数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 9-18

On the p-adic absolute CM-period symbol

京都大学大学院・理学研究科
(Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University)
加塩　朋和 (Tomokazu Kashio), 吉田　敬之 (Hiroyuki Yoshida)

Introduction

CM ピリオド, p 進ピリオドと多重 Γ 函数, p 進多重 Γ 函数の間の関係について述べる. 導入としてここでは二つの公式を紹介する.

The Chowla-Selberg formula. K:discriminant を $-d$ とする虚二次体, χ は対応する Dirichlet 指標, $w:=\#$ {roots of unity$\in K$}, h:K の類数, $L(s,\chi)$:指標に付随した L 函数, p_K:Shimura's CM-period symbol (CM 型のアーベル多様体のピリオドから定められる値 [18, 19]) と置き, $a\sim b$ は $a/b\in\overline{\mathbf{Q}}^{\times}$ を意味するとする. このとき

$$\pi p_K(\mathrm{id},\mathrm{id})^2\sim\prod_{a=1}^{d}\Gamma(\frac{a}{d})^{w\chi(a)/2h}=d\exp\left(\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}\right). \tag{1}$$

この式の一般化を考える. 一つは多重化, 即ち Γ 函数と虚二次体を多重 Γ 函数と CM 体へと拡張する (Yoshida [22, 23, 24], 及び §1.) そして今回, 更に p 進類似を考えた (§2〜.) 次の公式は式 (1) の p 進類似と見て取れる.

The Gross-Koblitz formula [10]. 記号は式 (1) と同じとする. 更に $K/\mathbf{Q}$ で素イデアル (p) が分解すると仮定し, そのうち K に p 進位相を入れるイデアルを $\mathfrak{P}$ と置く. すると

$$\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}^{\rho}}{\mathfrak{P}}\right)=\frac{w}{2h}\sum_{a=1}^{d}\chi(a)\log_p\Gamma_p(\frac{a}{d})=\frac{L_p'(0,\chi\omega)}{L(0,\chi)}. \tag{2}$$

ただし ρ:複素共役写像, $\log_p$:Iwasawa's p-adic log function [11], Γ_p:Morita's p-adic Γ function [15], L_p:Kubota-Leopoldt's p-adic L function, ω:Teichmüller 指標と置いた. ここでは左辺の値を次で定める. $\mathfrak{P}^h=(\Pi)$ となる $\Pi\in K$ を選び, $\log_p(\mathfrak{P}^{\rho}/\mathfrak{P}):=\frac{1}{h}\log_p(\Pi^{\rho}/\Pi)$. この値は Π の取り方によらない. 式 (1) の左辺は CM ピリオド, 即ち幾何的な値である. 実は式 (2) の左辺も幾何的な解釈, 即ち p 進ピリオドを用いて書ける (§3.)

1 The complex case

まずは吉田教授の CM ピリオドに関する予想について説明する．この内容については吉田教授の本 [24] が詳しい．

1.1 Shintani's formula

F を n 次総実体とし，その整イデアル $\mathfrak{f}$ に対し $C_{\mathfrak{f}}$ は $\mathfrak{f}\infty_1\dots\infty_n$ を法とするイデアル類群と置く．ただし $\{\infty_1,\dots,\infty_n\}$ は archimedean prime の全体．この時 $\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}}$ に関する partial ζ 函数 $\zeta_F(s,\mathfrak{c}):=\sum_{\text{整イデアル}\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{c}}N(\mathfrak{a})^{-s}$ に対して次の新谷公式 [21] が成り立つ．

Theorem (Shintani).

$$\zeta'_{\mathfrak{f}}(0,\mathfrak{c})=\sum_{\sigma\in J_F}\sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j))}L\Gamma_{r(j)}(z^\sigma,v_j^\sigma)+\textit{correction terms}.$$

ただし J_F: F から $\mathbf{C}$（p 進の場合は $\mathbf{C}_p$）の中への同型全体，v_j: O_F(F の整数環) の元で総正なものを成分に持つ $r(j)$ 次のベクトル，$J,R(\mathfrak{c},j)$:有限集合である．更に多重 ζ 関数及び Barnes の多重 Γ 函数を $z>0$, $v=(v_1,\dots,v_r)$, $v_i>0$ に対して次で定める．

$$\zeta_r(s,v,z):=\sum_{n\in\mathbf{Z}^r_{\geq 0}}(z+v\,{}^t n)^{-s},\quad L\Gamma_r(z,v):=\zeta'_r(0,v,z).$$

ここで $\mathbf{Z}^r_{\geq 0}$ は非負整数を成分にもつ r 次ベクトル全体を表す．ただし $L\Gamma_r(z,v)=\log(\frac{\Gamma_r(z,v)}{\rho_r(v)})$ と二つの函数に分けて書くのが通例である．

Remark. $J,v_j,R(\mathfrak{c},j)$ はコーン分解と呼ばれる操作による．吉田教授は次を示した．

- 各 v_j の成分 $v_{j,i}$ は $O_F^\times$ の元で取れる．
- *correction terms* の部分は有限集合 I 及び $a_i,b_i\in F$ が存在して $\sum_{\sigma\in J_F}\sum_{i\in I}a_i^\sigma\log b_i^\sigma$ の形で書ける．

χ: $C_{\mathfrak{f}}$ の指標に対し次の記号を定義する．

$$X^\sigma(\chi):=\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}}}\chi(\mathfrak{c})\left(\sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j))}L\Gamma_{r(j)}(z^\sigma,v_j^\sigma)+\sum_{i\in I}a_i^\sigma\log b_i^\sigma\right).$$

すると新谷公式は次の形に言いなおせる．$L(s,\chi)$:指標 χ に付随した L 函数に対し

$$L'(0,\chi)=\sum_{\sigma\in J_F}X^\sigma(\chi). \tag{3}$$

1.2 Conjecture C

K: CM 体で K/F がアーベル拡大となるものとする. $G := \mathrm{Gal}(K/F)$, $\hat{G}_-$: G の奇指標全体とし, $\tau = \mathrm{id}, \rho$, その他に対応して $\mu(\tau) := 1, -1, 0$ と置く.

Conjecture C (Yoshida). $\tau \in G$, $\sigma \in J_F$ に対して

$$p_K(\sigma, \tau\sigma) \sim \pi^{-\mu(\tau)/2} \exp\left(\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}_-} \frac{\chi(\tau) X^\sigma(\chi_*)}{L(0,\chi)} \right).$$

ここで χ_* は原始指標に取り直した指標を表す.

Remark. この式の右辺を $g_K(\sigma, \tau\sigma)$ と置き絶対 *CM* ピリオドと呼ぶ. この予想式は *Chowla-Selberg* 公式の一般化を与えている.

Example. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i)$, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ と置くと $O_F^\times \cap \{$ 総実な元 $\} = \langle \epsilon \rangle$, $\epsilon = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ となる. また $p_K(\mathrm{id}, \mathrm{id}) \sim \exists L$-*value* となる (*Shimura [19].*) その *L-value* を使って数値実験すると (小数点以下 112 桁まで)

$$\left(\frac{L\text{-value の積}}{g_K(\mathrm{id}, \mathrm{id})^4} \right) = \epsilon^{22/41} \frac{245 + 60\sqrt{5}}{3 * 41}.$$

2 The p-adic case

以下が今回の共同研究の内容である. まずは道具となる新谷公式の p 進類似式 (Kashio [12, 13]) を導入する.

2.1 p-adic analogue of Shintani's formula

記号は §1.1 と同じとする. p を素数とし $\mathbf{C}_p := \widehat{\overline{\mathbf{Q}}_p}$ と置く. ただし $\hat{}$ は p 進完備化を表す. また埋め込み $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ を固定しておく. $\theta_p := \omega \circ N$ (ノルムと Teichmüller 指標をつなげた指標) を考える. θ_p の法は p が奇素数なら $\prod_{\mathfrak{p}|(p)} \mathfrak{p}$, $p = 2$ なら $(p) \prod_{\mathfrak{p}|(p)} \mathfrak{p}$ となる. この整イデアルを同じ記号 $(p)_0$ と書く. $C_\mathfrak{f}$ の指標 χ と整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し, $\chi_\mathfrak{a}$ で自明な写像 $C_{\mathfrak{f}\mathfrak{a}} \to C_\mathfrak{f}$ と χ をつなげた $C_{\mathfrak{f}\mathfrak{a}}$ の指標を表すこととする. また p 進多重 Γ 函数を Barnes の定義を真似て

$$L\Gamma_{p,r}(z, v) := \zeta'_{p,r}(0, v, z).$$

で定める. ここで $\zeta_{p,r}(s, v, z)$ は多重 ζ 函数の p 進類似である. χ: $C_\mathfrak{f}$ の指標に対し前と同じ a_i, b_i を用いて

$$X_p^\sigma(\chi) := \sum_{\mathfrak{c} \in C_\mathfrak{f}} \chi(\mathfrak{c}) \left(\sum_{j \in J} \sum_{z \in R(\mathfrak{c}, j))} L\Gamma_{p,r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{i \in I} a_i^\sigma \log_p b_i^\sigma \right)$$

と定義しておく. 新谷公式の p 進類似式は次で表される.

Theorem (Kashio). 記号は上記の通りとし, $\chi\theta_p$ は $\mathfrak{f}(p)_0$ を法とする指標とみなす. この時

$$L_p'(0,\chi\theta_p) = \sum_{\sigma\in J_F} X_p^\sigma(\chi_{(p)_0}). \tag{4}$$

2.2 Conjecture $\mathbf{C}_p$

§1.2 と同様に記号 X_p^σ を用いて p 進絶対 CM ピリオドを定義したい. しかし p 進新谷公式中に表れる $X_p^\sigma(\chi_{(p)_0})$ は多くの場合退化した値となっている. 実際次のような式が成り立つ.

$$X_p^\sigma(\chi_{(p)_0}) = X_p^\sigma(\chi_{\mathfrak{p}_\sigma}) \prod_{\mathfrak{p}|(p),\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_\sigma} (1-\chi(\mathfrak{p})) + \text{correction terms}.$$

ただし $\mathfrak{p}_\sigma$ は (p) を割る素イデアルのうち $(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma \subset \{z\in\mathbf{C}_p \mid |z|_p<1\}$ ($|\ |_p$ は p 進付値) を満たすものとする. この考察から $X_p^\sigma(\chi_{\mathfrak{p}_\sigma})$ がより本質的な量であると考えられ次の定義を用いる. $\tau\in G$, $\sigma\in J_F$ に対して p 進 (対数) 絶対 CM ピリオドを

$$lg_{p,K}(\sigma,\tau\sigma) := -\frac{\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma + \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\frac{\chi(\tau)X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})}{L(0,\chi)}.$$

$\log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma$ は式 (2) の時と同様に $(\mathfrak{p}_\sigma)^{h_F}$ の生成元を使って定義する. これは modulo $\mathbf{Q}\log_p O_{F^\sigma}^\times$ でのみ定まる値である. なお絶対 CM ピリオドの定義 (の対数) との類似性は興味深い. 次が我々の Main conjecture である.

Conjecture $\mathbf{C}_p$ (Yoshida, Kashio). $\mathfrak{p}_\sigma$ は K で完全分解していると仮定する. この時 $\tau\in G$, $\sigma\in J_F$ に対して

$$\frac{1}{2}\log_p\left(\frac{(\mathfrak{P}_{\tau\sigma})^\rho}{\mathfrak{P}_{\tau\sigma}}\right)^\sigma \approx lg_{p,K}(\sigma,\tau\sigma).$$

ただし J_F の元は適当に拡大しておいて J_K の元とみなし, $\varphi\in J_K$ に対し $\mathfrak{P}_\varphi$ は (p) を割る K の素イデアルのうち $(\mathfrak{P}_\varphi)^\varphi\subset\{z\in\mathbf{C}_p \mid |z|_p<1\}$ を満たすものをとり, $\approx$ は両辺が mod $\mathbf{Q}\log_p O_{F^\sigma}^\times$ で等しいことを意味する. なお左辺の形は式 (2) と同様に一意的に定まる値である.

Remark. この予想式は *Gross-Koblitz* 公式の一般化を与えている. また実際はより精密な形を持つ. 即ち両辺の差 ($\in\mathbf{Q}\log_p O_{F^\sigma}^\times$) に関する予想である. これを用いると後述の *Gross* 予想を導くことができる (§4.)

Example. K,F は先の例と同じとする. この時 $p=11,19,29$ は F まで完全分解で, (p) を割る二つの素イデアルの内一つが K で完全分解, もう一つは *remain prime.* $p=59$ とすると K まで完全分解となっている. $h_F=h_K=1$ となっており $\mathfrak{p}_{\mathrm{id}},\mathfrak{P}_{\mathrm{id}}$ の生成元を $\pi_{\mathrm{id}},\Pi_{\mathrm{id}}$ と置くと $p=11,19,29,59$ に対し $(\pi_{\mathrm{id}},\Pi_{\mathrm{id}}) = (4+\sqrt{5}, \frac{-\sqrt{5}}{2}+\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i)$,

$(\frac{9+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-3\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i)$, $(\frac{11+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+3\sqrt{5}}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i)$, $(8+\sqrt{5}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i)$.
$\sigma, \tau = \mathrm{id}$ とし $lg_{p,K}(\mathrm{id},\mathrm{id}) - \frac{1}{2}\log_p\left(\frac{\Pi_{\mathrm{id}}^{\rho}}{\Pi_{\mathrm{id}}}\right)$ を計算すると (p 進数として４０桁以上)

$$p = 11, 19, 29, 59 \text{ に対し} \frac{-23\log_p \epsilon}{4*41*p}, \frac{-175\log_p \epsilon}{4*41*p}, \frac{-2087\log_p \epsilon}{4*41*p}, \frac{2178\log_p \epsilon}{4*41*p}.$$

3 Comparison of cohomologies

conjecture **C** はCM ピリオドと多重Γ函数との関係を表したものである. 実はconjecture $\mathbf{C}_p$ も p 進ピリオドと p 進多重Γ函数との関係式だと見て取れる. まずはCM ピリオドをコホモロジーの言葉で表してみる. A をCM型 (K,Φ) を持ち K による虚数乗法も含めて代数体 k 上定義されたアーベル多様体とする. すると虚数乗法論 [19] より $K^* \subset k$, ただし (K^*, Φ^*) を (K,Φ) の reflex と置いた. 次の自然な $K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$-同型を考える.

$$I_{\mathrm{dR}} : H^1_{\mathrm{dR}}(A) \otimes_k \mathbf{C} \cong H^1_{\mathrm{B}}(A) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}.$$

ここで $H^1_{\mathrm{dR}}(A) \cong K \otimes_{\mathbf{Q}} k$ をドラムコホモロジー, $H^1_{\mathrm{B}}(A) \cong K$ を（$\mathbf{Q}$ 係数の）ベッチコホモロジーと置いた. またそれぞれの $K \otimes_{\mathbf{Q}} k$-基底 c_{dR}, K-基底 c_{B} を固定しておく. この時CM ピリオドは次の式で特徴付けられる.

$$I_{\mathrm{dR}}(c_{\mathrm{dR}} \otimes 1) = p_K(\Phi)(c_{\mathrm{B}} \otimes 1),\ p_K(\Phi) := (\pi p_K(\sigma,\Phi))_{\sigma \in J_K} \in \oplus_{\sigma \in J_K}\mathbf{C} = K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}.$$

さて同様に p 進ピリオドを定めよう. A が k の素イデアル $\mathfrak{P}$ で good reduction $A_{\mathfrak{P}}$ を持つとし次の自然な $K \otimes_{\mathbf{Q}} B_{\mathrm{cris}}$-同型を考える.

$$I_{\mathrm{cris}} : H^1_{\mathrm{cris}}(A_{\mathfrak{P}}) \otimes_W B_{\mathrm{cris}} \cong H^1_{\mathrm{et}}(A_{\overline{k}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{\mathrm{cris}}.$$

ただし $A_{\overline{k}} := A \otimes_k \overline{k}$, $H_{\mathrm{cris}}(A_{\mathfrak{P}})$ はクリスタリンコホモロジー, $H_{\mathrm{et}}(A_{\overline{k}})$ はエタールコホモロジー, W は $O_k/\mathfrak{P}$ 係数ヴィットベクター環, B_{cris} はある巨大な環である. 先と同様に基底 c_{cris}, c_{et} を固定し次を p 進ピリオドの定義とする.

$$I_{\mathrm{cris}}(c_{\mathrm{cris}} \otimes 1) = p_{p,K}(\Phi)(c_{\mathrm{et}} \otimes 1),\ p_{p,K}(\Phi) \in K \otimes_{\mathbf{Q}} B_{\mathrm{cris}}.$$

p 進ピリオドの住む B_{cris} はとても巨大で $\mathbf{C}_p$ の元である p 進絶対CM ピリオドとは無関係に見える. ところが虚数乗法論から導かれる次のLemma が興味深い関係式を導く.

Lemma. $\varphi_{\mathfrak{P}}$ を $\mathfrak{P}$ でのフロベニウスとすると自然に $H_{\mathrm{cris}}(A_{\mathfrak{P}})$ へ作用する. この時 $\Pi \in K$ が存在し $\varphi_{\mathfrak{P}}(c_{\mathrm{cris}}) = \Pi c_{\mathrm{cris}}$. さらにこの元は $\Pi O_K = \prod_{\sigma \in \Phi^*}(N_{k/K^*}(\mathfrak{P}))^{\sigma}$ を満たす.

簡単のため K まで (p) は不分岐とする. $\sigma \in J_K$ に対し $p_{p,K}(\Phi) \in K \otimes_{\mathbf{Q}} B_{\mathrm{cris}} = \oplus_{\sigma \in J_K} B_{\mathrm{cris}}$ の σ 成分で $p_{p,K}(\sigma,\Phi)$ を定義し, 更に線形性で分解することにより $\tau \in J_K$ に対して $p_{p,K}(\sigma,\tau)$ を定義する. 上のLemma を用いて計算すると次のTheorem が示され, conjecture **C** と同様に conjecture $\mathbf{C}_p$ の左辺は p 進ピリオドで表される量となる.

Theorem. $\sigma \in J_K, \tau \in G$ に対して

$$\frac{f_{\mathfrak{P}_\sigma}}{f_{\mathfrak{P}}} \log_p p_{p,K}(\sigma, \tau\sigma)^{1-\varphi_{\mathrm{cris}}^{f_{\mathfrak{P}}}} = \frac{1}{2} \log_p \left(\frac{(\mathfrak{P}_{\tau\sigma})^\rho}{\mathfrak{P}_{\tau\sigma}} \right)^\sigma .$$

ただし $f_{素イデアル}$ は素イデアルの次数を表し φ_{cris} は B_{cris} へ作用する絶対フロベニウスである.

4 Gross' conjecture

Gross は p 進 partial ζ 函数の微分に関する予想を立てた ([9].) これは p 進 L 函数に対する次の予想と同値である.

G-conjecture. $\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}$ が K で完全分解していると仮定する. この時 $\chi \in \hat{G}_-$ に対して

$$\frac{L_p'(0, \chi\theta_p)}{L(0, \chi)} = \frac{\prod_{\mathfrak{p}|(p),\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_{\mathrm{id}}} (1 - \chi(\mathfrak{p}))}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \sum_{\sigma \in J_{F_{\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}}} \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_{\mathrm{id}}^\rho}{\mathfrak{P}_{\mathrm{id}}} \right)^{\tau\sigma} .$$

ただし $J_{F_{\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}} := \{\sigma \in J_F \mid (\mathfrak{p}_{\mathrm{id}})^\sigma \subset \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z|_p < 1\}\}$ と置いた.

Remark. *G-conjecture* は $\#\{\mathfrak{p}|(p) \mid \chi(\mathfrak{p}) = 1\} \geq 2$ の場合は $L_p'(0, \chi_*\theta_p) = 0$ を言うのみである. これは *[12, 13]* において既に示してある.

この予想と我々の p 進絶対 CM ピリオドに関する予想の関係を見てみよう. 新しい記号を導入する. $[\ ]_{p-\mathrm{adic}}$: $\{\sum a \log b \mid a, b \in \overline{\mathbf{Q}},\ b \neq 0\} \subset \mathbf{C}$ から $\{\sum a \log_p b \mid a, b \in \overline{\mathbf{Q}},\ b \neq 0\} \subset \mathbf{C}_p$ への $\overline{\mathbf{Q}}$-線形写像を $[\log b]_{p-\mathrm{adic}} = \log_p b$ $(b \in \overline{\mathbf{Q}}^\times)$ で定める. これは [3] で示されている"$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbf{Q}}$ に対して $\{\log \alpha_1, \cdots, \log \alpha_n\}$ が $\mathbf{Q}$ 上一次独立であれば $\overline{\mathbf{Q}}$ 上でも一次独立である"という事実により矛盾なく定義される. 多重 Γ 函数, p 進多重 Γ 函数の基本的な性質から次の Lemma が示される.

Lemma. χ は $C_{\mathfrak{f}}$ の指標とし $\chi(\mathfrak{q}) = 1$ とする ($\mathfrak{q}$ はある素イデアル.) この時

$$X^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}}) = L(0, \chi) \log \mathfrak{q}^\sigma + \sum a \log b,\ a \in \mathbf{Q}(\chi),\ b \in O_{F^\sigma}^\times$$

の形となる. $\mathbf{Q}(\chi)$ は χ の値域を含む最小の体とした. 特に $X^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}})$ は $[\ ]_{p-adic}$ の定義域に入る. 更に $\mathfrak{p}_\sigma | \mathfrak{f}$ とすると

$$X_p^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}}) = [X^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}})]_{p-adic}.$$

我々の予想 (conjecture $\mathbf{C}_p$) は次式で更に精密な形に言い換えられる.

KY-conjecture. $\mathfrak{p}_\sigma$ は K で完全分解を仮定すると $\chi \in \hat{G}_-$ に対して

$$X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma}) = [X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})]_{p-adic} + \frac{L(0, \chi)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma} \right)^{\tau\sigma} .$$

Remark. *Lemma* を用いて計算すると *KY-conjecture* から *conjecture* $\mathbf{C}_p$ の式を mod $\mathbf{Q}(\chi)\log_p O_{F^\sigma}^\times$ で示すことができる. 実際 $\tau \in G$ を固定し *KY-conjecture* の両辺に $\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\frac{\chi(\tau)}{L(0,\chi)}\times$ を作用させると

$$(5)\quad lg_{p,K}(\sigma,\tau\sigma)+\frac{\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\frac{\chi(\tau)[X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})]_{p-adic}}{L(0,\chi)}+\frac{1}{2}\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau^{-1}\sigma}.$$

定義より $(\mathfrak{P}_{\tau\sigma})^\sigma=\mathfrak{P}_\sigma{}^{\tau^{-1}\sigma}$. また *Lemma* より

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\frac{\chi(\tau)[X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})]_{p-adic}}{L(0,\chi)}=\frac{\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma+\mathbf{Q}(\chi)\log_p O_{F^\sigma}^\times \text{の元の和}$$

が示される. 正確に導くには *Lemma* より強い形の式が必要で, これはコーン分解等の"精密な議論 (a)"から示される.

最後に KY-conjecture と G-conjecture の強弱を考える.

Theorem. *KY-conjecture* が成り立つ時 *G-conjecture* も成立する.

Proof. $\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}$ が K で完全分解, 及び KY-conjecture を過程する. 特に $\sigma\in J_{F_{\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}}$ に対して

$$(6)\qquad X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}})=[X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}})]_{p-\mathrm{adic}}+\frac{L(0,\chi)}{2}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau\sigma}.$$

更にコーン分解等の"精密な議論 (b)"から次が示される.

$$(7)\qquad X_p^\sigma(\chi_{*(p)_0})=[X^\sigma(\chi_{*(p)_0})]_{p-\mathrm{adic}}+\frac{L(0,\chi_{(p)_1})}{2}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau\sigma}.$$

ただし $(p)_1$ は $(p)_0$ から $\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}$ 成分を全て抜いた整イデアルとする. Lemma より $\sigma\notin J_{F_{\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}}$ に対して

$$X_p^\sigma(\chi_{*(p)_0})=[X^\sigma(\chi_{*(p)_0})]_{p-\mathrm{adic}}.$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{L_p'(0,\chi\theta_p)}{L(0,\chi)}&=\sum_{\sigma\in J_F}\frac{[X^\sigma(\chi_{*(p)_0})]_{p-\mathrm{adic}}}{L(0,\chi)}+\sum_{\sigma\in J_{F_{\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}}}\frac{L(0,\chi_{(p)_1})}{2L(0,\chi)}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau\sigma}\\&=\frac{[L'(0,\chi_{(p)_0})]_{p-\mathrm{adic}}}{L(0,\chi)}+\frac{\prod_{\mathfrak{p}|(p),\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}(1-\chi(\mathfrak{p}))}{2}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)\sum_{\sigma\in J_{F_{\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}}}\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau\sigma}.\end{aligned}$$

$L'(0,\chi_{(p)_0})=*\log p$ の形だから $[L'(0,\chi_{(p)_0})]_{p-\mathrm{adic}}=*\log_p p=0$. よって G-conjecture が導けた. □

Remark. *Example* において $p=11,19,29$ の場合は *KY-conjecture* と *G-conjecture* が同値になり計算結果も予想と一致. しかし $p=59$ においては *G-conjecture* は p 進絶対 *CM* ピリオドの値に対しては何も言っていないのに対し *KY-conjecture* と計算結果は一致している. この場合は *G-conjecture* より真に強い予想となる.

Remark (精密な議論). 以下では絶対 CM ピリオド及び p 進絶対 CM ピリオドの厳密な定義を用いて各予想の強弱を示す．詳しくは [24, 14]．ここまでの $X^\sigma, g_K, X_p^\sigma, lg_{p,K}$ の定義は $C_{(1)}$ の代表元 $\{\mathfrak{a}_\mu\}$ を固定して考えていた．代表元を $\{\mathfrak{b}_\mu\}$ に取り替えた場合 $X^\sigma(\chi,\{\mathfrak{b}_\mu\})$ のように表記して表す事とする．また $X^\sigma(\chi)$ の正確な定義は [24] の記号で $X^\sigma(\chi) := \sum_{\mathfrak{c}\in C_\mathfrak{f}} \chi(\mathfrak{c})(G(\mathfrak{c}^\sigma)+W(\mathfrak{c}^\sigma)+V(\mathfrak{c}^\sigma))$ となるが，ここでは少し変更して $W(\mathfrak{c}^\sigma)$ を次で定める．

$$W(\mathfrak{c}^\sigma) := -\log(\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f})^\sigma \zeta_\mathfrak{f}(0,\mathfrak{c}).$$

なお $\log$(分数イデアル), $\log_p$(分数イデアル) の値は式 (2) と同様に (分数イデアル)^{h_F} の生成元を用いて定める事とするが，次を満たすように同時的に定める必要がある．

- $\log_p$(分数イデアル) $=$ [$\log$(分数イデアル)]$_{p-adic}$.
- $\log_p, \log$ ともに乗法を加法に移す．
- ((分数イデアル)$^\sigma$)^{h_F} の生成元は ((分数イデアル)^{h_F}の生成元)$^\sigma$ を選ぶ．

χ は $C_\mathfrak{f}$ の指標とし $(\mathfrak{f},\mathfrak{q})=1$ とする ($\mathfrak{q}$ はある素イデアル.) 上記の *Lemma* は次のように精密化できる．

$$X^\sigma(\chi_\mathfrak{q}) = X^\sigma(\chi,\{\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{q}\}) - \chi(\mathfrak{q})X^\sigma(\chi) + \chi(\mathfrak{q})L(0,\chi)\log\mathfrak{q}^\sigma. \tag{8}$$

更に $\mathfrak{p}_\sigma | \mathfrak{f}$ とすると

$$X_p^\sigma(\chi_\mathfrak{q}) = X_p^\sigma(\chi,\{\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{q}\}) - \chi(\mathfrak{q})X_p^\sigma(\chi) + \chi(\mathfrak{q})L(0,\chi)\log_p\mathfrak{q}^\sigma. \tag{9}$$

この式を用いると”精密な議論”が出来る．

精密な議論 (a). 式 (5) から *conjecture* $\mathbf{C}_p$ を導く．式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} &lg_{p,K}(\sigma,\tau\sigma) + \frac{\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-} \frac{\chi(\tau)[X^\sigma(\chi_*,\{\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{p}_\sigma\}) - X^\sigma(\chi_*)]_{p-adic}}{L(0,\chi)} + \frac{\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma + \frac{1}{2}\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau^{-1}\sigma}. \end{aligned}$$

よって絶対 CM ピリオドの定義より

$$lg_{p,K}(\sigma,\tau\sigma) - \frac{1}{2}\log_p\left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau^{-1}\sigma} = \log_p\left(\frac{g_K(\sigma,\tau\sigma,\{\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{p}_\sigma\})}{g_K(\sigma,\tau\sigma)}\right).$$

新しい定義の絶対 CM ピリオドは，イデアル類群の代表元の取り方によって $(O_{F^\sigma}^\times)^{\mathbf{Q}}$ の元倍しか動かない．よって示せた．

精密な議論 (b). 式 *(6)* から式 *(7)* を出す. $\mathfrak{p}_{\mathrm{id}} \neq \mathfrak{q}$ とすると *(9), (6), (8)* の順に式を使って

$$\begin{aligned}
X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}\mathfrak{q}}) &= X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}, \{\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{q}\}) - \chi(\mathfrak{q}) X_p^\sigma(\chi) \\
&= [X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}}, \{\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{q}\})]_{p-adic} + \frac{L(0,\chi)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau\sigma} \\
&\quad - \chi(\mathfrak{q})[X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}})]_{p-adic} - \chi(\mathfrak{q}) \frac{L(0,\chi)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau\sigma} \\
&= [X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\mathrm{id}}\mathfrak{q}})]_{p-adic} + \frac{L(0,\chi_{\mathfrak{q}})}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma}\right)^{\tau\sigma}.
\end{aligned}$$

同様の計算を繰り返すことによって式 *(7)* を導ける.

参考文献

[1] G. W. Anderson, Logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions and the periods of abelian varieties, Comp. Math. 45(1982), 315–332.

[2] A. Baker, Linear Forms in the logarithms of algebraic numbers I, Mathematika 13 (1966), 204–216.

[3] A. Baker, Linear Forms in the logarithms of algebraic numbers II, Mathematika 14 (1966), 102-107.

[4] E. W. Barnes, On the theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374–425.

[5] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négative des fonction zêta et fonction zêta p-adiques, Inv. Math. 51(1979), 29–59.

[6] P. Colmez, Périods des variétés abéliennes à multiplication complexe, Ann. of Math. 138(1993), 625–683.

[7] E. de Shalit, On monomial relations between p-adic periods, Journal für reine und angew. Math., 374(1987), 193–207.

[8] R. Gillard, Relations monomiales entre périodes p-adiques, Invent. Ma-th. 93(1988), 355–381.

[9] B. H. Gross, p-adic L-series at $s = 0$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28(1981), 979–994.

[10] B. H. Gross and N. Koblitz, Gauss sums and the p-adic Γ-function, Ann. Math., 109(1979), 569–581.

[11] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, Annals of Math. Studies, 74, Princeton University Press, 1972.

[12] T. Kashio, On a p-adic analogue of Shintani's formula, to appear in J. Math. Kyoto University.

[13] T. Kashio, p-adic analogue of Shintani's formula, 数理解析研究所講究録 1324 (2003), 47-57.

[14] T. Kashio and H. Yoshida, On the p-adic absolute CM-periods, Proceedings of International Conference on Algebra and Number Theory, University of Hyderabad, December 2003, to be published by NBHM and AMS.

[15] Y. Morita, A p-adic analogue of the Γ function, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), no. 2, 255-266.

[16] A. Ogus, A p-adic analogue of the Chowla-Selberg formula, Lecture notes in Math., 1454, 319–341, Springer Verlag, 1990.

[17] G. Shimura, Automorphic forms and periods of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan 31(1979), 561–592 (=Collected Papers III, [79a]).

[18] G. Shimura, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, Ann. of Math. 111(1980), 313–375 (=Collected Papers III, [80]).

[19] G. Shimura, Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, Princeton Mathematical Series 46, Princeton University Press, 1998.

[20] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23(1976), 393–417.

[21] T. Shintani, On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, in Algebraic Number Theory, Proc. International Symp., Kyoto, 1976, 201–212, Kinokuniya, 1977.

[22] H. Yoshida, On absolute CM–periods, Proc. Symposia Pure Math. 66, Part 1, 1999, 221–278.

[23] H. Yoshida, On absolute CM-periods II, Amer. J. Math. 120(1998), 1199–1236.

[24] H. Yoshida, Absolute CM-periods, Mathematical Surveys and Monographs 106, American Mathematical Society, 2003.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University,
Kyoto 606-8502, Japan
email address: kashio@math.kyoto-u.ac.jp
email address: yoshida@math.kyoto-u.ac.jp