数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 112-121

離散群の素元の分解密度，および，‘部分’セルバーグゼータ関数

橋本康史（九州大学）

Yasushi Hashimoto, Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 Introduction

$\mathbb{H}$ を複素上半平面 $\mathbb{H}:=\{z=x+iy\in\mathbb{C}|y>0\}$ とし，Γ を $X_{\Gamma}:=\Gamma\backslash\mathbb{H}$ の面積が有限になるような $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする．そして，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類のなす集合とし，$\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)$ のノルム $N(\gamma)$ を γ の固有値の大きいほうの2乗とする．このとき，以下の素元定理とよばれる漸近公式がよく知られている．

$$\pi_{\Gamma}(x):=\#\{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)|N(\gamma)<x\}=\mathrm{li}(x)+O(x^{\delta})\quad\text{as}\quad x\to\infty.$$

ここで，$\mathrm{li}(x):=\int_2 x(1/\log t)dt$, δ は Γ によって定まる $0<\delta<1$ なる定数である．本稿の目的は,「素元の分解密度」という，素元定理のひとつの精密化というべき漸近公式を得ることにある．以下で，具体的に「素元の分解」といった言葉の定義や，問題の定式化を行う．

まず，$\tilde{\Gamma}$ を Γ の指数有限な部分群とし，その指数を n と書く．そして，X_{Γ} を $X_{\tilde{\Gamma}}$ の有限被覆になっているとし，ϕ を $X_{\tilde{\Gamma}}$ から X_{Γ} への自然な射影とする．また，C_{γ} を $\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)$ に対応する X_{Γ} の素な測地線とし，$l(\gamma)$ を C_{γ} の長さ（$N(\gamma)=\exp l(\gamma)$）とする．このとき，与えられた $\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)$ に対して，ある $\gamma_1,\cdots,\gamma_k\in\mathrm{Prim}(\tilde{\Gamma})$ と n の k 個の分割 $(m_1,\cdots,m_k)$ が存在し（ただし，$m_1\geq\cdots\geq m_k\geq 1$），

$$\phi(C_{\gamma_j})=C_{\gamma},\quad l(\gamma_j)=m_j l(\gamma)\quad(N(\gamma_j)=N(\gamma)^{m_j})$$

が成り立つ．このとき，γ を $\tilde{\Gamma}$ 上 $(m_1,\cdots,m_k)$ 型に分解する Γ の素元（または，C_{γ} を $X_{\tilde{\Gamma}}$ 上 $(m_1,\cdots,m_k)$ 型に分解する X_{Γ} の素測地線）とよぶことにする．このとき，次の問題が考えられる．

Problem 1.1. 与えられた $\lambda\vdash n$ に対して，次の漸近評価を求めよ．

$$\pi^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(x):=\#\{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)|\gamma\text{ は }\tilde{\Gamma}\text{ 上 }\lambda\text{ 型},N(\gamma)<x\}.$$

これが，本稿における主目的となる問題であり，実際にSection 2では，一般論によるこの問題へのアプローチ，Section 3では，合同部分群の場合の具体的な計算を行う．また，関連問題として，Section 4において，部分セルバーグゼータ関数とよばれる関数の解析性に関する考察も記す．

なお，本稿の内容は若山正人氏（九州大学）との共同研究 [HW] の結果に基くものである．

2 一般論からわかること

まず，いくつか記号を定義する．
Γ': $\tilde{\Gamma}$ に含まれる Γ の極大な正規部分群，
$\Xi := \Gamma/\Gamma'$，$\Psi := \tilde{\Gamma}/\Gamma'$，
$M(\gamma) := \min\{m \geq 1 | \gamma^m \in \Gamma'\}$，
$A_{\Gamma'\uparrow\Gamma} := \{M(\gamma) | \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{N}$.

まず，素元の分解の型の表現論的な導き方を挙げる．

Lemma 2.1. *([HW])* σ を Ξ の Ξ/Ψ への置換表現とする（$\sigma \cong \mathrm{Ind}_{\tilde{\Gamma}}^{\Gamma} 1$）．ここで，$\lambda := (m_1, \cdots, m_k) \vdash n$，$\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ に対して，$\sigma(\gamma)$ が $m_i \times m_i$ 行列

$$S_{m_i} = \begin{cases} 1 & (m_i = 1), \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & (m_i \geq 2). \end{cases}$$

を使って

$$\sigma(\gamma) \sim \begin{pmatrix} S_{m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_{m_k} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

とあらわせるとき，$\sigma(\gamma)$ は λ 型であるということにする．このとき，次は同値である．
(i) $\sigma(\gamma)$ は λ 型．
(ii) $\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ は $\tilde{\Gamma}$ 上 λ 型． □

また，密度分布に関しては次の重要な公式が知られている．

Proposition 2.2. *(Chebotarev型密度分布定理， [Sa], [Su])* Conj(Ξ) を Ξ の共役類のなす集合とする．このとき，各共役類 $[g] \in \mathrm{Conj}(\Xi)$ に対して次が成り立つ．

$$\#\{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma) | \gamma\Gamma' = [g], N(\gamma) < x\} = \frac{\#[g]}{|\Xi|}\mathrm{li}(x) + O(x^{\delta}) \quad as \quad x \to \infty.$$

□

Lemma 2.1 と Proposition2.2 から，分解密度が次の手順で求められることがわかる．

1. $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ に対して，Γ' を決定する（$\Gamma' = \cap_{\gamma \in \tilde{\Gamma}\backslash\Gamma} \gamma^{-1}\tilde{\Gamma}\gamma$）．
2. Ξ の元を共役類で分類する．
3. 各共役類の代表元 γ に対して置換表現 $\sigma(\gamma)$ を計算し，γ の $\tilde{\Gamma}$ での型を決定する．
4. 同じ型をもつ共役類を全て集めて，それらの共役類の個数の総和を求める．この総和と $|\Xi|$ の比が，素元全体の中で，その型をもつ素元の占める割合に相当する．

以上より，一般の $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ に対しては次のことがわかる．

Theorem 2.3. $\gamma \in \Gamma$ に対して，$M(\gamma) := \min\{m \geq 1 | \gamma^m \in \Gamma'\}$ とする．また，$A_{\Gamma'\uparrow\Gamma} := \{M(\gamma) | \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{N}$, $\Lambda := \{(m_1, m_2, \cdots, m_k) \vdash n \quad | \quad \exists M \in A_{\Gamma'\uparrow\Gamma}, \forall m_i | M\}$ とする．このとき，$\lambda \in \Lambda$ に対して，次が成り立つ．

$$\pi^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(x) = \Bigg(\sum_{\substack{[\gamma] \in \mathrm{Conj}(\Xi), \\ [\gamma] \ is\ \lambda\text{-}type\ in\ \tilde{\Gamma}}} \frac{\#[\gamma]}{|\Xi|} \Bigg) \mathrm{li}(x) + O(x^{\delta}) \quad as \quad x \to \infty.$$

また，$\lambda \notin \Lambda$ に対して，$\pi^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(x) = 0$ である．

Proof. $\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma)$ が $\tilde{\Gamma}$ 上 $(1^{l_1}2^{l_2}\cdots n^{l_n})$ 型であるとする．すると，Lemma 2.1 から，$\sigma(\gamma)$ も $(1^{l_1}2^{l_2}\cdots n^{l_n})$ 型である．$\sigma(\gamma^{M(\gamma)}) = \mathrm{Id}$ なので，$j \nmid M(\gamma)$ に対して $l_j = 0$ である．なので，$\lambda \notin \Lambda$ に対して，$\pi^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(x) = 0$ である．$\lambda \notin \Lambda$ の場合の結果については，Proposition 2.2 から容易に得られる． □

Theorem 2.3 の結果において，$\lambda \notin \Lambda$ のときは必ず $\pi^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(x) = 0$ であることはわかったが，$\lambda \in \Lambda$ のときに，必ずしも，$\pi^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(x)$ が正になるとは限らない（実際に，零になる場合も多くある）．ただし，どの $\lambda \in \Lambda$ に対して正になるか零になるか，といったことは，今のところは，以下の $\tilde{\Gamma}$ が Γ の正規部分群であるとき（$\tilde{\Gamma} = \Gamma'$）を除いては詳しくわかっていない．

Theorem 2.4. $\tilde{\Gamma}$ が Γ の正規部分群であるとき，$\lambda = \lambda(m) = (m^{n/m})$ $(m \in A_{\Gamma'\uparrow\Gamma})$ に対して

$$\pi^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(x) = \Bigg(\sum_{\substack{[\mathrm{g}] \in \mathrm{Conj}(\Xi), \\ M([\mathrm{g}])=m}} \frac{\#[\mathrm{g}]}{|\Xi|} \Bigg) \mathrm{li}(x) + O(x^{\delta}) \quad as \quad x \to \infty$$

である．それ以外の $\lambda \vdash n$ に対しては $\pi^{\lambda}_{\Gamma\uparrow\Gamma}(x) = 0$ である．

Proof. $\tilde{\Gamma} = \Gamma'$ なので，$\Xi/\Psi = \Xi/\{e\} = \Xi$ である．今，$\gamma \in \Xi$ に対して，$\gamma^l g = g$ なる $g \in \Xi$ と $l < M(\gamma)$ が存在すると仮定すると，$\gamma^l = e$ なので，$M(\gamma)$ の最小性に矛盾する．ということは，任意の g に対して，$\sigma(g) = (m^{n/m})$ $(m \in A_{\Gamma'\uparrow\Gamma})$ しか現れない．なので，あとは Proposition 2.2 を適用するとよい． □

3 $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群の場合

この節では，Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$，$\tilde{\Gamma}$ が以下で定義される合同部分群である場合について考える．

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0(N) &:= \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) | \gamma_{21} \equiv 0 \bmod N\},\\
\Gamma_1(N) &:= \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) | \gamma_{11} \equiv \gamma_{22} \equiv \pm 1, \gamma_{21} \equiv 0 \bmod N\},\\
\Gamma(N) &:= \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) | \gamma_{11} \equiv \gamma_{22} \equiv \pm 1, \gamma_{12} \equiv \gamma_{21} \equiv 0 \bmod N\}.
\end{aligned}
$$

ここで，N は自然数である．簡単のため，本稿では $N = p$（奇素数）の場合のみを扱うことにする（一般の N については [HW] を参照）．このとき，$\Xi = SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $|\Xi| = p(p^2-1)/2$, $A_{\Gamma(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})} = \{p, (p \pm 1)/2$ の約数 $\}$, そして，

$$
n = \begin{cases} (p+1) & (\tilde{\Gamma} = \Gamma_0(p^r)),\\ (p^2-1)/2 & (\tilde{\Gamma} = \Gamma_1(p^r)),\\ |\Xi| & (\tilde{\Gamma} = \Gamma(p^r)) \end{cases}
$$

である．この場合には，次の結果が得られている．

Theorem 3.1. p を奇素数とし，分割 $\lambda^p_0(m), \lambda^p_1(m), \lambda^p(m)$ を

$$
\lambda^p_0(m) := \begin{cases} (1^{(p+1)}) & (m = 1),\\ (m^{(p-1)/m}, 1^2) & (m | \frac{p-1}{2}, m > 1),\\ (p, 1) & (m = p),\\ (m^{(p+1)/m}) & (m | \frac{p+1}{2}, m > 1), \end{cases}
$$

$$
\lambda^p_1(m) := \begin{cases} (1^{(p^2-1)/2}) & (m = 1),\\ (p^{(p-1)/2}, 1^{(p-1)/2}) & (m = p),\\ (m^{(p+1)/m}) & (m | \frac{p\pm1}{2}, m > 1), \end{cases}
$$

$$
\lambda^p(m) = (m^{|\Xi|/m})
$$

で定義する．このとき，次が成り立つ．

$$\mu^{\lambda_0(m)}_{\Gamma_0(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})} = \mu^{\lambda_1(m)}_{\Gamma_1(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})} = \mu^{\lambda(m)}_{\Gamma(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})} = \begin{cases} \dfrac{2}{p(p^2-1)} & (m=1), \\ \dfrac{2}{p} & (m=p), \\ \dfrac{\varphi(m)}{p-1} & (m|\frac{p-1}{2}, m>1), \\ \dfrac{\varphi(m)}{p+1} & (m|\frac{p+1}{2}, m>1). \end{cases}$$

ここで，$\mu^{\lambda}_{\Gamma\uparrow\Gamma} := \lim_{x\to\infty}\pi^{\lambda}_{\Gamma\uparrow\Gamma}(x)/\pi_{\Gamma}(x)$, $\varphi(m) := \#\{1 \le l \le m-1 | \gcd(l,m)=1\}$ はオイラー関数である．このほかの $\lambda \vdash n$ に関しては，$\pi^{\lambda}_{\Gamma\uparrow SL_2(\mathbb{Z})}(x) = 0$ である．

定理3.1の証明のために，まず，Ξ の共役類を決定しなくてはいけないが，$\Xi = SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ に関しては，次のような共役類の分類が得られている（[Di] の第７章参照）．

Lemma 3.2. $SL_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) - \{I\}$ の元は次のいずれかの元と共役である．

γ		ordγ	$\#[\gamma]$
$\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta^{-1}\end{pmatrix}^{s(p-1)/l}$	$l\vert\frac{p-1}{2}(l>1), s\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$,	l	$\frac{1}{2}p(p+1)$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$---$	p	$\frac{1}{2}(p^2-1)$
$\begin{pmatrix}1 & \nu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$---$	p	$\frac{1}{2}(p^2-1)$
$J^{-1}\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}^{s(p+1)/l}J$	$l\vert\frac{p+1}{2}(l>1), s\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$,	l	$\frac{1}{2}p(p-1)$.

ここで，δ は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ の生成元，ν は p の平方非剰余，ω は $\omega^{p+1}\equiv 1 \mod p$ をみたす数 $(\omega\neq 1)$，J は

$$J^{-1}\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}J \in SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

をみたす二次正方行列である． □

ここで，次の三の部分集合を定義する．

$$
\begin{aligned}
A_l &:= \bigcup_{s\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*} \left[\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta^{-1}\end{pmatrix}^{s(p-1)/l}\right] \quad (l|\frac{p-1}{2}, l>1),\\
B &:= \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] \cup \left[\begin{pmatrix}1 & \nu\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\Bigg), \qquad (3.1)\\
C_l &:= \bigcup_{s\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*} \left[J^{-1}\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}^{s(p+1)/l} J\right] \quad (l|\frac{p+1}{2}, l>1).
\end{aligned}
$$

このとき，以下の Lemma が成り立つ．

Lemma 3.3. *([H])* p を奇素数，$\sigma(\gamma,\Gamma) := \left(\mathrm{Ind}_{\Gamma}^{SL_2(\mathbb{Z})}1\right)(\gamma)$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$
\mathrm{tr}\sigma(\gamma,\Gamma_0(p)) = \begin{cases} (p+1) & (\gamma\in\Gamma(p)),\\ 2 & (\gamma\in A_l),\\ 1 & (\gamma\in B),\\ 0 & (\gamma\in C_l),\end{cases}
$$

$$
\mathrm{tr}\sigma(\gamma,\Gamma_1(p)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(p^2-1) & (\gamma\in\Gamma(p)),\\ \frac{1}{2}(p-1) & (\gamma\in B),\\ 0 & (\mathit{otherwise}),\end{cases}
$$

$$
\mathrm{tr}\sigma(\gamma,\Gamma(p)) = \begin{cases} \frac{1}{2}p(p^2-1) & (\gamma\in\Gamma(p)),\\ 0 & (\mathit{otherwise}),\end{cases}
$$

□

Lemma 3.3 を用いると，次の Lemma を証明することができる．

Lemma 3.4. $m=1,p,$ または，$(p\pm1)/2$ の約数とする．このとき，以下が成り立つ．

$$
\gamma \text{ は } \Gamma_0(p) \text{ 上 } \lambda_0^p(m) \text{ 型} \Leftrightarrow \gamma \text{ は } \Gamma_1(p) \text{ 上 } \lambda_1^p(m) \text{ 型} \Leftrightarrow \gamma \text{ は } \Gamma(p) \text{ 上 } \lambda^p(m) \text{ 型}
$$

$$
\Leftrightarrow M(\gamma)=m \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma\in\Gamma(p) & (m=1),\\ \gamma\in A_m & (m|(p-1)/2, m>1),\\ \gamma\in B & (m=p),\\ \gamma\in C_m & (m|(p+1)/2, m>1).\end{cases}
$$

Proof. Lemma 2.1 より, γ が $\tilde{\Gamma}$ 上 $(1^{l_1}2^{l_2}\cdots n^{l_n})$ 型のとき，$\mathrm{tr}\sigma(\gamma^m)=\sum_{j|m} jl_j$ なので，l_j たちは次のように計算される.

$$jl_j=\mathrm{tr}\sigma(\gamma^j,\tilde{\Gamma})-\sum_{p|j}\mathrm{tr}\sigma(\gamma^{j/p},\tilde{\Gamma}). \tag{3.2}$$

$j_1=\mathrm{tr}\sigma(\gamma,\tilde{\Gamma})$ なので，Lemma 3.3 と (3.2) を使って実際に計算すると，Lemma 3.4 の結果を得ることができる. □

あとは，Lemma 3.4 を第 2 節の結果に適用してやると，Theorem 3.1 を導くことができる.

Remark 3.5. 合同部分群の階数が素数ではなく，もっと一般の，とくに平方因子を含む場合には，Ξ の群構造が複雑になるため，*Lemma 3.4* のような同値関係は成り立たない. 本稿では，素数の場合以外は省略するが，詳しい計算結果に関しては *[HW]* を参照していただきたい.

4 部分セルバーグゼータ関数の解析性

セルバーグゼータ関数 $\zeta_\Gamma(s)$ を次で定義する.

$$\zeta_\Gamma(s):=\prod_{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}(1-N(\gamma)^{-s})^{-1}\quad \Re s>1.$$

ここで，$\tilde{\Gamma}\subset\Gamma$ とすると，Venkov-Zograf の公式 ([VZ]) から，$\tilde{\Gamma}$ に関するセルバーグゼータ関数は次のようにあらわすことができる.

$$\begin{aligned}\zeta_{\tilde{\Gamma}}(s)&=\prod_{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}\det\left(\mathrm{Id}-\sigma(\gamma,\tilde{\Gamma})N(\gamma)^{-s}\right)^{-1} \qquad (4.1)\\ &=\prod_{\lambda\vdash n}\prod_{\substack{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ \gamma\text{ は }\tilde{\Gamma}\text{ 上 }\lambda\text{ 型}}}\det\left(\mathrm{Id}-\sigma(\gamma,\tilde{\Gamma})N(\gamma)^{-s}\right)^{-1}\end{aligned}$$

とくに，$\lambda\vdash n$ に関するセルバーグ型のゼータ関数を

$$\zeta^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(s):=\prod_{\substack{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ \gamma\text{ は }\tilde{\Gamma}\text{ 上 }\lambda\text{ 型}}}(1-N(\gamma)^{-s})^{-1}\quad \Re s>1$$

と定義しておくと，Lemma 2.1 より

$$\zeta_{\tilde{\Gamma}}(s)=\prod_{\lambda=(m_1,\cdots,m_k)\vdash n}\zeta^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(m_1s)\cdots\zeta^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(m_ks) \tag{4.2}$$

と書けることがわかる．この素元の部分積によって定義される $\zeta^{\lambda}_{\tilde{\Gamma}\uparrow\Gamma}(s)$ の性質に関しては，今のところ一般的なことは詳しくわかっていないが，$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1(p), \Gamma(p)$ の場合には以下の結果を得ることができた．

まず，Lemma 3.4 より，

$$\zeta^{\lambda_1^p(m)}_{\Gamma_1(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})}(s) = \zeta^{\lambda^p(m)}_{\Gamma(p)\uparrow SL_2(\mathbb{Z})}(s) = \prod_{\substack{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\\ M(\gamma)=m}} (1-N(\gamma)^{-s})^{-1}$$

が成り立つので，簡単のため，ここでは上の関数を $\zeta^{(p,m)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)$ と書くことにする．このとき，$\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)$ は次の性質をみたす．

Proposition 4.1. p を奇素数とする．このとき，次が成り立つ．

$$\left\{\frac{\left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\right)^p}{\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(ps)}\right\}^{\frac{p-1}{2}} = \frac{\left(\zeta_{\Gamma_1(p)}(s)\right)^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(s)}. \tag{4.3}$$

さらに，$r \geq 1$ に対して，$\left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\right)^{p^r(p-1)/2}$ は $\Re s > 1/p^r$ 上で有理関数として解析接続される．また，$\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)$ は $s=0$ の近くで，無限個の特異点をもつ．

Proof. (4.2) と Lemma 3.4 から，次がわかる．

$$\begin{aligned}
\zeta_{\Gamma(p)}(s) =& \left(\zeta^{(p,1)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\right)^{\frac{1}{2}p(p^2-1)}\left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(ps)\right)^{\frac{1}{2}(p^2-1)}\\
&\times \prod_{m\mid\frac{p\pm1}{2},\, m>1} \left(\zeta^{(p,m)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(ms)\right)^{\frac{p(p^2-1)}{2m}},\\
\zeta_{\Gamma_1(p)}(s) =& \left(\zeta^{(p,1)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\right)^{\frac{1}{2}(p^2-1)}\left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\times\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(ps)\right)^{\frac{1}{2}(p-1)}\\
&\times \prod_{m\mid\frac{p\pm1}{2},\, m>1} \left(\zeta^{(p,m)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(ms)\right)^{\frac{(p^2-1)}{2m}}.
\end{aligned}$$

なので，実際に比をとることで(4.3) は容易に証明される．

次に，$\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)$ の解析性についてみていこう．セルバーグゼータ関数 $\zeta_\Gamma(s)$ は $\Re s > 1$ で絶対収束しており，また，全複素平面で有理型に解析接続される．とくに，$\Re s = 1$ では 1 位の零点 $s=1$ を除いて特異点をもたないことが知られている（[He]）．なので，(4.3) と $\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(ps)$ が $\Re s > 1/p$ 上で絶対収束していることから，$\left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\right)^{p(p-1)/2}$ は $\Re s > 1/p$

上で有理型に解析接続される．また，(4.3) の両辺の p^{r-1} 乗をとると，

$$
\begin{aligned}
\left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\right)^{p^r(p-1)/2} &= \left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(ps)\right)^{p^{r-1}(p-1)/2} \left\{ \frac{\left(\zeta_{\Gamma_1(p)}(s)\right)^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(s)} \right\}^{p^{r-1}} \\
&= \left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(p^2 s)\right)^{p^{r-2}(p-1)/2} \left\{ \frac{\left(\zeta_{\Gamma_1(p)}(ps)\right)^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(ps)} \right\}^{p^{r-2}} \left\{ \frac{\left(\zeta_{\Gamma_1(p)}(s)\right)^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(s)} \right\}^{p^{r-1}} \\
&= \cdots \\
&= \left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(p^r s)\right)^{(p-1)/2} \prod_{k=1}^{r} \left\{ \frac{\left(\zeta_{\Gamma_1(p)}(p^k s)\right)^p}{\zeta_{\Gamma(p)}(p^k s)} \right\}^{p^{r-k}}. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

となる．$\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(p^r s)$ は $\Re s > 1/p^r$ 上で絶対収束しているので，$\left(\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)\right)^{p^r(p-1)/2}$ の $\Re s > 1/p^r$ 上での解析接続が得られる．

$\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)$ が $s=0$ の近くで，無限個の特異点をもつことも，本質的に(4.4) から証明することができる． □

Remark 4.2. *Proposition 4.1* では，$\zeta^{(p,p)}_{SL_2(\mathbb{Z})}(s)$ の右半平面 $\Re s > 0$ での解析接続が得られた．左半平面 $\Re s \leq 0$ へ解析接続の可能性に関しては，$\Re s = 0$ で自然境界をもつ（つまり，解析接続は不可能）と思われる．ただし，証明には，非自明零点の分布に関するある程度詳しい情報が必要であるため，今の段階では「わからない」と言わざるを得ない状況にある．

参考文献

[Di] L. E. Dickson, *Linear Groups: With an Exposition of the Galois Field Theory*, Dover Phoenix Editions, Dover Publications, Inc., New York (1955).

[G] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Fleischer, Leipzig, (1801).

[H] Y. Hashimoto, *Arithmetic expressions of Selberg's zeta functions for congruence subgroups*, math.RT/0409101.

[HW] Y. Hashimoto and M. Wakayama, *Splitting density for lifting about discrete groups*, math.NT/0501284.

[He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of $PSL(2,\mathbb{R})$ I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** Springer-Verlag, (1976, 1983).

[Sa] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory **15**(1982), 229–247.

[Se] A. Selberg, *Collected Papers I*, Springer-Verlag (1989).

[Su] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications*, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 266–284, Lecture Notes in Math., **1201**, Springer, Berlin (1986).

[VZ] A. B. Venkov and P. G. Zograf, *Analogues of Artin's factorization formulas in the spectral theory of automorphic functions associated with induced representations of Fuchsian groups.*, Math. USSR Izvestiya, **21**(1983), 435-443.

橋本康史
〒812-8581　福岡市東区箱崎 6-10-1
九州大学大学院数理学府数理学専攻
092-641-3131（内線 8405）
e-mail:hasimoto@math.kyushu-u.ac.jp