で，かつ，物質正規直交枠も周期的である．す

なわち，全長を L とすると，$\boldsymbol{e}_1(s+L)=\boldsymbol{e}_1(s)$, $\boldsymbol{e}_2(s+L)=\boldsymbol{e}_2(s)$ が成立する」ものに限定しよう．すると，物質正規直交枠も Frenet-Serret 枠 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{b},\boldsymbol{t})$ も 1 周するともとにもどるので，主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ の $\boldsymbol{t}$ 軸まわりの回転角と $\boldsymbol{e}_1(s)$ の $\boldsymbol{t}$ 軸まわりの回転角の差は 2π の整数倍である．断面の回転角を測るには各断面内に基準となる方向を導入しなければならない．便利な方法としては，中心線上のある点，たとえば，$s=0$，での物質枠の要素 $\boldsymbol{e}_1(0)$ を全長にわたって平行移動 (Fermi-Walker transport) して作ればよい (Littlejohn 1988)．すると，$\boldsymbol{n}(s)$ の回転率は τ で，$\boldsymbol{e}_1(s)$ の回転率は ω_3 で与えられる．もっとも，1 周期にわたる回転角は角度の基準のより方によらないが．上述の回転角の差は，ある整数 n $(\in\mathbb{Z})$ を用いて，次のように与えられる (Moffatt & Ricca 1992)：

$$2\pi n=\oint\tau\mathrm{d}s-\omega_3 L\,. \tag{4.2}$$

ちなみに，$\omega_3 L/(2\pi)$ は全捩り数 (total twist number) とよばれる量である．

捩りの情報として，捩りエネルギーの代わりに，積分量 $\oint\tau\mathrm{d}s$ をあらかじめ指定する条件つき変分原理を考えよう．捩率の表式

$$\tau=\frac{1}{\kappa^2}(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}_s)\cdot\boldsymbol{t}_{ss} \tag{4.3}$$

を思い出すと，$\boldsymbol{t}(s)$ $(0\le s\le L)$ の汎関数として，

$$H[\boldsymbol{t}]=\frac{A}{2}\int_0^L\boldsymbol{t}_s\cdot\boldsymbol{t}_s\mathrm{d}s+\alpha\int_0^L\frac{(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}_s)\cdot\boldsymbol{t}_{ss}}{\boldsymbol{t}_s\cdot\boldsymbol{t}_s}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_0^L\beta(s)(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}-1)\,\mathrm{d}s \tag{4.4}$$

ととればよいことがわかる．定数 α は Lagrange の未定乗数である．最後の積分は，単位接線ベクトルの定義 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$ に由来する拘束条件である．β も未定乗数であるが，こちらは中心線上の各点 $\boldsymbol{X}(s)$ で成立するので，弧長パラメータ s の関数である．もう一つ，$\boldsymbol{t}(s)$ の定義に属する関係

$$\boldsymbol{t}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(s)}{\mathrm{d}s} \tag{4.5}$$

を忘れてはいけない．2 番目の積分 $\oint\tau\mathrm{d}s$ はトポロジカルな量である．接線ベクトル $\boldsymbol{t}(s)$ を中心曲線上の点から単位球面 S^2 への写像 (=Gauss 写像) とみたとき，$\oint\tau\mathrm{d}s$ は S^2 上の測地線曲率の S^2 上での線積分をあらわし，Gauss-Bonnet の定理を通して，$\boldsymbol{t}(s)$ $(0\le s\le L)$ が S^2 上に描く閉軌道で囲まれる領域の面積とつながっている (Fukumoto 1997)．

準備として，接線ベクトルが $\boldsymbol{t}(s)\to\boldsymbol{t}(s)+\delta\boldsymbol{t}(s)$ と変化したときの，曲率および捩率の変分 $\delta\kappa$, $\delta\tau$ を計算しよう．関係式 $\kappa^2=\boldsymbol{t}_s\cdot\boldsymbol{t}_s$ の両辺の変分をとると，

$$\delta\kappa=\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{t}_s \tag{4.6}$$

が直ちに出てくる．式 (4.3) の変分をとり，途中 (4.5) を用いると，

$$\delta\tau=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\kappa}\cdot\delta\boldsymbol{t}_s\right)+(\kappa\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{t})\cdot\delta\boldsymbol{t} \tag{4.7}$$

が導ける (*cf.* Langer & Perline 1991). これらより，(4.4) の変分 δH は

$$\delta H = \int_0^L \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(A\boldsymbol{t}_s \cdot \delta\boldsymbol{t} + \frac{\alpha}{\kappa}\boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{t}_s \right) + [-A\boldsymbol{t}_{ss} + \alpha(\kappa\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{t}) + \beta(s)\boldsymbol{t}]\cdot\delta\boldsymbol{t} \right\} \mathrm{d}s \tag{4.8}$$

と計算できる．もともとの汎関数 (4.4) の形からみられるように，中心線は C^3 級の閉曲線が仮定されていて，この仮定のもとでは，(4.8) の最初の 2 つの微分項は消える．さて，ここにおいて，$\delta H = 0$ が $\delta\boldsymbol{t}(s+L) = \delta\boldsymbol{t}(s)$ なる任意の $\delta\boldsymbol{t}(s)$ $(0 \le s \le L)$ に対して成立することを要請する．正確には，定義式 (4.5) にもとづいて，$\delta\boldsymbol{X}(s+L) = \delta\boldsymbol{X}(s)$ なる中心曲線の任意の変分 $\delta\boldsymbol{X}$ から $\delta\boldsymbol{t} = (\delta\boldsymbol{X})_s$ を構成しなければいけないので，変分原理の要請は，(4.8) の [ ] の中身が，$\boldsymbol{0}$ ではなくて，定数ベクトルに等しいことを導く．この定数ベクトルを $-\boldsymbol{V}$ とおくと，

$$A\boldsymbol{t}_{ss} - \alpha(\kappa\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{t}) - \beta\boldsymbol{t} = \boldsymbol{V} \tag{4.9}$$

となる．書き直すと，

$$A\boldsymbol{t}_{ss} - \alpha\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}_s - (\beta + \alpha\tau)\boldsymbol{t} = \boldsymbol{V} \tag{4.10}$$

である．

§2 の (2.2) や (2.4) と比べると，$\boldsymbol{V}$ は共通で，

$$A \longleftrightarrow W, \quad \alpha \longleftrightarrow -c, \quad \beta \longleftrightarrow c\tau - \frac{3}{2}\kappa^2 W - c_0 \tag{4.11}$$

の関係が見てとれる．表 1 の中列より，ベクトル $\boldsymbol{V}$ は内部応力にマイナス符号をつけたものであるが，(4.8) の形からみて自然である．$\alpha = C\omega_3$ で，未定乗数 α が弾性ひもの捩りモーメントに対応することが確かめられる．関数 β は渦ジェット糸のすべり速度 c_0 に関係している．

汎関数 (4.4) の第 2 項 $\oint \tau \mathrm{d}s$ と第 1 項 $\oint \kappa^2 \mathrm{d}s$ は，(1.1) の無限個の保存量のうちの 2 番目と 3 番目である．先頭に長さ $\oint \mathrm{d}s$ をもってくる数え方である (Langer & Perline 1991)．弾性ひもの力とそのモーメントのバランス方程式 (2.9)–(2.12) が渦ジェット糸の方程式 (1.11) と項を共有することはこの変分原理から了解できよう．

弾性ひものダイナミックスは重要でかつ面白い (Nishinari 1997)．渦ジェット糸との静力学レベルでのアナロジーはひものダイナミックスにどのようにつながっていくのだろうか？

5 変分原理 II

捩りエネルギーを捩率の積分で代用する前節のやり方は強引さを否めない．全弾性エネルギー (4.1) 極小の条件からひもの平衡配位を導く変分原理はかなり整備されてきた

(Kawakubo 2000, 2004). Euler 角を用いるやり方が手っ取り早い (Tsuru 1987) が，議論をなるべく §4 と平行に進めたいので，わざと Euler 角を避ける道を探そう．

物質正規直交枠 $(\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{t}(s))$ のキネマティックな関係を天下り的に仮定する．すなわち，物質枠の単位長さ当たりの回転角を $\boldsymbol{\omega}$ として，(2.7) および，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_1 \tag{5.1}$$

を仮定する．残りのベクトル $\boldsymbol{e}_2$ の変化率は，定義式 $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{e}_1$ より自動的に決まる．

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} = 1\,, \quad \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1\,, \quad \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \tag{5.2}$$

も念頭においておく必要がある．回転率 $\boldsymbol{\omega}$ の接線成分 ω_3 (2.10) は，(5.1) より，

$$\omega_3 = \boldsymbol{t} \cdot \left(\boldsymbol{e}_1 \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s} \right) \tag{5.3}$$

で与えられる．したがって，拘束条件 (5.2) を補正した全弾性エネルギー (4.1)

$$\begin{aligned} \hat{E}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_1] \;=\; & \frac{A}{2}\int_0^L \boldsymbol{t}_s \cdot \boldsymbol{t}_s \mathrm{d}s + \frac{C}{2}\int_0^L [\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_{1s})]^2 \, \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^L \lambda_1(s)(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} - 1)\, \mathrm{d}s \\ & + \frac{1}{2}\int_0^L \lambda_2(s)(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 - 1)\, \mathrm{d}s + \int_0^L \lambda_3(s)\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{e}_1 \, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.4}$$

は $\boldsymbol{t}(s)$ および $\boldsymbol{e}_1(s)$ $(0 \le s \le L)$ の汎関数とみなせる．ここで，λ_1, λ_2, λ_3 は Lagrange の未定乗数で，(5.2) が中心線上の各点で成立しなければならないので，s の関数である．

物質枠が $\boldsymbol{t}(s) \to \boldsymbol{t}(s) + \delta\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{e}_1(s) \to \boldsymbol{e}_1(s) + \delta\boldsymbol{e}_1(s)$ と変化したときの全エネルギーの変分 $\delta\hat{E}$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \delta\hat{E} \;=\; & \int_0^L \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[A\boldsymbol{t}_s \cdot \delta\boldsymbol{t} + C\omega_3\,(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{e}_1) \cdot \delta\boldsymbol{e}_1\right] \right. \\ & + \left[-A\boldsymbol{t}_{ss} + C\omega_3\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_{1s} + \lambda_1(s)\boldsymbol{t} + \lambda_3(s)\boldsymbol{e}_1\right] \cdot \delta\boldsymbol{t} \\ & \left. + \left[C\omega_3\,(2\boldsymbol{e}_{1s} \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{t}_s) - C\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2(s)\boldsymbol{e}_1 + \lambda_3(s)\boldsymbol{t}\right] \cdot \delta\boldsymbol{e}_1 \right\} \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.5}$$

となる．滑らかな閉曲線に対しては，1 行目の微分項は消える．ここで，$\delta\boldsymbol{e}_1(s+L) = \boldsymbol{e}_1(s)$, $\delta\boldsymbol{t}(s+L) = \boldsymbol{t}(s)$ をみたす任意の変分 $\delta\boldsymbol{t}(s)$, $\delta\boldsymbol{e}_1(s)$ $(0 \le s \le L)$ に対して，$\delta\hat{E} = 0$ を要請すると，$\delta\boldsymbol{e}_1$ の係数ベクトルは $\boldsymbol{0}$ となり，(4.5) を考慮すると，$\delta\boldsymbol{t}$ の係数ベクトルは定数となる．この定数ベクトルを $-\boldsymbol{V}$ とおく．こうして，次の形の Euler-Lagrange 方程式の組に導かれた：

$$A\boldsymbol{t}_{ss} - C\omega_3\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_{1s} - \lambda_1\boldsymbol{t} - \lambda_3\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{V}\,, \tag{5.6}$$

$$C\omega_3\,(2\boldsymbol{e}_{1s} \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{t}_s) - C\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_1 + \lambda_3\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.7}$$

この組から $\boldsymbol{e}_1$ を追い出したい．2 番目の式 (5.7) と $\boldsymbol{e}_2$ との内積をとると，

$$C\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{5.8}$$

すなわち，(2.13) を得る．(5.7) と $\boldsymbol{t}$ との内積をとると，

$$\lambda_3 = C\omega_3\omega_1 \tag{5.9}$$

を得る．当然，$\omega_1 = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e}_1$ である．1 番目の式 (5.6) に (5.9) を代入すると，若干の計算の後，

$$A\boldsymbol{t}_{ss} - C\omega_3\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}_s - (C\omega_3^2 + \lambda_1)\boldsymbol{t} = \boldsymbol{V} \tag{5.10}$$

に到達する．

前節の結果 (4.10) と同等であることは一目瞭然である．本節のやり方の方が物理の立場では直接的であるので，Langer & Perline (1996) の方法を正当化できたことになる．パラメータ同士の対応関係をまとめておく．やはり，$\boldsymbol{V}$ は共通で内部応力の反対符号，そして，

$$\alpha \longleftrightarrow C\omega_3\,,\quad \beta \longleftrightarrow \lambda_1 + C\omega_3(\omega_3 - \tau) \tag{5.11}$$

である．

ひもの変位に関する直接的な変分原理もある (Kawakubo 2000, 2004)．それには，弧長パラメータを保つひもの変分に関する全弾性エネルギーの臨界配位が (パラメータは必ずしも保たなくてよいが) 長さを保つ変分に関する臨界配位と同値であることを証明し，後者を利用する．本節の物質枠 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_1$ に関する変分原理には汎用性があり，§4 の方法と違って，断面が円とは限らない一般の弾性ひもに対しても容易に拡張できるであろう．

6　局所誘導階層と渦糸の運動

弾性ひもの平衡形とダイナミックスの扱いの間にはギャップがある (Nishinari 1997)．修正 KdV 方程式も非線形 Schrödinger 方程式もひもの時間発展を記述する方程式になり得ない．広田方程式 (1.12)，あるいは，もともとの渦ジェット糸の方程式 (1.9) にとっても事情は同じであろう．修正 KdV 階層 (Goldstein & Petrich 1991) が弾性ひもの統計力学における熱ゆらぎの効果として登場するのは興味深い (Matsutani 1998)．

一方，冒頭 (§1) で触れたように，局所誘導階層 (LIH) は渦管の‘骨格 (skelton)’をなす．低次の項は Euler 方程式の [渦核半径]/[曲率半径] 比による漸近展開と歩調を合わせている．第 1 番目 (1.5) は局所誘導方程式 (1.1)，第 2 番目 (1.6) は軸流 (jet) の効果，第 3 番目 (1.7) は有限太さからくる双極子列の効果に符号する (Fukumoto 2002; Fukumoto & Okulov 2005)．

この手続きを繰り返すとどうなるであろうか？　渦管を離れて，LIH に属する無限個のベクトル場を次のようにすべて足し上げることによって作られる発展方程式

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{V}^{(1)} + \epsilon \boldsymbol{V}^{(2)} + \epsilon^2 \boldsymbol{V}^{(3)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1} \boldsymbol{V}^{(n)} \tag{6.1}$$

を考えてみよう．ϵ は定数である．この和は形式的であって，さしあたり，収束性は棚上げにする．再帰演算子 (1.8) のおかげで，無限和がコンパクトな形にまとめられる (Fukumoto & Miyajima 1996)：

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss} - \epsilon \boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ts} + \mathcal{T} \boldsymbol{X}_s . \tag{6.2}$$

ここで，

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \epsilon \boldsymbol{X}_t \cdot \boldsymbol{X}_t + b(t) \tag{6.3}$$

で，$b(t)$ は t の任意の実関数である．

形を変えずに運動をするひもの解に限定すれば，Lund-Regge 方程式の解と等価である (Fukumoto & Miyajima 1996; Konno & Kakuhata 1999)．後者は，相対論的な ‘南部弦’ と渦糸とを融合させる試みの中で生まれた (Lund & Regge 1976)．方程式 (6.2) が示唆するのは，任意の局在したひもの変形から漸近的に両方向に伝わるソリトンが生ずるだろう，ということである．線形波動方程式の解の振る舞いを思い浮かべられたい．片方の伝播速度が極めてはやいのが特徴である．局所誘導方程式 (1.1) の橋本ソリトンは (6.2) のおそいソリトンに対応し，(1.1) ははやいソリトンの対応物はもたない．自然界の渦管も両側に伝わるソリトンをもってもよさそうな気もするが，Euler あるいは Navier-Stokes 方程式からどうやれば (6.2) に相当する縮約方程式が導けるか？　現時点ではよくわからない．

謝辞

川久保哲氏 (福岡大) には貴重なご議論を頂きました．ここに感謝申し上げます．

参考文献

[1] Betchov, R. (1965) On the curvature and torsion of an isolated vortex filament, *J. Fluid Mech.* **22**, 471–479.

[2] Da Rios, L. S. (1906) On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape. [in Italian] *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 117-135.

[3] Fukumoto, Y. (1997) Stationary configurations of a vortex filament in background flows, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **453**, 1205–1232.

[4] Fukumoto, Y. (2002) Three-dimensional motion of a vortex filament and its relation to the localized induction hierarchy, *Euro. Phys. J. B* **29**, 167–171.

[5] Fukumoto, Y. & Miyajima, M. (1996) The localized induction hierarchy and the Lund-Regge equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 8025–8034.

[6] Fukumoto, Y. & Miyazaki, T. (1991) Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity, *J. Fluid Mech.* **222**, 369-416.

[7] Fukumoto, Y. & Moffatt, H. K. (2000) Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part 1. A higher-order asymptotic formula for the velocity, *J. Fluid Mech.* **417**, 1–45.

[8] Fukumoto, Y. & OKulov, V. (2005) The velocity field induced by a helical vortex tube, *in preparation.*

[9] Goldstein, R. E. & Petrich, D. M. (1991) The Korteweg-de Vries hierarchy and dynamics of closed curves in the plane, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3203-3206.

[10] Hasimoto, H. (1971) Motion of a vortex filament and its relation to elastica, *J. Phys. Soc. Japan* **31**, 293-294.

[11] Hasimoto, H. (1972) A soliton on a vortex filament, *J. Fluid Mech.* **51**, 477-485.

[12] Hasimoto, H. & Kambe, T. (1985) Simulation of invariant shapes of a vortex filament with an elastic rod, *J. Phys. Soc. Japan* **54**, 5-7.

[13] Hirota, R. (1973) Exact envelop-soliton solutins of a nonlinear wave-equation, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 805–809.

[14] Kawakubo, S. (2000) Stability and bifurcation of circular Kirchhoff elastic rods, *Osaka J. Math.* **37**, 93–137. Errata: *Osaka J. Math.* **37** (2000) 525.

[15] Kawakubo, S. (2004) Kirchhoff elastic rods in the three-sphere, *Tohoku Math. J.* **56**, 205–235.

[16] Kida, S. (1981) A vortex filament moving without change of form, *J. Fluid Mech.* **112**, 397-409.

[17] Konno, K. & Kakuhata, H. (2000) Relationship between the dispersionless equation and the localized induction hierarchy through the Pohlmeyer-Lund-Regge equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 7821-7825.

[18] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1986) *Theory of Elasticity.* 3rd. ed. Secs. 18, 19. Pergamon Press.

[19] Langer, J. & Perline, R. (1991) Poisson geometry of the filament equation, *J. Nonlinear Sci.* **1**, 71-93.

[20] Langer, J. & Singer, D. (1996) Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod, *SIAM Rev.* **38**, 605-618.

[21] Littlejohn, R. G. (1988) Phase anholonomy in the classical adiabatic motion of charged particles, *Phys. Rev. A* **38**, 6034-6045.

[22] Love, A. E. H. (1926) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Chap. 19. Dover, New York.

[23] Lund, F. & Regge, T. (1976) Unified approach to strings and vortices with soliton solutions, *Phys. Rev. D* **14**, 1524–1535.

[24] Magri, F. (1978) A simple model of the integrable Hamiltonian equation, *J. Math. Phys.* **19**, 1156–1162.

[25] Matsutani, S (1998) Statistical mechanics of elastica on a plane: origin of the MKdV hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 2705-2725.

[26] Maxworthy, T., Hopfinger, E. J. & Redekopp, L. G. (1985) Wave motions on vortex cores, *J. Fluid Mech.* **151**, 141-165.

[27] Moffatt, H. K. & Ricca, R. L. (1992) Helicity and the Călugăreanu invariant, *Proc. R. Soc. Lond. A* **439**, 411-429.

[28] Moore, D. W. & Saffman, P. G. (1972) The motion of a vortex filament with axial flow, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **272**, 403-429.

[29] Nishinari, K (1997) Nonlinear dynamics of solitary waves in an extensible rod, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **453**, 817–833.

[30] Tsuru, H. (1987) Equilibrium shapes and vibrations of thin elastic rod, *J. Phys. Soc. Japan* **56**, 2309-2324.