数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 175-183

Cuntz 環の表現とウェーブレット

千葉大学自然科学研究科 加藤 雅彦 (Masahiko KATO)
Graduate School of Science and Technology
Chiba University

Bratteli–Jorgensen の研究 [BJ97a, BJ97b, BJ02] によって，直交ウェーブレットと Cuntz 環 [Cun77] の表現との関係が知られている．講演では Palle E. T. Jorgensen の論文 Measures in wavelet decompositions [Jor05] の紹介と彼らの研究のフレームレットへの拡張について報告したが，本稿では講演の前半部分は省略し，フレームレットへの拡張に関する部分のみを取り上げる．直交ウェーブレットとは直交基底を生成する関数族のことであるが，フレームレットとは，これをフレームを生成する関数族へと拡張したものである．はじめに，フレームレットを構成するために必要な定理を示し，次に Ron–Shen のフレームレット [RS97] がこの定理の条件を満たすことを示す．最後にフレームレットと Cuntz 環の表現との関係について述べる．

1 フレームレット

関数族 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ がタイトフレーム [Chr03] であるとは，ある定数 $C \geq 0$ が存在して，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i, f\rangle|^2 = C\|f\|^2$$

となるときをいう．特に $C=1$ のとき**正規タイトフレーム**といい，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, f\rangle f_i$$

が成立することと同値になる．直交ウェーブレットの場合と同様に，$L^2(\mathbb{R})$ の関数に対するスケール変換と平行移動を

$$(Uf)(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} f\left(\frac{x}{N}\right) \quad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}$$
$$(T^k f)(x) = f(x-k) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z},\ f \in L^2(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}$$

と定義する．ここで N は 2 以上の自然数とする．また，r を N 以上の自然数とする．$L^2(\mathbb{R})$ の関数族 $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,r-1}$ が**フレームレット**であるとは $\{U^j T^k \psi_i\}_{i=1,\dots,r-1}^{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ のタイトフレームをなすときをいう．フレームレットの具体例は次節で紹介する．

定理 1.1. N を 2 以上の自然数，r を N 以上の自然数とする．関数族 $\{m_i\}_{i=0}^{r-1} \subset L^2(\mathbb{T})$ が以下の条件を満たすと仮定する：

(i) $m_0(1) = \sqrt{N}$,

(ii) $\hat{\varphi}(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \dfrac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}}$ が $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数として定義できる，

(iii) $\lim_{t \to 0} \hat{\varphi}(t) = 1$,

(iv) $\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)(t) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 \in L^\infty(\mathbb{R})$,

(v) $L^2(\mathbb{T})$ 上の線形作用素として $(S_i \xi)(z) := m_i(z)\xi(z^N)$ を定義するとき，$\{S_i\}_{i=0}^{r-1}$ が

$$\sum_{i=0}^{r-1} S_i S_i^* = I$$

を満たす，

(vi) $S_0^{*l} \xrightarrow{\mathrm{SOT}} 0 \ (l \to \infty)$.

このとき

$$\widehat{\psi_i}(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-it/N}) \hat{\varphi}\left(\frac{t}{N}\right), \quad t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, r-1$$

と定義すると，$\{\psi_i\}_{i=1}^{r-1}$ は $L^2(\mathbb{R})$ のフレームレットとなる．すなわち，ある定数 C が存在して，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle|^2 = C \|f\|^2$$

が成立する．

証明. V_0 を φ の平行移動とその線形結合によって張られる $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間とする．まず，任意の $f \in V_0$ に対し

$$\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle e_k, S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f) \, \mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

であることを示す． ここで $e_k(z) := z^k$ および，$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi(t-k)$ に対して $\mathcal{F}_\varphi(f)(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^k$ としている．また，$\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)$ は 2π 周期関数であるから，同じ記号で $\mathbb{T}$ 上の関数として扱うことにする．

$$\begin{aligned}
\widehat{U^n T^k \psi_i}(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} U^n T^k \psi_i(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{1}{\sqrt{N}^n} \psi_i\left(\frac{x}{N^n} - k\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-it(N^n(y-k))} \frac{N^n}{\sqrt{N}^n} \psi_i(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-itN^n y} \sqrt{N}^n \psi_i(y) e^{-itN^n k} dy \\
&= \sqrt{N}^n \widehat{\psi_i}(tN^n) e^{-itN^n k}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\langle U^n T^k \psi_i, f \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{U^n T^k \psi_i}(t)} \hat{f}(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\sqrt{N}^n \widehat{\psi_i}(tN^n) e^{-itN^n k}} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \hat{\varphi}(t) dt.
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_i(tN^n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-itN^{n-1}})\hat{\varphi}(tN^{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \frac{1}{\sqrt{N}} m_0(e^{-itN^{n-2}})\hat{\varphi}(tN^{n-2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \frac{1}{\sqrt{N}^{n-1}} \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}^n} m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t)\end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\langle U^n T^k \psi_i, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j})\hat{\varphi}(t) e^{-itN^n k}} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\hat{\varphi}(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j}) e^{-itN^n k}} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})|\hat{\varphi}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{m_i(e^{-itN^{n-1}}) \prod_{j=0}^{n-2} m_0(e^{-itN^j}) e^{-itN^n k}} \mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it}) \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t+2l\pi)|^2 dt \\ &= \langle S_0^{n-1} S_i e_k, \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \langle e_k, S_i^* S_0^{*n-1} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

となる．よって $f \in V_0$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{l}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle U^n T^k \psi_i, f\rangle|^2 &= \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{l}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle e_k, S_i^* S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{l} \|S_i^* S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{l} \langle S_i^* S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2), S_i^* S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{l} \langle \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2), S_0^{(n-1)} S_i S_i^* S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{l} \langle \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2), S_0^{(n-1)} (1 - S_0 S_0^*) S_0^{*(n-1)} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{l} \langle \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2), (S_0^{(n-1)} S_0^{*(n-1)} - S_0^n S_0^{*n}) \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2), (1 - S_0^l S_0^{*l}) \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\rangle \\ &= \|\mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\|^2 - \|S_0^{*l} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\|^2.\end{aligned}$$

条件 (vi) から

$$\lim_{l\to\infty} \|S_0^{*l} \mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\| = 0$$

であるから，

$$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle U^nT^k\psi_i, f\rangle|^2 = \|\mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\|^2$$

を得る．この右辺は

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \left\|\mathcal{F}_\varphi(f)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= \int_{\mathbb{T}}|\mathcal{F}_\varphi(f)|^2\left|\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\right|^2\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)\right|^2\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}(t+2\pi l)|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)\right|^2|\hat{\varphi}(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}_\varphi(f)(e^{-it})\hat{\varphi}(t)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)\right|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\hat{f}(t)\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}(t)\right|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\hat{f}\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

と変形でき，

$$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle\widehat{U^nT^k\psi_i}, \hat{f}\rangle|^2 = \left\|\hat{f}\,\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)^{1/2}\right\|^2$$

を得る．P_j を U^jV_0 への直交射影とし，上式を Schatten 形式で表せば

$$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{U^nT^k\psi_i}\otimes\widehat{U^nT^k\psi_i})\hat{P}_0 = M_{\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)}\hat{P}_0$$

となる．$P_{-j} = U^{-j}P_0U^j$ に注意すれば

$$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n=-j+1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{U^nT^k\psi_i}\otimes\widehat{U^nT^k\psi_i})\hat{P}_{-j} = M_{\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)(\cdot N^{-j})}\hat{P}_{-j}$$

が得られる．本稿では証明を省略するが，条件 (ii), (iii) から $j\to\infty$ のとき $\hat{P}_{-j}\xrightarrow{\mathrm{SOT}} I_{L^2(\mathbb{R})}$ が言える [Dau92]．また，$\mathrm{PER}(|\hat{\varphi}|^2)(t)$ が $t=0$ で連続であることから定理が示される． □

定理 1.1 の証明の多くの部分で，文献 [BJ02] の方法を参考にした．文献 [BJ02] は Cuntz リレーションを満たす場合の証明であるが，具体的な計算方法の多くは彼らによるものである．

2　具体例と関連する幾つかの命題

Ron–Shen によるフレームレット [RS97, DHRS03] は次の通りである．本節において，この例が定理 1.1 の条件をみたすことを示す．

例 **2.1 (Ron–Shen).** $N=2, r=3$ の場合：

$$m_0(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+z)^2,\quad m_1(z) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-z)^2,\quad m_2(z) = -\frac{1}{2}(1-z^2).$$

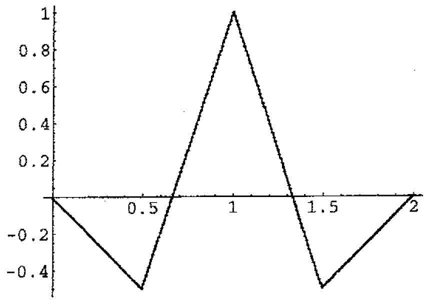

図 1: ψ_1

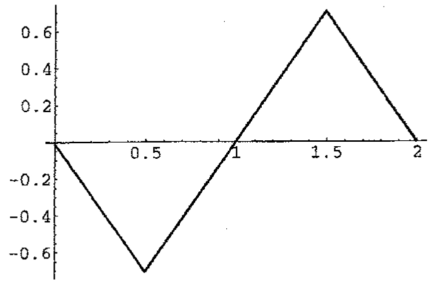

図 2: ψ_2

この例が定理 1.1 の条件 (i), (v) を満たすことは直接計算することで確かめられる．条件 (ii), (iii) を満たすことは次の 2 つの命題から導かれる．

命題 2.2. $m_0(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$|m_0(e^{-it})| \le \sqrt{N}$$

を満たすとする．このとき

$$g_n(t) := \prod_{k=1}^{n} \frac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}}$$

とおくと $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ の任意の有界集合上で一様収束する．

証明. 平均値の定理から，ある定数 C が存在して，任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対して

$$m_0(e^{-it}) - m_0(1) \le C|t|$$

となる．このことから，任意の $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(t) - g_n(t)| &= \prod_{k=1}^{n} \frac{|m_0(e^{-itN^{-k}})|}{\sqrt{N}} \left| \frac{m_0(e^{-itN^{-(n+1)}})}{\sqrt{N}} - 1 \right| \\ &\le \left| \frac{m_0(e^{-itN^{-(n+1)}})}{\sqrt{N}} - 1 \right| \\ &\le C \left| tN^{-(n+1)} \right| \end{aligned}$$

が成立する．よって $m > n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ に対して

$$\begin{aligned} |g_m(t) - g_n(t)| &\le \sum_{j=n}^{m-1} |g_{j+1}(t) - g_j(t)| \\ &\le C \sum_{j=n}^{m-1} \left| tN^{-(j+1)} \right| \\ &\le C|t| \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{N^{j+1}} \\ &\le C|t|N^{-n} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ の任意の有界集合上で一様収束する． □

この証明法は文献 [Fra99] による．m_0 が命題 2.2 の条件を満たすとき (Ron–Shen の例はこの条件をみたす)

$$\hat{\varphi}(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{m_0(e^{-itN^{-k}})}{\sqrt{N}}$$

が $\mathbb{R}$ 上の関数として定義できることと

$$\lim_{t\to 0} \hat{\varphi}(t) = 1$$

が成り立つことがわかる．これは $\hat{\varphi}(0) = 1$ であることと，$t = 0$ の近傍において $\hat{\varphi}$ が連続関数 g_n の一様収束極限であることによる．$\hat{\varphi}$ が $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数であることは次の命題による．

命題 2.3. m_0 を $\mathbb{T}$ 上の関数とする．任意の $z \in \mathbb{T}$ に対して

$$\frac{1}{2} \sum_{w^2=z} |m_0(w)|^2 \leq 1$$

を満たすとする．また

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}}$$

が $\mathbb{R}$ 上で殆んどいたるところ各点収束するとする．このとき極限 $\hat{\varphi}$ は $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数であり，$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$.

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(t) := \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right) 1_{[-\pi,\pi]}(t2^{-n})$$

と定義する．このとき f_n は $\hat{\varphi}$ へ各点収束する．また

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f_n(t)|^2 dt &= \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 dt \\
&= \int_0^{2^{n+1}\pi} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 dt \\
&= \int_0^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 \frac{|m_0(e^{-it2^{-n}})|^2 + |m_0(e^{-i(t2^{-n}+\pi)})|^2}{2} dt \\
&\leq \int_0^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}} \right|^2 dt \\
&= \|f_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\|f_n\|^2 \leq \|f_{n-1}\|^2 \leq \cdots \leq \|f_0\|^2 = 1$$

となる．よって Fatou の補題から

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(t)|^2 dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t)|^2 dt \leq 1$$

を得る． $\square$

この命題のもとの形はMallatによるものである [Mal89]. 証明は文献 [Dau92] を参考にした. 次の命題から $\hat{\varphi}$ の台がコンパクトであることがわかる. このことから条件 (iv) がいえる.

命題 2.4 (Deslauriers–Dubuc [DD87]). $m_0(z)=\sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ とし $\sum_{k=0}^{d} a_k=\sqrt{2}$ であるとする. このとき

$$\prod_{j=1}^{\infty}\frac{m_0(e^{-it2^{-j}})}{\sqrt{2}}$$

は指数型の整関数であり, 特に $[0,d]$ に台を持つ超関数の Fourier 変換である.

最後に条件 (vi) を満たすことを示す.

命題 2.5. $m_0(z)=\sum_{k=0}^{2} a_k z^k$, $|a_k|<1$ $(k=0,1,2)$ のとき

$$(S_0^* f)(z):=\frac{1}{2}\sum_{w^2=z}\overline{m_0}(w)f(w),\quad f\in L^2(\mathbb{T})$$

と定めると

$$S_0^{*l}\xrightarrow{\mathrm{SOT}}0\quad(l\to\infty).$$

証明. Fourier 多項式に対して示せば十分である. Fourier 多項式 $f(z)=\sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^k$ に対して, 適当な自然数 l が存在して

$$S_0^{*l}f\in\mathcal{K}:=\mathrm{span}\{e_{-2},e_{-1},e_0,e_1,e_2\}$$

となることがわかる. ここで $e_n(z):=z^n$ とした. また, $S_0^*\mathcal{K}\subseteq\mathcal{K}$ であるから, S_0^* の $\mathcal{K}$ への制限は

$$V_0^*:=S^*_{0|\mathcal{K}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\ \overline{a_0}&0&0&0&0\\ \overline{a_2}&\overline{a_1}&\overline{a_0}&0&0\\ 0&0&\overline{a_2}&\overline{a_1}&\overline{a_0}\\ 0&0&0&0&\overline{a_2}\end{bmatrix}$$

と表せる. この行列の Jordan 標準形は, P を変換行列とするとき

$$PV_0^*P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&&&\\ &0&&&\\ &&\overline{a_0}&&\\ &&&\overline{a_1}&\\ &&&&\overline{a_2}\end{bmatrix}$$

となり, 対角行列と冪零行列との積が零行列になる. 以上から命題の主張が示される. □

3 Cuntz 環の表現との関係

正規タイトフレームは完全正規直交系へダイレーションできることが知られている. すなわち, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規タイトフレームとするとき, $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{K}$ となる Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}$

の完全正規直交系 $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在して，$P : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ を直交射影とするとき，各 i に対して

$$f_i = P\tilde{f}_i$$

が成り立つ．このことの類推として，以下の結果はフレームレットは直交ウェーブレットへとダイレーション可能であることを示していると解釈できる．

定理 3.1 (Bratteli–Jorgensen–Kishimoto–Werner [BJKW00]). $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$S_0, \ldots, S_{r-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が

$$\sum_{i=0}^{r-1} S_i S_i^* = I$$

を満たすとする．このとき $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ となる Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ と Cuntz 環 $\mathcal{O}_r$ の表現 $\pi : \mathcal{O}_r \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ が存在して，$P : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ を直交射影とするとき，各 i に対して

$$S_i^* = \pi(s_i^*)P$$

となる．

参考文献

[BJ97a] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *A connection between multiresolution wavelet theory of scale N and representations of the Cuntz algebra $\mathcal{O}_N$*, Operator algebras and quantum field theory (Rome, 1996), Internat. Press, Cambridge, MA, 1997, pp. 151–163.

[BJ97b] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale N*, Integral Equations Operator Theory **28** (1997), no. 4, 382–443.

[BJ02] Ola Bratteli and Palle E. T. Jorgensen, *Wavelets through a looking glass*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[BJKW00] O. Bratteli, P. E. T. Jorgensen, A. Kishimoto, and R. F. Werner, *Pure states on $\mathcal{O}_d$*, J. Operator Theory **43** (2000), no. 1, 97–143.

[Chr03] Ole Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.

[Cun77] Joachim Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), no. 2, 173–185.

[Dau92] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[DD87] Gilles Deslauriers and Serge Dubuc, *Interpolation dyadique*, Fractals. Dimensions non entières et applications **1051** (1987), 44–55.

[DHRS03] Ingrid Daubechies, Bin Han, Amos Ron, and Zuowei Shen, *Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **14** (2003), no. 1, 1–46.

[Fra99] Michael W. Frazier, *An introduction to wavelets through linear algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Jor05] Palle E. T. Jorgensen, *Measures in wavelet decompositions*, Adv. in Appl. Math. **34** (2005), no. 3, 561–590.

[Mal89] Stephane G. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L^2(\mathbf{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), no. 1, 69–87.

[RS97] Amos Ron and Zuowei Shen, *Affine systems in* $L_2(\mathbf{R}^d)$*: the analysis of the analysis operator*, J. Funct. Anal. **148** (1997), no. 2, 408–447.