

## 岩澤加群の構造について

慶應義塾大学・理工学部

栗原 将人 (Masato Kurihara)

Department of Mathematics,

Faculty of Science and Technology,

Keio University

$p$  を素数、 $K$  を虚アーベル体とする。 $K$  の円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大  $K_\infty$  に対し、 $K_\infty$  の最大不分岐アーベル pro- $p$  拡大の Galois 群を  $X_{K_\infty}$  で表すことにする (岩澤加群とよばれる)。 $X_{K_\infty}$  を  $\mathbf{Z}_p[[\text{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})]]$  加群と見るとき、その (奇指標成分の) 特性イデアル (Galois 作用の特性多項式で生成されるイデアルと思ってよい) が  $p$  進  $L$  関数で書けるというのが、有名な岩澤主予想である (Mazur Wiles により証明されている)。

この稿で述べたいことのひとつは、 $X_{K_\infty}$  についての、より詳しい情報 (特性イデアル、すなわち岩澤主予想より詳しい情報) が、広い意味での  $p$  進  $L$  関数からわかる、ということである。もうひとつの述べたいことは、今述べたことの証明に使われることなのだが、Gauss 和の Euler 系 (から普通に作られる元の系列) とは違う、大変きれいな性質を持つ元の系列が ( $K$  の円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大の乗法群の中に) 存在している、ということである (§3, 特に 8 ページの 5 つの性質)。

### 1 Results

上で述べたものより、もう少し一般の状況を設定して、得られている結果を述べたいと思う。 $k$  を総実代数体、 $K$  を CM 体で  $K/k$  は有限次アーベル拡大になっているとする。 $\chi$  を  $\text{Gal}(K/k)$  の奇指標で、 $\chi$  の導手は  $K/k$  の導手に等しいとする。さらに  $p$  を奇素数とし、簡単のため  $[K:k]$  は  $p$  と素、 $\chi$  は Teichmüller 指標 ( $\text{Gal}(K/k)$  の 1 の  $p$  巾根  $\mu_p$  への作

用を与える指標)とは異なるとする。\$O\_\chi = \mathbf{Z}\_p[\text{Image}(\chi)]\$ とおく。\$K\_\infty/K\$ を円分 \$\mathbf{Z}\_p\$ 拡大とし、\$K\_\infty\$ の最大不分岐アーベル pro-\$p\$ 拡大の Galois 群 \$X\_{K\_\infty}\$ の \$\chi\$ 成分 \$X\_{K\_\infty}^\chi\$ を考える (\$O\_\chi\$ を \$\sigma \in \text{Gal}(K/k)\$ が \$\chi(\sigma)\$ 倍で作用する \$\mathbf{Z}\_p[\text{Gal}(K/k)]\$ 加群と見て、\$X\_{K\_\infty}^\chi = X\_{K\_\infty} \otimes\_{\mathbf{Z}\_p[\text{Gal}(K/k)]} O\_\chi\$ と定義する)。\$X\_{K\_\infty}^\chi\$ は、\$O\_\chi[[\text{Gal}(K\_\infty/K)]]\$ 加群である。\$\Lambda = O\_\chi[[\text{Gal}(K\_\infty/K)]]\$ とおく。\$X\_{K\_\infty}^\chi\$ が \$O\_\chi\$ 加群としてねじれがないこと (Iwasawa により証明されている) を使うと、\$\Lambda\$ 加群の任意の全射準同型写像 \$\Lambda^n \rightarrow X\_{K\_\infty}^\chi\$ の核は階数 \$n\$ の自由 \$\Lambda\$ 加群になることがわかる。すなわち、

$$0 \rightarrow \Lambda^n \xrightarrow{f} \Lambda^n \rightarrow X_{K_\infty}^\chi \rightarrow 0$$

なる完全系列が存在する。ここで、\$f\$ に対応する行列 \$A\_f\$ の行列式 \$\det A\_f\$ で生成する \$\Lambda\$ のイデアルが \$X\_{K\_\infty}^\chi\$ の特性イデアル \$\text{char}\_\Lambda(X\_{K\_\infty}^\chi)\$ に他ならない。

次に、岩澤主予想を述べるために、\$p\$ 進解析的方面 (\$p\$ 進ゼータ関数) を準備する。一般に \$F/k\$ を有限次アーベル拡大とし、

$$\theta_F = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(F/k)} \zeta_k(\sigma, 0) \sigma^{-1}$$

とおく (\$\zeta\_k(\sigma, s) = \sum\_{(a, F/k)=\sigma} Na^{-s}\$ は部分ゼータ関数、\$(a, F/k)\$ は Artin 記号)。\$k = \mathbf{Q}\$ のときは、\$\theta\_F\$ はいわゆる Stickelberger element である。\$\zeta\_k(\sigma, 0) \in \mathbf{Q}\$ だから \$\theta\_F \in \mathbf{Q}[\text{Gal}(F/k)]\$ である。

\$K\$ を上の通りとし、\$F\$ が \$K\$ を含み \$F/K\$ が \$p\$ 拡大であるとする。\$\text{Gal}(F/k) = \text{Gal}(K/k) \times \text{Gal}(F/K)\$ から \$(\sigma, \tau) \mapsto \chi(\sigma)\tau\$ により環準同型 \$\mathbf{Q}[\text{Gal}(F/k)] \rightarrow \mathbf{Q}[\text{Image } \chi][\text{Gal}(F/K)]\$ が定義されるが、\$\theta\_F\$ のこの写像による像を \$\theta\_F^\chi\$ と書く。\$\chi\$ が Teichmüller 指標とは異なるときには、\$\theta\_F^\chi \in O\_\chi[\text{Gal}(F/K)]\$ となることが知られている (Deligne Ribet)。また、\$F\_\infty/F\$ を円分 \$\mathbf{Z}\_p\$ 拡大、\$F\_m\$ を \$p^m\$ 次の中間体とすると、十分大きな \$m > 0\$ に対して、\$(\theta\_{F\_m}^\chi)\$ は射影系をなし、その射影極限として、\$\theta\_{F\_\infty}^\chi \in O\_\chi[[\text{Gal}(F\_\infty/K)]]\$ が定義できる。\$F = K\$ のとき、上の記号で、\$\theta\_{K\_\infty}^\chi \in \Lambda\$ であることに注意する。\$\theta\_{K\_\infty}^\chi\$ は \$L\$ 関数 \$L\_k(s, \chi)\$ の負の整数点での値を補間する \$p\$ 進関数 (Deligne Ribet の \$p\$ 進 \$L\$ 関数) になっている。この \$\theta\_{K\_\infty}^\chi\$ を使って、岩澤主予想は

$$\text{char}_\Lambda(X_{K_\infty}^\chi) = (\theta_{K_\infty}^\chi)$$

と定式化されている。今の状況だと、この予想は Wiles により証明されている ([7])。

さて一般に、可換環 \$R\$ 上の加群 \$M\$ が \$R\$ 加群の完全系列

$$R^m \xrightarrow{f} R^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

を持つとき、 $M$  の  $r$  次の Fitting イデアル  $\text{Fitt}_{r,R}(M)$  を  $f$  に対応する行列  $A_f$  の  $n-r$  次の小行列式全体で生成される  $R$  のイデアルとして定義する (cf. [4])。ここに、 $r \geq n$  に対しては、 $\text{Fitt}_{r,R}(M) = R$  と定義する。 $M = X_{K_\infty}^\chi$ ,  $R = \Lambda$  のとき、上で述べた状況になっているので、 $\text{Fitt}_{0,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) = \text{char}_\Lambda(X_{K_\infty}^\chi)$  であり、岩澤主予想は  $\text{Fitt}_{0,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) = (\theta_{K_\infty}^\chi)$  とも書ける。

ここで述べようとするのは、 $\text{Fitt}_{0,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi)$  だけでなく、すべての  $r \geq 0$  に対して、 $\text{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi)$  が  $p$  進  $L$  関数  $\theta_{F_\infty}^\chi$  からわかる、という結果である。

$N$  を十分大きな正の整数とする。 $\mathcal{S}$  を次のような条件をみたす体  $F$  の集合とする。すなわち、 $F$  は  $K$  を含み、 $[F:K]$  が  $p$  巾、 $F \cap K_\infty = K$  であり、さらに  $\text{Gal}(F/K) \simeq \mathbf{Z}/p^{n_1} \times \dots \times \mathbf{Z}/p^{n_t}$  と書くとき、 $n_1, \dots, n_t \geq N$  ( $t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  は任意)、およびある小さな条件 (書き上げると複雑なのでここでは省略する、 $k = \mathbf{Q}$  のときはこの条件はなし) をみたすような体  $F$  全体の集合を  $\mathcal{S}$  とする。 $\text{Gal}(F/K)$  のそれぞれの生成元を  $1 + S_1, \dots, 1 + S_t$  に対応させることにより、

$$\begin{aligned} O_\chi[[\text{Gal}(F_\infty/K)]] &= \Lambda[\text{Gal}(F/K)] \\ &\simeq \Lambda[S_1, \dots, S_t] / ((1 + S_1)^{p^{n_1}} - 1, \dots, (1 + S_t)^{p^{n_t}} - 1) \end{aligned}$$

なる同型が得られるが、

$$\theta_{F_\infty}^\chi = \sum_{i_1, \dots, i_t \geq 0} \delta_{i_1, \dots, i_t} S_1^{i_1} \dots S_t^{i_t}$$

( $\delta_{i_1, \dots, i_t} \in \Lambda$ ) と書いたとき、すべての  $F \in \mathcal{S}$  についての

$$\{\delta_{i_1, \dots, i_t} \mid i_1 + \dots + i_t \leq r, i_1 < p, \dots, i_t < p\}$$

の像で生成される  $\Lambda/p^N$  のイデアルを  $\Theta_r^{(N)}$  と書くことにする ( $\theta_{F_\infty}^\chi$  の表示によらずにこのイデアルは well defined)。 $\Lambda$  のイデアル  $\Theta_{r,K_\infty}$  を  $\Theta_{r,K_\infty} = \lim_{\leftarrow} \Theta_r^{(N)}$  で定義する。 $r = 0$  のとき  $\Theta_{0,K_\infty} = (\theta_{K_\infty}^\chi)$  である。

ここで、 $p$  の上にある  $k$  のすべての素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して、 $\chi(\mathfrak{p}) \neq 1$  であると仮定する。

また、 $\mu_\chi$  を  $X_{K_\infty}^\chi$  の岩澤  $\mu$  不変量の  $\chi$  成分とすると、 $\mu_\chi = 0$  であると仮定する。これは、 $X_{K_\infty}^\chi$  が  $O_\chi$  加群として有限生成ということと同値である。 $\mu = 0$  というのは Iwasawa の予想で、最近一般の CM 体で証明されたとの話もあるが、これを書いている時点では判然としないので、ここでは仮定しておく。なお、 $k = \mathbf{Q}$  なら  $\mu = 0$  は Ferrero Washington によって証明されている。

この状況で、岩澤主予想は次のように一般化できる。

**Theorem 1.1** すべての  $r \geq 0$  に対して、 $\text{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) = \Theta_{r,K_\infty}$  が成り立つ。

**Remark 1.2** 岩澤加群  $X_{K_\infty}^\chi$  ではなく、 $K$  のイデアル類群の  $p$ -component  $A_K$  の  $\chi$  成分  $A_K^\chi$  についても同様の定理が成立する。このとき、 $\text{Fitt}_{r,O_\chi}(A_K^\chi)$  を決定すれば、 $A_{K_\chi}^\chi$  の  $O_\chi$  加群としての構造は完全に決定するので、次のような構造定理が得られる。 $\Theta_{r,K}$  を上と同様に定義した  $O_\chi$  のイデアルとすると、 $O_\chi$  加群の同型

$$A_K^\chi \simeq \bigoplus_{r \geq 1} \Theta_{r,K} / \Theta_{r-1,K}$$

が成り立つ。なお、 $k = \mathbf{Q}$  のときは、この定理は Gauss 和の Euler 系を使うことにより、Kolyvagin Rubin により証明された ([5])。  $k$  が一般のときは、[2] で証明されている。Theorem 1.1 は上の構造定理の岩澤加群版である。

## 2 Key ideas

Theorem 1.1 の証明のアイデアを述べる。まず、 $\text{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) \subset \Theta_{r,K_\infty}$  のポイントは  $\theta_{F_\infty}^\chi \in \text{Fitt}_{0,\Lambda[\text{Gal}(F/K)]}(X_{F_\infty}^\chi)$  を示すことである (cf. [1] §8)。この関係は、Wiles によって示された岩澤主予想と  $[F : K]$  についての帰納法によって示される ([1])。

次に  $\text{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) \subset \Theta_{r,K_\infty}$  について述べる。 $K_m$  を  $[K_m : K] = p^m$  なる中間体とし、 $K_m$  のイデアル類群  $Cl_{K_m}$  の  $p$ -component  $A_{K_m} = Cl_{K_m} \otimes \mathbf{Z}_p$  の  $\chi$  成分  $A_{K_m}^\chi$  を考えると類体論により  $X_{K_\infty}^\chi = \varprojlim_{\leftarrow} A_{K_m}^\chi$  であることにまず注意する。

$X_{K_\infty}^\chi$  の生成元を  $c_1, \dots, c_n$  とし、自由加群  $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i$  から  $e_i \mapsto c_i$  により全射準同型写像  $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i \rightarrow X_{K_\infty}^\chi$  を作る。この写像の核はやはり階数  $n$  の自由  $\Lambda$  加群なので、それを  $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda f_i$  と書くことにし、この基底に関する  $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda f_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i$  の行列を  $A$  とする。したがって、

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \Lambda f_i \xrightarrow{A} \bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i \rightarrow X_{K_\infty}^\chi \rightarrow 0$$

なる  $\Lambda$  加群の完全系列が得られている。 $A$  の小行列式を  $K_m$  に関するゼータ関数起源のもので近似していく。

記号の煩雑さを避けるために、しばらく  $K_m = L$  と書くことにする。 $c_i$  の  $X_{K_\infty}^\chi \rightarrow A_{K_m}^\chi = A_L^\chi$  による像も  $c_i$  と書くことにし、自然な写像

$A_L \rightarrow A_L^X$  で  $\mathfrak{c}_i \mapsto c_i$  となるイデアル類  $\mathfrak{c}_i$  をとっておく。 $\mathfrak{c}_i$  に入る素イデアル  $\mathcal{L}_i$  で  $L/k$  で完全分解しているものをとる。 $\mathcal{L}_i$  の下にある  $k$  のイデアルを  $l_i$  とする。 $\text{Div}_L$  を  $L$  の因子全体がなす群、 $\mathcal{D}$  をその素因子がすべて  $l_1, \dots, l_r$  の上にあるような因子全体がなす  $\text{Div}_L$  の部分群、 $\mathcal{K}$  を  $\text{div}(x) \in \mathcal{D}$  となる  $x \in L^\times$  全体がなす  $L^\times$  の部分群とする ( $\text{div}(x)$  は  $x$  が作る単項イデアル  $\in \text{Div}_L$ )。仮定から  $\mathcal{D}$  は階数  $r$  の自由  $\mathbf{Z}[\text{Gal}(L/k)]$  加群であり、完全系列  $L^\times \rightarrow \text{Div}_L \rightarrow Cl_L \rightarrow 0$  から  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow Cl_L \rightarrow 0$  なる完全系列が得られる。 $(\mathcal{D} \otimes \mathbf{Z}_p)^X$  を  $\mathcal{D}^X$ ,  $(\mathcal{K} \otimes \mathbf{Z}_p)^X$  を  $\mathcal{K}^X$  と書くことにすると、 $\chi$  成分をとることにより  $\mathcal{K}^X \rightarrow \mathcal{D}^X \rightarrow A_L^X \rightarrow 0$  なる完全系列が得られるが、 $\chi$  が Teichmüller 指標とは異なる奇指標であることを考えると、 $\mathcal{K}^X \rightarrow \mathcal{D}^X$  は単射であり、完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{K}^X \rightarrow \mathcal{D}^X \rightarrow A_L^X \rightarrow 0$$

が得られる。

$R_L = O_\chi[\text{Gal}(L/K)]$  とおき、最初の完全系列の  $\text{Gal}(K_\infty/L)$ -coinvariant をとると、 $\chi(p) \neq 1$  ( $p \mid p$ ) の仮定から、次のような完全系列の可換図式が得られる

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{K}^X & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{D}^X & \rightarrow & A_L^X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \bigoplus_{i=1}^n R_L f_i & \rightarrow & \bigoplus_{i=1}^n R_L e_i & \rightarrow & A_L^X \rightarrow 0 \end{array}$$

ここに、一番右の下向きの写像は恒等写像、 $\psi$  は  $\mathcal{L}_i \mapsto e_i$  によって定義される同型写像、 $\varphi$  は  $\psi$  によって導かれる写像である。 $\varphi(x)$  の  $f_j$  成分を  $\varphi_j(x)$ ,  $\psi(y)$  の  $e_i$  成分を  $\psi_i(y)$  と書くことにする。 $\Theta_{r,L}$  を  $K_\infty$  に対して定義したのと同じようにして、 $L$  に対して定義される  $R_L$  のイデアルとする。さて、 $A$  の第  $i_1$  行, ..., 第  $i_r$  行、第  $j_1$  行, ..., 第  $j_r$  行を除いて得られる行列  $B_r$  を考える。このとき、素イデアル  $\mathcal{L}_i$  をうまく選ぶことにより、ある元  $x_r \in \mathcal{K}^X$  で、

- 1)  $\varphi_{j_1}(x_r) = \dots = \varphi_{j_{r-1}}(x_r) = 0$
- 2)  $\varphi_{j_r}(x_r) \in \Theta_{r,L}$
- 3)  $i_1, \dots, i_r$  以外の  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して、 $\psi_i(\text{div}(x_r)) = 0$
- 4)  $\psi_{i_r}(\text{div}(x_r)) = \pm \det B_{r-1}$

をみたすようなものを帰納的に構成することができる。1), 3) から線形代数により、 $\det B_{r-1} \varphi_{j_r}(x_r) = \pm \det B_r \psi_{i_r}(\text{div}(x_r))$  であるが、 $(\det B_{r-1})$  が非零因子のときを考えればよく、それを認めれば 2), 4) から  $\det B_r = \pm \varphi_{j_r}(x_r) \in \Theta_{r,L}$  となる。このことから、 $\text{Fitt}_{r,R_L}(A_L^X) \subset \Theta_{r,L}$  が言える。正確には、 $\text{mod } p^N$  で上のような議論を行うので、もう少し複雑である

が、ここではアイデアを中心に説明したかったので、上のように述べた。 $L = K_m$  のレベルでこの包含関係が言えたので、 $m \rightarrow \infty$  として、 $\text{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\times) \subset \Theta_{r,K_\infty}$  が示せる。

### 3 Kolyvagin system の変種について

上で述べた  $x_r$  の構成は何段階ものステップがあり、かなり複雑なので、ここでは述べない。そのステップの中で、もっともおもしろいと思われるのは、最近 Mazur と Rubin によって導入された Kolyvagin system ([3]) と関係する部分だと思うので、その部分について述べようと思う。

Mazur と Rubin は有理数体上で考えているが、ここでは総実代数体上に考える。また、Mazur Rubin と異なり素数  $p$  を固定し、係数が  $\mathbf{Z}_p$  加群であるような cohomology だけを考えることにする。

正の整数  $N$  を固定する。 $k$  を総実代数体、 $p$  と素な  $k$  の有限素点  $v$  に対し、 $c_v = \text{ord}_p(N(v) - 1)$  ( $N(v)$  は  $v$  のノルム、 $\text{ord}_p$  は正規  $p$  進付値) とおく。 $c_v \geq N$  であり、 $p^{c_v}$  次巡回拡大  $k(v)/k$  で  $v$  で完全分岐、 $v$  の外で不分岐なものが存在するような  $v$  全体の集合を  $\mathcal{P}$  とし、各  $v \in \mathcal{P}$  に対し、 $k(v)$  を固定する。(Chebotarev 密度定理を使うと、このような  $v$  がたくさん存在することがわかる。各  $v$  に対し、 $k(v)$  は unique ではないが、一つ固定することにする。なお、Mazur Rubin は  $k = \mathbf{Q}$  で考えているので、拡大体としては円分体をとっている)。

$v$  の上にある  $k(v)$  の (ただ一つの) 素点をやはり  $v$  で表し、 $k_v, k(v)_v$  をそれぞれ  $k$  の  $v$  での完備化、 $k(v)$  の  $v$  での完備化とする。 $G_v = \text{Gal}(k(v)/k) = \text{Gal}(k(v)_v/k_v)$  とおく。 $H_f^1$  を  $k_v^\times / (k_v^\times)^{p^{c_v}}$  の部分群で、 $k_v$  の単数群  $O_{k_v}^\times$  の類で生成するところ、 $H_t^1$  を局所類体論の相互写像によって誘導される全射準同型写像

$$\phi_v : k_v^\times / (k_v^\times)^{p^N} \longrightarrow \text{Gal}(k(v)_v/k_v) = G_v$$

の核と定義する。すぐにわかるように

$$k_v^\times / (k_v^\times)^{p^{c_v}} = H_f^1 \oplus H_t^1$$

が成立する。また、定義により、 $H_f^1$  は付値から導かれる全射

$$\partial_v : k_v^\times / (k_v^\times)^{p^{c_v}} \longrightarrow \mathbf{Z}/p^{c_v}$$

の核である。この2つの写像  $\phi_v, \partial_v$  はこれから重要な役割を果たす。また、記号法から推測できるかもしれないが、 $H_f^1, H_t^1$  はもっと一般の Galois

加群  $M$  に対する  $H^1(k_v, M)$  に対しても定義できる。普通の Selmer 群は  $H_f^1$  についての local condition で定義されるが、 $H_t^1$  についての local condition も考えようというのが、Kolyvagin system の考え方である。また、 $k_v^\times / (k_v^\times)^{p^{e_v}}$  の上のような分解は、結び目理論の longitude, meridian との関係性を想起させる (結び目理論と整数論との関係については 九大の森下氏による研究を参照せよ)。

$L/k$  を有限次アーベル拡大、 $\mathcal{P}$  の中で  $L$  で完全分解する素点全体を  $\mathcal{P}_L$  と書く。 $\mathcal{R}_L = \mathbf{Z}_p[\text{Gal}(L/k)]$  とおく。 $v \in \mathcal{P}_L$  に対して、 $v$  の上にある  $L$  の素点  $w$  をとると、 $L_w = k_v$  である。このような  $w$  を各  $v$  に対し、一つ固定する。写像  $\phi_v$  から

$$\phi_v : L^\times \longrightarrow \bigoplus_{w|v} G_v \simeq \mathcal{R}_L \otimes G_v$$

なる写像が定義されるが (最後の同型は固定した  $w$  で作ることにする)、これも  $\phi_v$  と書くことにする。また、付値  $\partial_v$  は

$$\partial_v : L^\times \longrightarrow \bigoplus_{w|v} \mathbf{Z}_p \simeq \mathcal{R}_L$$

を導く。

$\mathcal{N}$  を  $\mathcal{P}_L$  の元の square free product 全体の集合、 $n \in \mathcal{N}$  に対し、 $G_n = \bigotimes_{v|n} G_v$  とおく。ここで、元の系列  $(\kappa_n)$  ( $n \in \mathcal{N}$ ) が Kolyvagin system であるとは、 $\kappa_n \in L^\times \otimes G_n$  であり、

I)  $\partial_v(\kappa_n) = 0$  for all  $v \nmid n$ ,

II)  $\phi_v(\kappa_n) = 0$  for all  $v \mid n$ ,

III)  $\partial_v(\kappa_n) = -\phi_v(\kappa_{n/v})$  for all  $v \mid n$

をみたすこと、と定義される。I) と III) では、 $\partial_v, \phi_v$  はそれぞれ、 $\partial_v : L^\times \otimes G_n \longrightarrow \mathcal{R}_L \otimes G_n$ ,  $\phi_v : L^\times \otimes G_{n/v} \longrightarrow \mathcal{R}_L \otimes G_n$  と考え、II) では  $\phi_v$  は  $\phi_v : L^\times \otimes G_n \longrightarrow \mathcal{R}_L \otimes G_{nv}$  と考えている。 $[L:k]$  が  $p$  と素なら、一般に Euler system から Kolyvagin system が作れることが知られているが、そのとき II) の等式は非自明である ([3])。

さて、われわれの場合に戻ろう。§2 のように  $L = K_m$  を考える。 $L^\times$  ではなく、 $\text{mod } p^N$  したものの  $\chi$  成分  $(L^\times / (L^\times)^{p^N})^\chi$  中の Kolyvagin system を考える。まず、一般の  $k$  に対しても、 $k = \mathbf{Q}$  のときに存在した Gauss 和の Euler system の類似を構成できる (鍵となるのは、 $\chi$  成分についての Brumer 予想を証明することである cf. [2])。ただし、この Euler system は Gauss 和型の Euler system なので、[6] や [3] の議論が使えない部分があることに注意しておく。今の場合、 $[L:k]$  が  $p$  で割れるので、[3] にある抽象的な Kolyvagin system の構成法は使えない。そこ

で、Euler system から具体的に構成するのだが、このとき、このようにしてできた Kolyvagin system (の変種) は、普通の Kolyvagin system の性質以上の非常にきれいな性質を持っている。

具体的に述べる。§2 のように  $R_L = O_X[\text{Gal}(L/K)]$  とおく。  $n = v_1 \cdots v_t$  として、  $F$  を  $L$  と  $k(v_1), \dots, k(v_t)$  の合成体とする。  $G_{v_i}$  の生成元  $\sigma_i$  を  $1 + S_i$  に対応させることにより、 §1 に述べたように、  $O_X[\text{Gal}(F/L)] \simeq R_L[S_1, \dots, S_t] / ((1 + S_1)^{p^{v_1}} - 1, \dots, (1 + S_1)^{p^{v_t}} - 1)$  なる同型を考え、  $\theta_F^X$  を  $S_i$  の巾係数で表し、  $S_1 \cdots S_t$  の係数を  $\delta_{1, \dots, 1} \in R_L$  とする。ここで、

$$\delta_n = (-1)^t \delta_{1, \dots, 1} \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_t \in R_L \otimes G_n$$

とおく。

このとき、  $\kappa_{n, l} \in L^\times / (L^\times)^{p^N} \otimes G_n$  なる元の系列  $(\kappa_{n, l})$  ( $nl \in \mathcal{N}$ ) で次の条件をみたすものが ( $n$  の素因子と  $l$  に  $N$  に関するある種の条件 (定理の証明にはこの条件がついても問題はない) をつければ) 構成できる。

I)  $\partial_v(\kappa_{n, l}) = 0$  for all  $v \nmid nl$ ,

II)  $\phi_v(\kappa_{n, l}) = 0$  for all  $v \mid n$ ,

III)  $\partial_v(\kappa_{n, l}) = -\phi_v(\kappa_{n/v, l})$  for all  $v \mid n$

ここまでは、Kolyvagin system の普通の性質である。しかし、次のようなきれいな性質があつて、この元はゼータ関数の値と結びついている。

IV)  $\partial_l(\kappa_{n, l}) = \delta_n$

V)  $\phi_l(\kappa_{n, l}) = \delta_{nl}$

ここに、  $\partial_l : L^\times / (L^\times)^{p^N} \otimes G_n \rightarrow (R_L/p^N) \otimes G_n$ ,  $\phi_l : L^\times / (L^\times)^{p^N} \otimes G_n \rightarrow (R_L/p^N) \otimes G_{nl}$  と考えている。

なお、  $\kappa_{1, l}$  は  $l$  の上にある  $L$  の固定した素点  $\mathcal{L}$  に対して、  $\text{div}(\kappa_{1, l}) = \theta_{\mathcal{L}}^X$  をみたす乗法群の元 (Gauss 和の Euler system の類似) である。上のように、ここでは  $\text{mod } p^N$  して考えているが、  $\text{mod } p^N$  しなくても上の I) - V) が成立するかどうかは、まだよくわかっていない。

このように、Gauss 和型の Kolyvagin system が構成でき、ゼータ関数  $\theta_F$  と直接的な関係がある、ということは特筆すべききれいな関係であると思われる。

最後に、この研究には青木美穂氏 (東工大) との discussion が非常に役立つことを明記し、青木氏に感謝したいと思います。

## 参考文献

- [1] Kurihara, M., Iwasawa theory and Fitting ideals, Crelle's Journal 561 (2003), 39-86.

- [2] Kurihara, M., On the structure of ideal class groups of CM fields, Documenta Mathematica Extra Volume Kato (2003), 539-563.
- [3] Mazur, B. and Rubin, K., *Kolyvagin systems*, Memoirs of the American Mathematical Society 799 (2004)
- [4] Northcott, D. G., *Finite free resolutions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York (1976).
- [5] Rubin, K., Kolyvagin's system of Gauss sums, in: Arithmetic Algebraic Geometry, G. van der Geer et al eds, Progress in Math 89 (1991) 309-324.
- [6] Rubin, K., *Euler systems*, Annals of Math. Studies 147, Princeton Univ. Press (2000).
- [7] Wiles, A., The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. 131 (1990), 493-540.