数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 11-21

$A_l^{(1)}$ 型量子 Painlevé 系

東北大学大学院理学研究科 名古屋 創 (Hajime Nagoya)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 はじめに

Painlevé 方程式は動く分岐点を持たない 2 階の常微分方程式である. 20 世紀初頭に Painlevé によって発見された [7]. その後, 岡本和夫は Bäcklund 変換として Painlevé 方程式がアフィン Weyl 群の作用を持つことを見出した [6]. 野海・山田はさらに $A_l^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群作用を持つ高階の常微分方程式を提出した [5]. 現在ではアフィン Lie 環を用いて定義され多くの古典可積分系を含む Drinfel'd-Sokolov 階層からの相似簡約として任意のアフィン Weyl 群作用を持つ常微分方程式が得られることが知られている.

本稿では $A_l^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群作用を持つ非可換微分方程式の系統的な構成を Lax 作用素を用いて行う. これらの方程式系は野海・山田の提出した微分方程式系と Painlevé 第 2 方程式を含む.

2 Lax equations

$\mathcal{K}_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$ を次の生成元と関係式で定まる $\mathbb{C}$ 上の斜体とする.

$$\text{生成元:}\quad f_{i,i+j}, \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1) \tag{2.1}$$

$$\text{関係式:}\quad \epsilon_i \text{は他と可換,} \tag{2.2}$$

$$[f_{ij}, f_{kl}] = h(\delta_{j\equiv k} f_{i,l+j-k} - \delta_{l\equiv i} f_{k,l+j-i}), \tag{2.3}$$

ただし $h \in \mathbb{C}$ とし

$$\delta_{i\equiv j} = \begin{cases} 1 & (i \equiv j \pmod{n}) \\ 0 & (i \not\equiv j \pmod{n}) \end{cases} \tag{2.4}$$

であって

$$f_{ij}=\begin{cases}1 & (j-i=m)\\ 0 & (j-i>m)\end{cases} \tag{2.5}$$

であるとする．上の関係式で定まる代数は Ore domain であることが示され，その商体が $\mathcal{K}_{m,n}$ である．

Definition 2.1 $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ を多項式環とし，$M_{n,n}(\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}])$ の元である行列 F_i $(0\le i)$, Λ, L, B を次で定める．

$$F_0=\sum_{i=1}^{n}E_{ii}\epsilon_i,\quad F_j=\sum_{i=1}^{n}E_{ii}f_{i,i+j}\quad (1\le j),\quad \Lambda=\sum_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}+zE_{n,1}, \tag{2.6}$$

$$L=\sum_{i=0}^{\infty}F_i\Lambda^i, \tag{2.7}$$

ただし E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他の成分が 0 である行列とする．

行列 L は Lax 作用素と呼ばれる．Lax 作用素 L (2.7) の右辺は有限和である．なぜならば定義より $j\ge m+1$ に対して $F_j=0$ となるからである．Lax 作用素は次のように書けている．

$$L=\begin{bmatrix}\epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & f_{12} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & f_{n-1,n}\\ zf_{n,n+1} & & & 0\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0 & 0 & f_{13} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & f_{n-2,n}\\ zf_{n-1,n+1} & & & 0 & 0\\ 0 & zf_{n,n+2} & & & 0\end{bmatrix}+\cdots.$$

Lax 作用素の例として $m=4$, $n=5$ のときを挙げる．

$$L=\begin{bmatrix}\epsilon_1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & 1\\ z & \epsilon_2 & f_{23} & f_{24} & f_{25}\\ zf_{36} & z & \epsilon_3 & f_{34} & f_{35}\\ zf_{46} & zf_{47} & z & \epsilon_4 & f_{45}\\ zf_{56} & zf_{57} & zf_{58} & z & \epsilon_5\end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

このように変数の場所と添え字が一致している．このことから伺えるように斜体 $\mathcal{K}_{m,n}$ の定義関係式 (2.3) は gl_n の定義関係式 $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{j,k}E_{il} - \delta_{l,i}E_{kj}$ を反映したものとなっている．

また斜体 $\mathcal{K}_{m,n}$ の定義関係式 (2.3) は行列 F_i で書くと次のようになることに注意しよう．

$$[F_i, F_j^{(l)}] = h\left(\delta_{l\equiv i}F_{i+j} - \delta_{l\equiv -j}F_{i+j}^{(l)}\right), \tag{2.9}$$

ただし $F_j^{(l)} = \Lambda^l F_j \Lambda^{-l}$, $i, j \geq 1$ とする．$m=4$, $n=5$, $j=1$, $l=1$ に対して $F_j^{(l)}$ の例を挙げる．

$$F_1^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{23} & & & & \\ & f_{34} & & & \\ & & f_{45} & & \\ & & & f_{56} & \\ & & & & f_{12} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

∂_z を $\mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ の $\mathcal{K}_{m,n}$-derivation で z を 1 に移すものとする．行列 $C = \sum_{i=0}^{p} c_i\Lambda^i$ を Λ の多項式と見て，$C_{\geq q} = \sum_{i=q}^{p} c_i\Lambda^i$, $C_{<q} = \sum_{i=0}^{q-1} c_i\Lambda^i$ と定める．

Theorem 2.2 $s, k \in \mathbb{N}$ とし $ns > m(k-1)$ と仮定する．このとき $\mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ 上の $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$-*derivation* $\partial_{s,k}$ を次の *Lax* 方程式で定めることができる．

$$\partial_{s,k}(L) = [L, B_{s,k}] + \kappa z\partial_z(B_{s,k}), \tag{2.11}$$

ただし $B_{s,k} = (L^k)_{\geq ns} \cdot z^{-s}$, $\kappa \in \mathbb{C}$ とする．

L や $B_{s,k}$ を Λ の多項式と見たとき，条件 $ns > m(k-1)$ は $\partial_{s,k}(L)$ の次数が $z\partial_z(B_{s,k})$ の次数以上であることを意味することがわかる．

この定理を証明するために，次の補題を用意する．

Lemma 2.3 $s, k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ とし $i, j \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$, $j \geq 1$ とする．仮定 $ns > m(k-1)$ のもとで，次が成り立つ．

$$\left[L_{ns+i}^k, F_j^{(l)}\right] = h\left(\delta_{l\equiv i}L_{ns+i+j}^k - \delta_{l\equiv -j}(L_{ns+i+j}^k)^{(l)}\right), \tag{2.12}$$

ただし L_{ns+i}^k は $L^k = \sum_{p=0}^{mk} L_p^k\Lambda^p$ から決まるものとする．

Proof. 定義より

$$L^k_{ns+i} = \sum_{I_k=ns+i} F_{i_1} F^{(I_1)}_{i_2} \cdots F^{(I_{k-1})}_{i_k} \tag{2.13}$$

を得る. ただし $I_p = \sum_{q=1}^{p} i_q$. 今 $ns - m(k-1) + i \leq i_1, \ldots, i_k \leq m$ であることに注意. この記法を用いて (2.12) の左辺を次のように計算する.

$$\left[L^k_{ns+i}, F^{(l)}_j\right] = \sum_{p=1}^{k} \sum_{I_k=ns+i} F_{i_1} F^{(I_1)}_{i_2} \cdots F^{(I_{p-2})}_{i_{p-1}} \left[F^{(I_{p-1})}_{i_p}, F^{(l)}_j\right] F^{(I_p)}_{i_{p+1}} \cdots F^{(I_{k-1})}_{i_k},$$

行列関係式 (2.9) から,

$$\begin{aligned}
&\left[L^k_{ns+i}, F^{(l)}_j\right] \\
=&h \sum_{p=1}^{k} \delta_{l \equiv I_p} \sum_{I_k=ns+i} F_{i_1} F^{(I_1)}_{i_2} \cdots F^{(I_{p-2})}_{i_{p-1}} F^{(I_{p-1})}_{i_p+j} F^{(I_p)}_{i_{p+1}} \cdots F^{(I_{k-1})}_{i_k} \\
&- h \sum_{p=1}^{k} \delta_{l+j \equiv I_{p-1}} \sum_{I_k=ns+i} F_{i_1} F^{(I_1)}_{i_2} \cdots F^{(I_{p-2})}_{i_{p-1}} F^{(I_{p-1}-j)}_{i_p+j} F^{(I_p)}_{i_{p+1}} \cdots F^{(I_{k-1})}_{i_k}.
\end{aligned}$$

$l \equiv I_k \pmod n$ ならば $l \equiv i \pmod n$ であることと $l+j \equiv I_0 \pmod n$ ならば $l \equiv -j \pmod n$ であることに注意して次のように計算を進める.

$$\begin{aligned}
&\left[L^k_{ns+i}, F^{(l)}_j\right] \\
=&h \sum_{p=1}^{k-1} \delta_{l \equiv I_p} \sum_{I_k=ns+i} F_{i_1} F^{(I_1)}_{i_2} \cdots F^{(I_{p-2})}_{i_{p-1}} F^{(I_{p-1})}_{i_p+j} F^{(I_p)}_{i_{p+1}} \cdots F^{(I_{k-1})}_{i_k} \\
&+ h \left(\delta_{l \equiv i} L^k_{ns+i+j} - \delta_{l \equiv -j} (L^k_{ns+i+j})^{(-j)}\right) \\
&- h \sum_{p=2}^{k} \delta_{l+j \equiv I_{p-1}} \sum_{I_k=ns+i} F_{i_1} F^{(I_1)}_{i_2} \cdots F^{(I_{p-2})}_{i_{p-1}} F^{(I_{p-1}-j)}_{i_p+j} F^{(I_p)}_{i_{p+1}} \cdots F^{(I_{k-1})}_{i_k} \\
=&\mathrm{I} + \mathrm{II} + \delta_{l \equiv i} L^k_{ns+i+j} - \delta_{l \equiv -j} (L^k_{ns+i+j})^{(-j)},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

ただし

$$\mathrm{I} = h \sum_{p=1}^{k-1} \delta_{l \equiv I_p - j} \sum_{I_k=ns+i} F_{i_1} F^{(I_1)}_{i_2} \cdots F^{(I_{p-2})}_{i_{p-1}} F^{(I_{p-1})}_{i_p+j} F^{(I_p)}_{i_{p+1}} \cdots F^{(I_{k-1})}_{i_k}, \tag{2.15}$$

$$\mathrm{II} = -h\sum_{p=1}^{k-1}\delta_{l+j\equiv I_p}\sum_{I_k=ns+i}F_{i_1}F_{i_2}^{(I_1)}\cdots F_{i_p}^{(I_{p-1})}F_{i_{p+1}+j}^{(I_p-j)}F_{i_{p+2}}^{(I_{p+1})}\cdots F_{i_k}^{(I_{k-1})}. \tag{2.16}$$

(2.15) において, $ns-m(k-1)+i+j \leq i_1,\ldots,i_{p-1},i_p+j,i_{p+1},\ldots,i_k \leq m$ が成り立ち, (2.16) において, $ns-m(k-1)+i+j \leq i_1,\ldots,i_p,i_{p+1}+j,i_{p+2},\ldots,i_k \leq m$ が成り立つので, I と II は消しあう. したがって (2.12) を得る. □

Proof of Theorem 2.2: (2.11) で定義された $\partial_{s,k}$ が行列関係式 (2.9) を保存することを示せばよい:

$$\partial_{s,k}(F_iF_j^{(l)} - F_j^{(l)}F_i) = h\partial_{s,k}\left(\delta_{l\equiv i}F_{i+j} - \delta_{l\equiv -j}F_{i+j}^{(-j)}\right). \tag{2.17}$$

Lax 方程式 (2.11) より次を得る.

$$\partial_{s,k}(F_i) = \sum_{p+q=i}\left(F_p(L_{ns+q}^k)^{(p)} - L_{ns+q}^kF_p^{(q)}\right) + \kappa\lambda_iL_{ns+i}^k, \tag{2.18}$$

ただし $\lambda_i = \sum_{p=1}^{i}E_{n+1-p,n+1-p}$. (2.18) を用いると, (2.17) の左辺を次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
&\partial_{s,k}(F_iF_j^{(l)} - F_j^{(l)}F_i)\\
=&\partial_{s,k}(F_i)F_j^{(l)} + F_i\partial_{s,k}(F_j^{(l)}) - \partial_{s,k}(F_j^{(l)})F_i - F_j^{(l)}\partial_{s,k}(F_i)\\
=&\left[\sum_{p+q=i}\left(F_p(L_{ns+q}^k)^{(p)} - L_{ns+q}^kF_p^{(q)}\right) + \kappa\lambda_iL_{ns+i}^k, F_j^{(l)}\right]\\
&+\left[F_i, \sum_{p+q=j}\left(F_p^{(l)}(L_{ns+q}^k)^{(p+l)} - (L_{ns+q}^k)^{(l)}F_p^{(q+l)}\right) + \kappa\lambda_j^{(l)}(L_{ns+j}^k)^{(l)}\right].
\end{aligned}$$

後は (2.9) と補題 2.3 を用いて計算すれば (2.17) を得る. □

$m=2$, $s=1$, $n=2k+1$ ($k\in\mathbb{N}$) のときの例を与える. 定義関係式は次のようになる.

$$[f_{i,i+1}, f_{i+1,i+2}] = h, \quad [f_{i,i+1}, f_{j,j+1}] = 0 \quad (j\neq i\pm 1).$$

関係式 (2.18) を用いると次を得る.

$$\partial_{1,k}(F_1) = \sum_{p+q=1}\left(F_p(L_{n+q}^k)^{(p)} - L_{n+q}^kF_p^{(q)}\right) + \kappa\lambda_1L_{n+1}^k$$

$$
\begin{aligned}
=&F_1(L_n^k)^{(1)} - L_n^k F_1 + F_0 L_{n+1}^k - L_{n+1}^k F_0^{(1)} + \kappa\lambda_1 L_{n+1}^k \\
=&F_1\left(\sum_{p=1}^{k} F_1^{2(p-1)}\right)^{(1)} - \left(\sum_{p=1}^{k} F_1^{2(p-1)}\right) F_1 + F_0 - F_0^{(1)} + \kappa\lambda_1 \\
=&F_1\left(\sum_{p=1}^{k-1} F_1^{2(p-1)}\right)^{(1)} - \left(\sum_{p=2}^{k} F_1^{2(p-1)}\right) F_1 + F_0 - F_0^{(1)} + \kappa\lambda_1.
\end{aligned}
$$

従って $1 \leq i \leq n$ に対して次を得る.

$$
\partial_{1,k}(f_{i,i+1}) = f_{i,i+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1} f_{i+2p-1,i+2p}\right) - \left(\sum_{p=1}^{k-1} f_{i+2p,i+2p+1}\right) f_{i,i+1} + \alpha_i,
$$

ただし $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $\alpha_n = \epsilon_n - \epsilon_1 + \kappa$. $\partial_{1,k}$ が定めるこれらの微分方程式系は $A_{2k}^{(1)}$ 型の量子野海・山田系 である [3].

3 Affine Weyl group symmetry

Definition 3.1 行列 r_i $(1 \leq i \leq n)$ を次で定義する.

$$
r_i = \frac{\alpha_i}{f_{i,i+1}} E_{i+1,i+1} \in M_{n,n}(\mathcal{K}_{m,n}), \tag{3.1}
$$

ただし $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $\alpha_n = \epsilon_n - \epsilon_1 + \kappa$. 次に G_i $(1 \leq i \leq n)$ を定義する.

$$
G_i = I + r_i \Lambda^{-1} \in M_{n,n}(\mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]), \tag{3.2}
$$

ただし $I = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$.

Proposition 3.2 $\mathcal{K}_{m,n}$ 上の準同型 s_i $(1 \leq i \leq n)$ を次で定めることができる.

$$
\kappa z \partial_z + s_i(L) = G_i(\kappa z \partial_z + L) G_i^{-1}. \tag{3.3}
$$

Proof. s_i $(1 \leq i \leq n)$ が行列関係式 (2.9) を保存することを示せばよい. 関係式 (3.3) から次を得る.

$$
s_i(L) = G_i L G_i^{-1} + G_i \kappa z \partial_z (G_i^{-1}). \tag{3.4}
$$

従って次を得る.

$$
s_i(F_j) = F_j + r_i F_{j+1}^{(-1)} - F_{j+1} r_i^{(j+1)} - r_i F_{j+2}^{(-1)} r_i^{(j+1)} \quad (0 \leq j \leq m-1). \tag{3.5}
$$

これらの関係式を用いれば次を得ることができる.

$$s_i\left(F_iF_j^{(l)}-F_j^{(l)}F_i\right)=hs_i\left(\delta_{l\equiv i}F_{i+j}-\delta_{l\equiv -j}F_{i+j}^{(-j)}\right). \tag{3.6}$$

よって s_i が (2.9) を保存することが示された. □

Theorem 3.3 *(1)* s_i *(*$1\leq i\leq n$*)* は $\mathcal{K}_{m,n}$ 上に $A_{n-1}^{(1)}$ 型アフィン *Weyl* 群の表現を構成する. すなわち次の関係式を満たす.

$$s_i^2=1,\quad (s_is_j)^3=1\ (j=i\pm 1),\quad s_is_j=s_js_i\ (j\neq i\pm 1), \tag{3.7}$$

ただし $n=2$ のときは $(s_is_{i\pm 1})^3=1$ はみたさない.

(2) $s,k\in\mathbb{N}$ に対して, s_i *(*$1\leq i\leq n$*)* は $\partial_{s,k}$ と可換である.

Proof. (3.5) を用いれば, (1) は直接計算できる.

(2) を証明するためには,

$$\partial_{s,k}+s_i(B_{s,k})=G_i\left(\partial_{s,k}+B_{s,k}\right)G_i^{-1} \tag{3.8}$$

を示せばよい. $B_{s,k}$ の定義から, (3.8) の左辺は次のようになる.

$$\partial_{s,k}+s_i(B_{s,k})=\partial_{s,k}+s_i(L)_{\geq ns}^k\cdot z^{-s}. \tag{3.9}$$

(3.4) から次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\partial_{s,k}+s_i(B_{s,k})&=\partial_{s,k}+\left(G_iLG_i^{-1}+G_i\kappa z\partial_z(G_i^{-1})\right)_{\geq ns}^k\cdot z^{-s}\\&=\partial_{s,k}+\left(G_iL^kG_i^{-1}\right)_{\geq ns}\cdot z^{-s}.\end{aligned}$$

このことを用いて (3.8) の右辺を次のように計算する.

$$\begin{aligned}G_i\left(\partial_{s,k}+B_{s,k}\right)G_i^{-1}=&\partial_{s,k}+G_i\partial_{s,k}(G_i^{-1})+G_iB_{s,k}G_i^{-1}\\=&\partial_{s,k}+\partial_{s,k}(-r_i)\Lambda^{-1}+(G_iL^kG_i^{-1})_{\geq ns}^k\cdot z^{-s}\\&+\left(r_i(L_{ns}^k)^{(-1)}-L_{ns}^kr_i-r_i(L_{ns+1}^k)^{(-1)}r_i\right)\Lambda^{-1}.\end{aligned}$$

Lax 方程式 あるいは (2.18) より次を得る.

$$\partial_{s,k}(F_1)=\sum_{p+q=1}\left(F_p(L_{ns+q}^k)^{(p)}-L_{ns+q}^kF_p^{(q)}\right)+\kappa\lambda_1L_{ns+1}^k. \tag{3.10}$$

従って $r_i=\alpha_iE_{i+1,i+1}(F_1^{(-1)})^{-1}$ であるから,

$$\partial_{s,k}(r_i)=r_i(L_{ns}^k)^{(-1)}-L_{ns}^kr_i-r_i(L_{ns+1}^k)^{(-1)}r_i \tag{3.11}$$

となるので上で計算したものとあわせて (3.8) を得る. □

4 Hamiltonians

$g(z) \in \mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ に対して g_i を z^i の係数とする.

Definition 4.1 *(Hamiltonians)* $s, k \in \mathbb{N}$ に対して, $H_{s,k} \in \mathcal{K}_{m,n}$ を次式で定める.

$$H_{s,k} = \frac{\mathrm{tr}\left(L^{k+1}\right)_s}{k+1}. \tag{4.1}$$

$m = 2$, $n = 3$, $s = 1$, $k = 2$ のとき

$$\begin{aligned} H_{1,2} &= \mathrm{tr}\left(\frac{L^3}{3}\right)_1 \\ &= \frac{1}{3}\left(f_{1,2}f_{2,3}f_{3,4} + f_{2,3}f_{3,4}f_{1,2} + f_{3,4}f_{1,2}f_{2,3}\right) \\ &+ \epsilon_1(f_{1,2} + f_{3,4}) + \epsilon_2(f_{2,3} + f_{1,2}) + \epsilon_3(f_{3,4} + f_{2,3}). \end{aligned}$$

$H_{1,2}$ は量子 $\mathrm{P_{IV}}$ のハミルトニアンである [3].

$r \in \mathbb{N}$ に対して, $\bar{r}$ $(0 \leq \bar{r} \leq m-1)$ を m で割ったあまりとする. 集合 $A_{m,n}$ を次で定める.

$$A_{m,n} = \left\{ (s,k) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} ns = mk \\ \text{or} \\ mk > ns > m(k-1), \quad \overline{ns} \geq \overline{n}, \overline{2n}, \ldots, \overline{n(s-1)} \end{array} \right\}. \tag{4.2}$$

Theorem 4.2 $(s,k), (s',k') \in A_{m,n}$ であればこのとき次が成立する.

$$\frac{1}{h}\left[H_{s,k}, L\right] = \left[L, B_{s,k}\right], \tag{4.3}$$

$$\left[H_{s,k}, H_{s',k'}\right] = 0. \tag{4.4}$$

この定理は少し長い計算によって証明することができる. ここではその計算は書かないが, 興味のある方は [4] を参照してほしい.

自然数の組 (s,k) が $A_{m,n}$ に含まれるという条件は具体例の計算を見る限りでは必要十分条件のようである. また対応する古典系では任意の (s,k) に対して上の定理 (に対応する命題で交換子はポワソン括弧となる) は成り立つ.

5 Formal Solution

$\mathcal{K}_{m,n}(0)$ を $\mathcal{K}_{m,n}$ のコピーであって生成元が ϵ_i, $f_{ij}(0)$ であるものとし $\mathcal{K}_{m,n}(0)((t))$ を形式的冪級数環から構成される体とする．次に $H_{s,k;0} = H_{s,k}(\epsilon_i, f_{ij}(0) + \delta_{i,n}\delta_{j,n+1}\kappa t)$ とおく．従って $H_{s,k;0}$ は ϵ_i, $f_{ij}(0)$, t の多項式となる．$f'_{ij} = f_{ij}(0) + \delta_{i,n}\delta_{j,n+1}\kappa t$ は定義関係式 (2.3) を満たしていることに注意．同様にして $L_0 = L(\epsilon_i, f_{ij}(0) + \delta_{i,n}\delta_{j,n+1}\kappa t)$, $B_{s,k;0} = B_{s,k}(\epsilon_i, f_{ij}(0) + \delta_{i,n}\delta_{j,n+1}\kappa t)$ とおく．

Definition 5.1 *$f_{i,i+j;s,k}(t)$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1, s,k \in \mathbb{N})$ を $F_{j;s,k}(t) = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} f_{i,i+j;s,k}(t)$ を通して定める．*

$$F_{j;s,k}(t) = e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)(F_j(0) + \delta_{j,1}\kappa E_{nn}t)\left(e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)\right)^{-1}, \tag{5.1}$$

ただし e_R は多項式 $g = g(t) \in \mathcal{K}_{m,n}(0)((t))$ に対して $\frac{d}{dt}(e_R(g)) = e_R(g)\frac{d}{dt}(g)$ をみたすものとし，$F_j(0) = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} f_{i,i+j}(0)$ とする．

次の Corollary は定理 4.2 より従う．

Corollary 5.2 *$s,k \in \mathbb{N}$ とし $ns = mk - 1$ を仮定する．このとき $f_{i,i+j;s,k}(t)$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1)$ は定理 2.2 で定義される Lax 方程式の初期値が $f_{i,i+j}(0)$ である解である，すなわち次が成り立つ．*

$$[f_{ij;s,k}(t), f_{pq;s,k}(t)] = h(\delta_{j\equiv p} f_{i,j+q-p;s,k}(t) - \delta_{q\equiv i} f_{p,j+q-i;s,k}(t)), \tag{5.2}$$

$$\frac{d(L_{s,k}(t))}{dt} = [L_{s,k}(t), B_{s,k}(t)] + \kappa z\partial_z(B_{s,k}(t)), \tag{5.3}$$

ただし $L_{s,k}(t) = \sum_{i=0}^{m} F_{i;s,k}(t)\Lambda^i$, $B_{s,k}(t) = ((L_{s,k}(t))^k)_{\geq ns} \cdot z^{-s}$.

Proof. $f_{ij;s,k}(t)$ の定義から定義関係式 (5.2) が成り立つのは明らか．$d/dt(L_{s,k}(t))$ を次のように計算する．

$$\begin{aligned}\frac{d(L_{s,k}(t))}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)L_0\left(e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)\right)^{-1}\right)\\ &= e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{k,0}dt\right)\frac{1}{h}[H_{s,k;0}, L_0]\left(e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)\right)^{-1} + E_{nn}\Lambda\\ &= e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)[L_0, B_{s,k;0}]\left(e_R\left(\frac{1}{h}\int H_{s,k;0}dt\right)\right)^{-1} + \kappa z\partial_z(B_{s,k}(t))\end{aligned}$$

$$= [L_{s,k}(t), B_{s,k}(t)] + \kappa z \partial_z \left(B_{s,k}(t)\right).$$

ゆえに Lax 方程式が成り立つ. □

$m=2$, $n=3$, $k=2$, $s=1$, $h=1$ の場合に形式解の例を与える. W を生成元が x, ∂_x である $\mathbb{C}$ 上の斜体とする, つまり W は Weyl 代数 $\mathbb{C}[\partial_x, x]$ の商体である.

$$f_{1,2}(0) = \partial_x, \quad f_{2,3}(0) = x, \quad f_{3,4}(0) = -x - \partial_x, \quad \epsilon_i \in \mathbb{C} \quad (i = 1,2,3).$$

このときこれらの関係式は次のようになる.

$$[\partial_x, x] = 1, [x, -x-\partial_x] = 1, [-x-\partial_x, \partial_x] = 1.$$

$H_{1,2;0}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} H_{1,2;0} = & \frac{1}{3}\left(\partial_x x(\kappa t - x - \partial_x) + x(\kappa t - x - \partial_x)\partial_x + (\kappa t - x - \partial_x)\partial_x x\right) \\ & + \epsilon_1(\kappa t - x) + \epsilon_2(x + \partial_x) + \epsilon_3(\kappa t - \partial_x). \end{aligned}$$

$W((t))$ の次の三つの元

$$\begin{aligned} f_{1,2}(t) &= e_R\left(\int H_{1,2;0}dt\right)\partial_x\left(e_R\left(\int H_{1,2;0}dt\right)\right)^{-1}, \\ f_{2,3}(t) &= e_R\left(\int H_{1,2;0}dt\right)x\left(e_R\left(\int H_{1,2;0}dt\right)\right)^{-1}, \\ f_{3,4}(t) &= e_R\left(\int H_{1,2;0}dt\right)(-x-\partial_x)\left(e_R\left(\int H_{1,2;0}dt\right)\right)^{-1} + \kappa t \end{aligned}$$

は次の量子 $\mathrm{P_{IV}}$ の解である.

$$\begin{aligned} & [f_{i,i+1}(t), f_{i+1,i+2}(t)] = 1, \\ & \frac{d(f_{i,i+1}(t))}{dt} = f_{i,i+1}(t)f_{i+1,i+2}(t) - f_{i+2,i+3}(t)f_{i,i+1}(t) + \alpha_i \quad (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

ただし $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \kappa$.

References

[1] Björk, J. E.: *Rings of Differential Operators*, North-Holland Publishing Company, 1979

[2] Hasegawa, K.: Deformig Kajiwara-Noumi-Yamada's realization of Weyl groups as rational transformations, preprint

[3] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type of $A_l^{(1)}$, Int. J. Math. **15** (2004), no. 10, 1007–1031

[4] Nagoya, H.: A Generalization of Lax Equations of Quantum Painlevé Systems of Type $A_{n-1}^{(1)}$, preprint

[5] Noumi, M. and Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483–503

[6] Okamoto, K.: Studies on the Painlevé equations, I: Ann. Math. Pura. Appl. (4) **146** (1987),337–381; II: Jap. J. Math. **13** (1987), no. 1, 47–76; III: Math. Ann. **275** (1986), no. 2, 221–255; IV: Funkcial. Ekvac. **30** (1987), no. 2-3, 305–332

[7] Painlevé, P.: Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Bull. Soc. Math. France **28** (1900), 201–261; Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, Acta Math. **25** (1902), 1–85