数理解析研究所講究録 1464 巻 2006 年 93-106

Penrose-Fife型の液体ー固体相転移モデルに対する解の一意存在性について

近畿大学・工学部　　伊藤　昭夫（Akio Ito）
Department of Electronic Engineering and Computer Science
School of Engineering, Kinki University

1. 序

1990年にO. PenroseとP.C. Fifeによって[7]で提唱された保存量を有しない相転移現象（例えば，液体ー固体相転移現象）を記述する非線形放物型偏微分方程式系は次の通りである．

$$\frac{de}{dt}-\Delta\left(-\frac{1}{\theta}\right)=0,\quad e=\theta+\lambda(w)\qquad \text{a.e. in } Q_T:=\Omega\times(0,T), \tag{1.1}$$

$$\frac{dw}{dt}-\kappa\Delta w+g(w)+\frac{\lambda'(w)}{\theta}=0\qquad \text{a.e. in } Q_T. \tag{1.2}$$

ここで，eは内部エネルギー密度，θは絶対温度，wは物質の相を表す秩序変数をそれぞれ意味する．また，“保存量を有しない”とは秩序変数wが保存量を有しないということを意味する．

次に，熱流$\nabla\left(-\frac{1}{\theta}\right)$と相変化の勾配流$\nabla w$に対して共に斉次Neumann境界条件，つまり，

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(-\frac{1}{\theta}\right)=\frac{\partial w}{\partial\nu}=0\qquad \text{a.e. on } \Sigma_T:=\Gamma\times(0,T) \tag{1.3}$$

を課す．ここで，Ωは$\mathbf{R}^N$ $(N=1,2,3)$における有界領域でその境界$\Gamma:=\partial\Omega$は十分滑らかとし，νはΓ上の各点における外向き単位法線ベクトルを表す．

更に，θとwに対して初期条件

$$\theta(0)=\theta_0,\quad w(0)=w_0\qquad \text{a.e. in } \Omega \tag{1.4}$$

を課す．

本論文を通して，{(1.1)-(1.4)}の初期値ー境界値問題を(P)で表す．(P)の大きな特徴は，内部エネルギー密度eが保存量を有することである．実際，(1.1)かつ(1.3)より

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega e(t)=0\qquad \text{a.e. } t\in(0,T)$$

が成り立つので，

$$\int_\Omega e(t)=\int_\Omega\{\theta_0+\lambda(w_0)\},\qquad \forall t\in[0,T] \tag{1.5}$$

が得られる．

本論文の目的は，(P)の解の一意存在性を証明することである．そのために，本節の最後に本論文で使用する記号を導入するとともに，(P)の解の定義を明確に与える．

(1) $1 \leq \forall p \leq \infty$ に対して，$L^p(\Omega)$ のノルムを $|\cdot|_p$ で表す．特に，$H := L^2(\Omega)$ とし，L^2-内積を $(\cdot,\cdot)$ で表す．

(2) $V := H^1(\Omega)$ とし，$V-$ 内積 $(\cdot,\cdot)_V$ を

$$(v,w)_V := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w + (v,w), \quad \forall v,w \in V$$

で与え，$V-$ ノルムを $\|v\| := \sqrt{(v,v)_V}$ で定義する．また，V^* と $\langle\cdot,\cdot\rangle$ でそれぞれ V の共役空間と V^* と V の共役対を表す．

(3) $H_0 := \{z \in H | \int_\Omega z = 0\}$ は H の閉部分空間であり，H_0- 内積および H_0- ノルムはそれぞれ H から誘導する．更に，$V_0 := V \cap H_0$ とし，V_0^*，$\langle\cdot,\cdot\rangle_0$，$F_0$ でそれぞれ V_0 の共役空間，V_0^* と V_0 の共役対，V_0 から V_0^* への共役写像を表す．このとき，V_0- 内積を

$$(v,w)_{V_0} := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w, \qquad \forall v,w \in V_0$$

で与え，V_0- ノルムを $\|v\|_0 := \sqrt{(v,v)_{V_0}}$ で定義すれば，

$$\langle F_0 v, w\rangle_0 = (v,w)_{V_0}, \qquad \forall v,w \in V_0$$

が成り立つとともに，V_0^*- 内積 $(\cdot,\cdot)_{0*}$ と V_0^*- ノルムはそれぞれ次で定義される：

$$(v^*,w^*)_{0*} := \langle v^*, F_0^{-1}w^*\rangle_0 (= \langle w^*, F_0^{-1}v^*\rangle_0), \qquad \forall v^*,w^* \in V_0^*,$$

$$\|v^*\|_{0*} := \sqrt{(v^*,v^*)_{0*}} = \|F_0^{-1}v^*\|_0, \qquad \forall v^* \in V_0^*.$$

以上の記号を用いて，(P) の解の定義を明確に与える．

定義 1.1. (e,w) が (P) の解であるとは，次の条件 (w1)-(w7) をすべて満たすことである：

(w1) $e \in W^{1,2}(0,T;V^*) \cap L^\infty(0,T;H)$.

(w2) $w \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

(w3) $\theta = e - \lambda(w) > 0$ a.e. in Q_T.

(w4) $\frac{1}{\theta} \in L^2(0,T;V)$.

(w5) (1.1) は次の意味で成り立つ：

$$\langle e'(t), z\rangle + \int_\Omega \nabla\left(-\frac{1}{\theta}\right) \cdot \nabla z = 0, \qquad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0,T). \tag{1.6}$$

(w6) (1.2) は次の意味で成り立つ：

$$(w'(t), z) + \kappa \int_\Omega \nabla w(t) \cdot \nabla z + \left(g(w(t)) + \frac{\lambda'(w(t))}{\theta(t)}, z\right) = 0, \tag{1.7}$$

$$\forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0,T).$$

(w7) $e(0) = e_0 := \theta_0 + \lambda(w_0), \qquad w(0) = w_0.$

ここで，e' と w' はそれぞれ $\frac{de}{dt}$ と $\frac{dw}{dt}$ をそれぞれ表す．

2. 主定理

本節では，本論文で得られた定理について述べる．

そのために，まず方程式系に現れる非線形項 λ と g および初期値 θ_0 と w_0 の仮定を明確に与える．

(A1) $\lambda \in C^2(\mathbf{R})$ かつ $\lambda'' \in L^\infty(\mathbf{R})$．ここで，$|\lambda''|_\infty := \sup_{r\in\mathbf{R}} \lambda''(r)$ とおく．このとき，次の評価が成り立つ：

$$\exists c_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\lambda(r)| \le c_1(r^2+1), \quad \forall r \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

$$\exists c_2 > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\lambda'(r)| \le c_2(|r|+1), \quad \forall r \in \mathbf{R}. \tag{2.2}$$

(A2) $g \in C^1(\mathbf{R})$．更に，次の条件を満たす：

$$\exists c_3 > 0 \quad \text{s.t.} \quad |g(r)| \le c_3(|r|^3+1), \quad \forall r \in \mathbf{R}, \tag{2.3}$$

$$\exists c_4 > 0 \quad \text{s.t.} \quad (g(r_1)-g(r_2))(r_1-r_2) \ge -c_4|r_1-r_2|^2, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbf{R}, \tag{2.4}$$

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = +\infty, \quad \lim_{r\to-\infty} g(r) = -\infty. \tag{2.5}$$

次に，g の原始関数を $\hat{g}$ で表す．このとき，(2.5) より

$$\hat{g}(r) \ge 0, \qquad \forall r \in \mathbf{R} \tag{2.6}$$

としても一般性を失わない．更に，$\hat{g}$ に対して次の条件を課す：

$$\exists c_5 > 0,\ \exists c_6 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \hat{g}(r) \ge c_5 r^4 - c_6, \quad \forall r \in \mathbf{R}. \tag{2.7}$$

(A3) $\theta_0 \in H$, $|\int_\Omega \log\theta_0| < +\infty$, $\theta_0 > 0$ a.e. in Ω.

(A4) $w_0 \in V$.

以上の条件を仮定すると次の定理が得られる．

定理 1. (P) の解 (e, w) は一意に存在する．

以下，第 3 節で定理 1 における解の一意性を，第 4 節で解の存在性をそれぞれ証明する．

3. 一意性の証明

一意性の証明は [3]，[4]，[6] に詳細に述べられているが，本論文で改めてそれらの手法を紹介する．

本節を通して，各 i ($i = 1, 2$) に対して初期値を $(e_{0,i}, w_{0,i})$ とする (P) の解を (e_i, w_i) で表す．ただし，初期値 $(e_{0,i}, w_{0,i})$ は (A3) と (A4) を満たすだけでなく，

$$\int_\Omega e_{0,1} = \int_\Omega e_{0,2} \tag{3.1}$$

を満たすとする．このとき，$\theta_i = e_i - \lambda(w_i)$ とおくと

$$\langle e_2'(t) - e_1'(t), z\rangle + \int_\Omega \nabla\left(-\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}\right)(t)\cdot\nabla z = 0, \qquad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0,T) \tag{3.2}$$

かつ

$$\begin{aligned}(w_2'(t) - w_1'(t), z) + \kappa\int_\Omega \nabla(w_2(t) - w_1(t))\cdot\nabla z + (g(w_2(t)) - g(w_1(t)), z)\\ + \left(\frac{\lambda'(w_2(t))}{\theta_2(t)} - \frac{\lambda'(w_1(t))}{\theta_1(t)}, z\right) = 0, \qquad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0,T)\end{aligned} \tag{3.3}$$

が成り立つ．まず，(1.5) かつ (3.1) より

$$\int_\Omega (e_2(t) - e_1(t)) = 0 \tag{3.4}$$

に注意すれば，$e_2(t) - e_1(t) \in H_0(\subset V_0^\star)$ が得られる．従って，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|e_2(t) - e_1(t)\|_{0\star}^2 + |w_2(t) - w_1(t)|_2^2\right\} + \kappa\int_\Omega |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2\\
=\ &((e_2'(t) - e_1'(t), e_2(t) - e_1(t)))_{0\star} + (w_2'(t) - w_1'(t), w_2(t) - w_1(t))\\
&\qquad + \kappa\int_\Omega |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2\\
=\ &\langle e_2'(t) - e_1'(t), F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t))\rangle_0 + (w_2'(t) - w_1'(t), w_2(t) - w_1(t))\\
&\qquad + \kappa\int_\Omega |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2\end{aligned}$$

が得られる．ここで，(3.2) において $z = F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t))$ を代入し，関数 $\alpha(r) = -\frac{1}{r}$ $(r > 0)$ の単調増加性と (3.4)，更に，

$$\langle z^\star, v\rangle_0 = \langle z^\star, v\rangle, \qquad \forall z^\star \in V_0^\star,\ \forall v \in V_0$$

を利用すれば，

$$\begin{aligned}&\langle e_2'(t) - e_1'(t), F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t))\rangle\\
=\ &\langle e_2'(t) - e_1'(t), F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t))\rangle_0\\
=\ &-\int_\Omega \nabla\left(-\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}\right)(t)\cdot\nabla F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t))\\
=\ &-\int_\Omega \nabla\left[\left(-\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}\right)(t) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\left(-\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right)\right]\cdot\nabla F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t))\\
=\ &-\left(F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t)), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\left(-\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right)\right)_{V_0}\\
=\ &-\left\langle e_2(t) - e_1(t), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\left(-\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right)\right\rangle_0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(e_2(t)-e_1(t), -\frac{1}{\theta_2(t)}+\frac{1}{\theta_1(t)}\right) - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega (e_2(t)-e_1(t))\right)\left(\int_\Omega\left(-\frac{1}{\theta_2(t)}+\frac{1}{\theta_1(t)}\right)\right) \\
&= -\left(\theta_2(t)-\theta_1(t), -\frac{1}{\theta_2(t)}+\frac{1}{\theta_1(t)}\right) - \left(\lambda(w_2(t))-\lambda(w_1(t)), -\frac{1}{\theta_2(t)}+\frac{1}{\theta_1(t)}\right) \\
&\le -\left(\lambda(w_2(t))-\lambda(w_1(t)), -\frac{1}{\theta_2(t)}+\frac{1}{\theta_1(t)}\right)
\end{aligned}
$$

が得られる．

一方，(3.3) において $z=w_2(t)-w_1(t)$ を代入し，(2.4) を利用すれば，

$$
\begin{aligned}
&(w_2'(t)-w_1'(t), w_2(t)-w_1(t)) + \kappa\int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2 \\
= \;& -(g(w_2(t))-g_1(t), w_2(t)-w_1(t)) - \left(\frac{\lambda'(w_2(t))}{\theta_2(t)}-\frac{\lambda'(w_1(t))}{\theta_1(t)}, w_2(t)-w_1(t)\right) \\
\le \;& c_4|w_2(t)-w_1(t)|_2^2 - \left(\frac{\lambda'(w_2(t))}{\theta_2(t)}-\frac{\lambda'(w_1(t))}{\theta_1(t)}, w_2(t)-w_1(t)\right)
\end{aligned}
$$

が得られる．従って，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|e_2(t)-e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t)-w_1(t)|_2^2\right\} + \kappa\int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2 \\
\le \;& c_4|w_2(t)-w_1(t)|_2^2 + \int_\Omega \frac{\lambda(w_1(t))-\lambda(w_2(t))-\lambda'(w_2(t))(w_1(t)-w_2(t))}{\theta_2(t)} \\
&+ \int_\Omega \frac{\lambda(w_1(t))-\lambda(w_2(t))-\lambda'(w_2(t))(w_1(t)-w_2(t))}{\theta_2(t)}
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，λ に対する Taylor 展開と (A1) を利用すれば，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|e_2(t)-e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t)-w_1(t)|_2^2\right\} + \kappa\int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2 \\
&\le c_4|w_2(t)-w_1(t)|_2^2 + |\lambda''|_\infty\left(\int_\Omega \frac{|w_2(t)-w_1(t)|^2}{\theta_2(t)} + \int_\Omega \frac{|w_2(t)-w_1(t)|^2}{\theta_1(t)}\right), \qquad (3.5) \\
&\qquad\qquad \text{a.e. } t\in(0,T)
\end{aligned}
$$

が得られる．

一方，次の補間不等式

$$
|z|_{12/5} \le |z|_2^{3/4}|z|_6^{1/4}, \qquad \forall z\in L^6(\Omega)
$$

と Sobolev の埋め込み定理

$$
|z|_6 \le c_7\|z\|, \qquad \forall z\in V \tag{3.6}
$$

を利用すれば，各 i $(i=1,2)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{|w_2(t)-w_1(t)|^2}{\theta_i(t)} \\
\le\ & \left|\frac{1}{\theta_i(t)}\right|_6 |w_2(t)-w_1(t)|_{12/5}^2 \\
\le\ & c_7 \left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\| |w_2(t)-w_1(t)|_2^{3/2} |w_2(t)-w_1(t)|_6^{1/2} \\
\le\ & c_7^{3/2} \left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\| |w_2(t)-w_1(t)|_2^{3/2} \|w_2(t)-w_1(t)\|^{1/2} \\
\le\ & c_7^{3/2} \left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\| \left\{ |w_2(t)-w_1(t)|_2^2 + |w_2(t)-w_1(t)|_2^{3/2} \left(\int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2\right)^{1/4} \right\} \\
\le\ & \varepsilon \left(\int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2\right) + \frac{3c_7^2}{4(4\varepsilon)^{1/3}} \left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\|^{4/3} |w_2(t)-w_1(t)|_2^2 \\
& \qquad + c_7^{3/2} \left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\| |w_2(t)-w_1(t)|_2^2 \\
=\ & \varepsilon \left(\int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2\right) + \left(c_7^{3/2} + \frac{3c_7^2}{4(4\varepsilon)^{1/3}}\right) \\
& \qquad \times \left(\left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\| + \left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\|^{4/3} \right) |w_2(t)-w_1(t)|_2^2 \\
\le\ & \varepsilon \left(\int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2\right) + \frac{13}{12}\left(c_7^{3/2} + \frac{3c_7^2}{4(4\varepsilon)^{1/3}}\right) \left(1 + \left\|\frac{1}{\theta_i(t)}\right\|^2\right) |w_2(t)-w_1(t)|_2^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って，$\varepsilon = \frac{\kappa}{4|\lambda''|_\infty}$ として，(3.5) を利用すれば，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{ \|e_2(t)-e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t)-w_1(t)|_2^2 \right\} + \kappa \int_\Omega |\nabla(w_2(t)-w_1(t))|^2 \qquad (3.7) \\
&\le c_8 \left(1 + \left\|\frac{1}{\theta_1(t)}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{\theta_2(t)}\right\|^2\right) |w_2(t)-w_1(t)|_2^2, \qquad \text{a.e. } t \in (0,T)
\end{aligned}
$$

が得られる．ただし，

$$
c_8 := c_4 + \frac{13|\lambda''|_\infty}{12}\left(c_7^{3/2} + \frac{3c_7^2|\lambda''|_\infty^{1/3}}{4\kappa^{1/3}}\right).
$$

故に，(3.7) に対して Gronwall の補題を適用すれば，

$$
\|e_2(t)-e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t)-w_1(t)|_2^2 + \kappa \int_0^t ds \int_\Omega |\nabla(w_2(s)-w_1(s))|^2
$$

$$\leq \left\{\|e_{0,2}-e_{0,1}\|_{0*}^2+|w_{0,2}-w_{0,1}|_2^2\right\}\exp\left(c_8\int_0^t\left(1+\left\|\frac{1}{\theta_1(s)}\right\|^2+\left\|\frac{1}{\theta_2(s)}\right\|^2\right)ds\right), \quad (3.8)$$

$$\forall t\in[0,T]$$

が成り立つ．(3.8) は (P) の解の一意性を保証する． ◇

注意 3.1. (A3) と (A4) を満たす初期値の列 $\{(e_{0,n},w_{0,n})\}_{n\in\mathbf{N}}$ と初期値 (e_0,w_0) を任意に選び出す．今，それぞれの初期値に対応する (P) の解の列と解をそれぞれ $\{(e_n,w_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ と (e,w) で表し，$\theta_i=e_i-\lambda(w_i)$ かつ $\theta=e-\lambda(w)$ とする．このとき，

$$e_{0,n}\longrightarrow e_0 \quad \text{in} \quad V^* \quad (n\to\infty),$$

$$w_{0,n}\longrightarrow w_0 \quad \text{in} \quad H \quad (n\to\infty),$$

かつ，$\left\{\frac{1}{\theta_n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}\cup\left\{\frac{1}{\theta}\right\}$ が $L^2(0,T;V)$ で有界ならば，

$$e_n\longrightarrow e \quad \text{in} \quad C([0,T];V^*) \quad (n\to\infty),$$

$$w_n\longrightarrow w \quad \text{in} \quad C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V) \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ．

4. 解の存在証明

初期値 (θ_0,w_0) を次の条件を満たす点列 $\{(\theta_{0,n},w_{0,n})\}_{n\in\mathbf{N}}\subset H\times H^2(\Omega)$ で近似する．

(C1) $\left\{\frac{1}{\theta_{0,n}}\right\}_{n\in\mathbf{N}}\subset V$, $\sup_{n\in\mathbf{N}}\left|\int_\Omega(-\log\theta_{0,n})\right|<+\infty$, $\theta_{0,n}\longrightarrow\theta_0$ in H $(n\to\infty)$.

(C2) $\{w_{0,n}\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\left\{z\in H^2(\Omega)\,\middle|\,\frac{\partial z}{\partial\nu}=0 \text{ in } H^{1/2}(\Gamma)\right\}$, $w_{0,n}\longrightarrow w_0$ in V $(n\to\infty)$.

ここで，次の近似問題 (AP) を考える．

$$e_n'-\Delta\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)=0, \qquad e_n=\theta_n+\lambda(w_n) \quad \text{a.e. in } Q_T, \quad (4.1)$$

$$w_n'-\kappa\Delta w_n+g(w_n)+\frac{\lambda'(w_n)}{\theta_n}=0 \quad \text{a.e. in } Q_T, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)=\frac{\partial w_n}{\partial\nu}=0 \quad \text{a.e. on } \Sigma_T, \quad (4.3)$$

$$e_n(0)=e_{0,n}:=\theta_{0,n}+\lambda(w_{0,n}), \quad w_n(0)=w_{0,n} \qquad \text{a.e. in } \Omega. \quad (4.4)$$

このとき，[4] の結果を適用すれば，(AP) の解 (e_n,w_n) の一意存在性が得られる．実際，(AP) は次の意味での一意解 (e_n,w_n) を持つ．

(S1) $e_n\in W^{1,2}(0,T;V^*)\cap L^\infty(0,T;H)$.

(S2) $w_n\in W^{1,2}(0,T;H)\cap C([0,T];V)\cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.

(S3) $\theta_n>0$ a.e. in Q_T.

(S4) $\frac{1}{\theta_n} \in L^\infty(0,T;V)$.

(S5) (4.1) は次の意味で成り立つ：

$$\langle e_n'(t), z\rangle + \int_\Omega \nabla\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)(t)\cdot\nabla z = 0, \qquad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t\in(0,T). \tag{4.5}$$

(S6) (4.2) は次の意味で成り立つ：

$$(w_n'(t), z) + \kappa\int_\Omega \nabla w_n(t)\cdot\nabla z + \left(g(w_n(t)) + \frac{\lambda'(w_n(t))}{\theta_n(t)}, z\right) = 0, \tag{4.6}$$

$$\forall z\in V, \quad \text{a.e. } t\in(0,T).$$

(S7) $e_n(0) = e_{0,n}$, $w_n(0) = w_{0,n}$.

次に，近似解の列 $\{(e_n, w_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対する n に無関係な一様評価を以下の補題で与える．

補題 4.1. (P) および (AP) における保存量を m_0 および $m_{0,n}$ でそれぞれ表す．つまり，

$$m_0 := \int_\Omega\{\theta_0 + \lambda(w_0)\}, \quad m_{0,n} := \int_\Omega\{\theta_{0,n} + \lambda(w_{0,n})\}, \qquad \forall n\in\mathbf{N}. \tag{4.7}$$

このとき，次の収束が成り立つ．

$$m_{0,n} \longrightarrow m_0 \qquad \text{in} \quad \mathbf{R}\ (n\to\infty).$$

証明. Taylor 展開と (2.2) を利用すると，

$$\begin{aligned}
&|m_{0,n} - m_0| \\
\le\ & \int_\Omega |\theta_{0,n} - \theta_0| + \int_\Omega |\lambda(w_{0,n}) - \lambda(w_0)| \\
\le\ & |\Omega|^{1/2}|\theta_{0,n} - \theta_0|_2 + |\lambda''|_\infty |w_{0,n} - w_0|_2^2 + \int_\Omega |\lambda'(w_0)||w_{0,n} - w_0| \\
\le\ & |\Omega|^{1/2}|\theta_{0,n} - \theta_0|_2 + |\lambda''|_\infty |w_{0,n} - w_0|_2^2 + c_2\left(|w_0|_2 + |\Omega|^{1/2}\right)|w_{0,n} - w_0|_2
\end{aligned}$$

が得られる．従って，(C1) と (C2) より本補題が得られた． ◇

補題 4.2. 次の一様評価を満たす正定数 M_1 が存在する：

$$\sup_{0\le t\le T}\|e_n(t)\|_* + \sup_{0\le t\le T}\|w_n(t)\| + \sup_{0\le t\le T}\int_0^t \|e_n'(s)\|_*^2 ds + \sup_{0\le t\le T}\int_0^t |w_n'(s)|_2^2 ds$$

$$+ \sup_{0\le t\le T}\int_0^t ds\int_\Omega \left|\nabla\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)(s)\right|^2 \le M_1, \qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

証明. (4.5) に $z = -\frac{1}{\theta_n(t)}$ を代入すると，

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega(-\log\theta_n(t)) - \int_\Omega \frac{\lambda'(w_n(t))w_n'(t)}{\theta_n(t)} + \int_\Omega\left|\nabla\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)(t)\right|^2 = 0, \qquad \text{a.e. } t\in(0,T) \tag{4.8}$$

が得られる．更に，$z = F_0^{-1} e_n'(t)$ を代入すると，

$$\|e_n'(t)\|_{0*}^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega (-\log\theta_n(t)) - \int_\Omega \frac{\lambda'(w_n(t))w_n'(t)}{\theta_n(t)} = 0, \qquad \text{a.e. } t \in (0,T) \tag{4.9}$$

が得られる．

一方，(4.6) に $z = w_n'(t)$ を代入すると，

$$|w_n'(t)|_2^2 + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\kappa}{2}\int_\Omega |\nabla w_n(t)|^2 + \int_\Omega \hat{g}(w_n(t))\right\} + \int_\Omega \frac{\lambda'(w_n(t))w_n'(t)}{\theta_n(t)} = 0, \tag{4.10}$$

$$\text{a.e. } t \in (0,T)$$

が得られる．

故に，(4.8) + (4.9) + 2 × (4.10) の結果を任意の区間 $[0,t](\subset [0,T])$ 上で積分すれば，

$$2\int_\Omega (-\log\theta_n(t)) + \kappa\int_\Omega |\nabla w_n(t)|^2 + 2\int_\Omega \hat{g}(w_n(t)) + \int_0^t \|e_n'(s)\|_{0*}^2 ds + \int_0^t |w_n'(s)|_2^2 ds$$

$$+ \int_0^t ds \int_\Omega \left|\nabla\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)(s)\right|^2 = 2\int_\Omega (-\log\theta_{0,n}) + \kappa\int_\Omega |\nabla w_{0,n}|^2 + 2\int_\Omega \hat{g}(w_{0,n}), \quad \forall t \in [0,T]$$

が得られる．ここで，(2.3)，(2.7)，(C1)，(C2) より

$$2\int_\Omega (-\log\theta_n(t)) + \kappa\int_\Omega |\nabla w_n(t)|^2 + 2c_5|w_n(t)|_4^4 + \int_0^t \|e_n'(s)\|_{0*}^2 ds$$

$$+ \int_0^t |w_n'(s)|_2^2 ds + \int_0^t ds \int_\Omega \left|\nabla\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)(s)\right|^2 \le C_1, \qquad \forall t \in [0,T], \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

を満たす正定数 C_1 が存在する．

更に，[2] で得られている次の評価式

$$\exists C_2 > 0,\ \exists C_3 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \int_\Omega (-\log z) \ge -C_2\|z\|_* - C_3, \quad \forall z \in H \tag{4.11}$$

とコンパクトな埋め込み $H \hookrightarrow V^*$ および (2.1) を利用すれば，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (-\log\theta_n(t)) \\
\ge\ & -C_2\|\theta_n(t)\|_* - C_3 \\
\ge\ & -C_2\|e_n(t)\|_* - C_2\|\lambda(w_n(t))\|_* - C_3 \\
\ge\ & -C_2\|e_n(t)\|_* - C_2C_4|\lambda(w_n(t))|_2 - C_3 \\
\ge\ & -C_2\int_0^t \|e_n'(s)\|_* ds - C_2\|e_{0,n}\|_* - \sqrt{2}c_1C_2C_4|w_n(t)|_4^2 - \sqrt{2}c_1C_4|\Omega|^{1/2} - C_3 \\
\ge\ & -C_2\int_0^t \|e_n'(s)\|_{0*} ds - C_2C_4|e_{0,n}|_2 - \frac{c_5}{2}|w_n(t)|_4^4 - \frac{c_1^2C_2^2C_4^2}{c_5} - \sqrt{2}c_1C_4|\Omega|^{1/2} - C_3 \\
\ge\ & -\frac{1}{4}\int_0^t \|e_n'(s)\|_{0*}^2 ds - C_2^2T - C_2C_4|e_{0,n}|_2 - \frac{c_5}{2}|w_n(t)|_4^4 - \frac{c_1^2C_2^2C_4^2}{c_5} - \sqrt{2}c_1C_4|\Omega|^{1/2} - C_3
\end{aligned}$$

が得られる．従って，

$$e_{0,n} = \theta_{0,n} + \lambda(w_{0,n}) \longrightarrow \theta_0 + \lambda(w_0) \qquad \text{in} \quad H \quad (n \to \infty)$$

なので，

$$\kappa \int_\Omega |\nabla w_n(t)|^2 + c_5 |w_n(t)|_4^4 + \frac{1}{2}\int_0^t \|e_n'(s)\|_{0*}^2 ds + \int_0^t |w_n'(s)|_2^2 ds$$
$$+ \int_0^t ds \int_\Omega \left|\nabla\left(-\frac{1}{\theta_n}\right)(t)\right|^2 \leq C_5, \qquad \forall t \in [0,T], \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

を満たす正定数 C_5 が存在する．ここで，

$$\|z^*\|_* \leq \|z^*\|_{0*}, \qquad \forall z^* \in V_0^*$$

に注意すれば，上記の評価式は本補題を意味する． ◇

補題 4.3. 次の一様評価を満たす正定数 M_i $(i=2,3)$ が存在する：

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_\Omega (-\log\theta_n(t))\right| \leq M_2, \tag{4.12}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}|\theta_n(t))|_1 \leq M_3, \tag{4.13}$$

証明. (2.1)，Sobolev の埋め込み定理 $V \hookrightarrow L^4(\Omega)$ と (4.11) を再び利用すれば，ある正定数 C_6 が存在して，

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (-\log\theta_n(t))\right| &\leq \int_\Omega (-\log\theta_n(t)) + 2(C_2\|\theta_n(t)\|_* + C_3)\\ &\leq \int_\Omega (-\log\theta_n(t)) + C_6(\|e_n(t)\|_* + \|w_n(t)\|^2 + 1)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，補題 4.2 を適用すれば，(4.12) が得られる．

次に，(4.7) かつ (2.1) より，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \theta_n(t) &= m_{0,n} - \int_\Omega \lambda(w_n(t))\\ &\leq |m_{0,n}| + \int_\Omega |\lambda(w_n(t))|\\ &\leq |m_{0,n}| + c_1(|w_n(t)|_2^2 + |\Omega|)\end{aligned}$$

なので，補題 4.1 と補題 4.2 を適用すれば，(4.13) が得られる． ◇

補題 4.3 より，劔持の補題 [5] を適用すれば，次の補題が得られる．本論文では証明を省略する．なお，詳細な証明については [3] を参照するとよい．

補題 4.4. 次の一様評価を満たす正定数 M_4 が存在する：

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t \left\|\frac{1}{\theta_n(t)}\right\| ds \leq M_4, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

補題 4.5. 次の一様評価を満たす正定数 M_5 が存在する：

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \|w_n(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds \le M_5, \qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

証明. (4.2) より，

$$\kappa\Delta w_n = w_n' + g(w_n) + \frac{\lambda'(w_n)}{\theta_n} \qquad \text{a.e. in } Q_T \tag{4.14}$$

である．ここで，(2.3) かつ (3.6) を利用すれば，

$$\begin{aligned}
|g(w_n(t))|_2 &= \left(\int_\Omega |g(w_n(t))|^2\right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{2}c_3(|w_n(t)|_6^3 + |\Omega|) \\
&\le \sqrt{2}c_3(c_7\|w_n(t)\|^3 + |\Omega|)
\end{aligned}$$

が得られる．従って，補題 4.2 より，ある正定数 C_7 が存在して次の一様評価が成り立つ：

$$\sup_{0\le t\le T}|g(w_n(t))|_2 \le C_7, \qquad \forall n\in\mathbf{R}. \tag{4.15}$$

次に，再度 (3.6) と Sobolev の埋め込み定理 $V \hookrightarrow L^3(\Omega)$ を利用すれば，(2.2) より

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\lambda'(w_n(t))}{\theta_n(t)}\right| &= \left(\int_\Omega \frac{|\lambda'(w_n(t))|^2}{|\theta_n(t)|^2}\right)^{1/2} \\
&\le \left|\frac{1}{\theta_n(t)}\right|_6 \left(\int_\Omega |\lambda'(w_n(t))|^3\right)^{1/3} \\
&\le c_2c_7\left\|\frac{1}{\theta_n(t)}\right\| \left(\int_\Omega (|w_n(t)|^3+1)^3\right)^{1/3} \\
&\le 4^{1/3}c_2c_7\left\|\frac{1}{\theta_n(t)}\right\| \left(|w_n(t)|_3 + |\Omega|^{1/3}\right) \\
&\le 4^{1/3}c_2c_7\left(C_8\|w_n(t)\| + |\Omega|^{1/3}\right)\left\|\frac{1}{\theta_n(t)}\right\|
\end{aligned}$$

が得られる．従って，補題 4.2 と補題 4.4 を適用すれば，ある正定数 C_9 が存在して次の一様評価を満たす：

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^t \left|\frac{\lambda'(w_n(s))}{\theta_n(s)}\right|_2^2 ds \le C_9, \qquad \forall n\in\mathbf{N}. \tag{4.16}$$

(4.14) − (4.16) に注意するとともに，補題 4.2 で得られている w_n' の $L^2(0,T;H)$ における一様評価を利用すれば，

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^t |\Delta w_n(s)|_2^2 ds \le C_{10}, \qquad \forall n\in\mathbf{N}$$

を満たす正定数 C_{10} が存在する．ここで，[1; Proposition 2.9] を適用すれば，本補題が得られる． ◇

補題 4.6. 次の一様評価を満たす正定数 M_6 が存在する：

$$\sup_{0\le t\le T}|\theta_n(t)|_2 \le M_6, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

証明. 証明中で実施される計算は形式的であり，本来は関数 $\alpha(r) := -\frac{1}{r}$ $(r>0)$, λ, g を適切に近似して，それに対応した近似問題に対して実行されるべきものである．しかし，本論文ではその部分を省略し，詳細な証明は [4] に委ねることとする．

まず，(4.6) に $z=\theta_n(t)$ を代入すると，$\alpha(r) := -\frac{1}{r}$ $(r>0)$ の単調増加性より，

$$\frac{d}{dt}|\theta_n(t)|_2^2 \le 2\int_\Omega |\lambda'(w_n(t))||w_n'(t)||\theta_n(t)|, \qquad \text{a.e. } t\in(0,T)$$

が得られる．ここで，(右辺) の積分を Sobolev の埋め込み定理 $H^2(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ を利用して，次のように評価する．

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\lambda'(w_n(t))||w_n'(t)||\theta_n(t)| \\
\le\ & c_2\left(\int_\Omega |w_n(t)||w_n'(t)||\theta_n(t)| + \int_\Omega |w_n'(t)||\theta_n(t)|\right) \\
\le\ & c_2\left(|w_n(t)|_\infty |w_n'(t)|_2|\theta_n(t)|_2 + |w_n'(t)|_2|\theta_n(t)|_2\right) \\
\le\ & c_2\left(C_{11}\|w_n(t)\|_{H^2(\Omega)}|w_n'(t)|_2|\theta_n(t)|_2 + |w_n'(t)|_2|\theta_n(t)|_2\right) \\
\le\ & c_2^2\left(C_{11}\|w_n(t)\|_{H^2(\Omega)}^2+1\right)|\theta_n(t)|_2^2 + \frac{1}{2}|w_n'(t)|_2^2.
\end{aligned}$$

従って，適当な正定数 C_{12} に対して，次の評価が成り立つ：

$$\frac{d}{dt}|\theta_n(t)|_2^2 \le C_{12}\left(\|w_n(t)\|_{H^2(\Omega)}^2+1\right)|\theta_n(t)|_2^2 + |w_n'(t)|_2^2, \qquad \text{a.e. } t\in(0,T).$$

ここで，Gronwall の補題を適用すれば，

$$\begin{aligned}
|\theta_n(t)|_2^2 \le\ & |\theta_{0,n}|_2^2 \exp\left(C_{12}\int_0^t \left(\|w_n(s)\|_{H^2(\Omega)}^2+1\right)ds\right) \\
&+ \int_0^t |w_n'(s)|_2^2 \exp\left(C_{12}\int_s^t\left(\|w_n(\sigma)\|_{H^2(\Omega)}^2+1\right)d\sigma\right)ds, \qquad \forall t\in[0,T]
\end{aligned}$$

を得ることが出来る．従って，補題 4.2 と補題 4.5 を用いれば，本補題が得られる． $\diamondsuit$

補題 4.2 − 4.6 で得られた一様評価を利用して，(P) の解の存在性を示す．

解の存在証明. 補題 4.2 − 4.6 で得られた一様評価を利用すれば，次の収束を満足する部分列 $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}\subset\mathbf{N}$ と関数 θ, w, $\tilde{\alpha}$ を選び出すことができる：

$$\theta_k := \theta_{n_k} \longrightarrow \theta \qquad \begin{cases} \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;V^*), \\ \text{strongly in } C([0,T];V^*), \\ \star-\text{weakly in } L^\infty(0,T;H), \end{cases} \qquad (k\to\infty),$$

$$w_k := w_{n_k} \longrightarrow w \qquad \begin{cases} \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;H), \\ \text{strongly in } C([0,T];H), \\ \star - \text{weakly in } L^\infty(0,T;V), \\ \text{weakly in } L^2(0,T;H^2(\Omega)), \end{cases} \qquad (k \to \infty),$$

$$-\frac{1}{\theta_k} \longrightarrow \tilde{\alpha} \qquad \text{weakly in } L^2(0,T;V), \quad (k \to \infty).$$

更に，(A1) かつ (A2) より，Lebesgue の収束定理が利用でき，結果として次の収束を得ることが出来る：

$$\begin{array}{lll} \lambda(w_k) \longrightarrow \lambda(w) & \text{strongly in } L^2(0,T;H), & \\ \lambda'(w_k) \longrightarrow \lambda'(w) & \text{strongly in } L^2(0,T;H), & \\ g(w_k) \longrightarrow g(w) & \text{strongly in } L^2(0,T;H), & (k \to \infty). \\ \lambda'(w_k)w_k' \longrightarrow \lambda'(w)w' & \text{weakly in } L^2(0,T;H), & \\ -\dfrac{\lambda'(w_k)}{\theta_k} \longrightarrow \tilde{\alpha}\lambda'(w) & \text{weakly in } L^2(0,T;H), & \end{array}$$

従って，$(\theta, w, \tilde{\alpha})$ は明らかに次を満たす：

$$\langle \theta'(t), z \rangle + (\lambda'(w(t))w'(t), z) + \int_\Omega \nabla\tilde{\alpha}(t) \cdot \nabla z = 0, \qquad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0,T),$$

$$(w'(t), z) + \kappa \int_\Omega \nabla w(t) \cdot \nabla z + (g(w(t)) - \tilde{\alpha}(t)\lambda'(w(t)), z) = 0,$$
$$\forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0,T),$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad w(0) = w_0 \qquad \text{a.e. in } \Omega.$$

結局，$\tilde{\alpha} = -\frac{1}{\theta}$ であることを示せば十分であることがわかる．実際，[1] の手法を用いた [4] に述べられている証明方法を紹介する．まず，$L^2(0,T;H)$ 上の作用素 α を次のように定義する：

$$\forall v \in L^2(0,T;H), \qquad [\alpha(v)](x,t) = -\frac{1}{v(x,t)}, \quad \forall (x,t) \in Q_T.$$

このとき，作用素 α は $L^2(0,T;H)$ 上の一価極大単調作用素である．

今，$\alpha(v) \in L^2(0,T;H)$ を満たす $v \in L^2(0,T;H)$ を任意に取り出すと，

$$\int_0^T \left(-\frac{1}{\theta_k(t)} + \frac{1}{v(t)}, \theta_k(t) - v(t) \right) dt \geq 0,$$

つまり，

$$\int_0^T \left\{ \left\langle \theta_k(t), -\frac{1}{\theta_k(t)} \right\rangle - \left\langle v(t), -\frac{1}{\theta_k(t)} \right\rangle \right\} dt \geq \int_0^T \left\{ \left(-\frac{1}{v(t)}, \theta_k(t) \right) - \left(-\frac{1}{v(t)}, v(t) \right) \right\} dt$$

が成り立つ．ここで，$k \to \infty$ とすれば，

$$\int_0^T \{\langle \theta(t), \tilde{\alpha}(t) \rangle - \langle v(t), \tilde{\alpha}(t) \rangle\} dt \geq \int_0^T \left\{ \left(-\frac{1}{v(t)}, \theta(t) \right) - \left(-\frac{1}{v(t)}, v(t) \right) \right\} dt,$$

つまり，

$$\int_0^T \left(\tilde{\alpha}(t) + \frac{1}{v(t)}, \theta(t) - v(t) \right) dt \geq 0$$

が得られる．従って，$\tilde{\alpha} = \alpha(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ でなければならない． $\diamond$

参考文献

[1] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.

[2] A. Damlamian and N. Kenmochi, *Evolution equations generated by subdifferentials in the dual space of* $H^1(\Omega)$, Discrete Continuous Dynamical Systems **5** (1999) 269-278.

[3] A. Ito, N. Kenmochi, and M. Kubo, *Non-isothermal phase transition models with Neumann boundary conditions*, Nonlinear Analysis **53** (2003) 977-996.

[4] A. Ito and T. Suzuki, *Asymptotic behavior of the solutions to the non-isothermal phase field equation*, to appear in Nonlinear Analysis.

[5] N. Kenmochi, *Neumann problems for a class of nonlinear degenerate parabolic equations*, Differential and Integral Equations **3** (1990) 253-273.

[6] N. Kenmochi and M. Kubo, *Weak solutions of nonlinear systems for non-isothermal phase transitions*, Adv. Math. Sci. Appl. **9** (1999) 499-521.

[7] O. Penrose and P.C. Fife, *Thermodynamically consistent models of phase-field tyype for the kinetics of phase transitions*, Physica D **43** (1990) 44-62.