数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 89-100

α-行列式で生成される $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の表現*

松本 詔　(九州大学大学院数理学府)

Sho Matsumoto
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 序章

1.1

α を複素数とする. $n \times n$ 行列 $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ の α 行列式とは,

$$\det_\alpha(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}$$

で定義される量のことである. ここで $\nu(\sigma)$ は, 置換 σ のサイクル分解におけるサイクルの個数である. $\det_\alpha(X)$ は $\alpha = 1$ のときにパーマネントを与え, $\alpha = -1$ のときに通常の行列式を与え, さらに $\alpha = 0$ で X の対角成分の積を与える.

$$\det_1(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}, \quad \det_{-1}(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}, \quad \det_0(X) = x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}.$$

この行列式の拡張である α 行列式に対して, 今回はその表現論的な意味について考える. なお, 本文章の内容は九州大学の若山正人氏との共同研究である.

1.2

行列式はリー群 $SL_n(\mathbb{C})$ の不変式である. リー環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の言葉でそれを記述しよう. $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n})$ を $\{x_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}$ を変数とする多項式環とする. $U(\mathfrak{g})$ をリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の普遍包絡環とする. $U(\mathfrak{g})$ の $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n})$ 上の表現 ρ を次で定める.

$$(1.1) \qquad \rho(E_{ij}) f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \frac{\partial}{\partial x_{jk}} f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) \qquad (f \in \mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n})).$$

*研究集会「群の表現論と調和解析の広がり」, 京都大学数理解析研究所, 2005 年 7 月 25 日 ～ 28 日

ここで, $\{E_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$ は $\mathfrak{g}$ の標準基底である. この表現において, 行列式 $\det(X)$ は明らかに次を満たす.

$$\rho(E_{ii})\det(X)=\det(X), \qquad \rho(E_{ij})\det(X)=0\ (i\neq j). \tag{1.2}$$

特に, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の任意の元 U に対し, $\rho(U)\det(X)=0$ を満たす.

α 行列式で同様のことを考えてみよう. (1.2) の第一式は $\det(X)$ を $\det_\alpha(X)$ に置き換えても成り立つが, 第二式の方はそうはいかない. つまり, $\rho(E_{ij})\mathrm{det}_\alpha(X)$ $(i\neq j)$ は一般には零ではない. では表現を変えて, すなわち α に依存した表現 $\rho^{(\alpha)}$ があって $\rho^{(\alpha)}(E_{ij})\mathrm{det}_\alpha(X)=0$ という風にできるかというと, そのような表現の構成は難しそうである.

一方, (1.2) から次がいえる.

$$U(\mathfrak{gl}_n)\det(X)=\mathbb{C}\cdot\det(X). \tag{1.3}$$

すなわち, 行列式から生成される $U(\mathfrak{gl}_n)$ 巡回加群は, 一次元である. そこで,

$$V_n^{(\alpha)}=U(\mathfrak{gl}_n)\mathrm{det}_\alpha(X)$$

を考える. $\alpha=-1$ のときは (1.3) となるのだが, 一般の α では一次元表現とはならない. **ここではこの $V_n^{(\alpha)}$ の既約分解を各複素数 α に対して具体的に与えることを目標とする.**

1.3

以降の内容とは直接関係は無いが, α 行列式についてここで少し補足を入れておこう. α 行列式は, α パーマネントと呼ばれることもある ([V]). 3 次の α 行列式は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\mathrm{det}_\alpha((x_{ij})_{1\le i,j\le 3}) =&x_{11}x_{22}x_{33}+\alpha(x_{12}x_{21}x_{33}+x_{13}x_{22}x_{31}+x_{11}x_{23}x_{32})\\ &+\alpha^2(x_{12}x_{23}x_{31}+x_{13}x_{21}x_{32}).\end{aligned}$$

α 行列式に関して, 次が基本的な定理である.

定理 1.1 ([V, ST]). $\|\alpha zX\|<1$ を満たす複素数 α, z と $n\times n$ 複素行列 X に対して次が成り立つ.

$$\det(I-\alpha zX)^{-1/\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le n}\mathrm{det}_\alpha(X_{i_1\cdots i_k}). \tag{1.4}$$

ここで, $X_{i_1\cdots i_k}$ は $k\times k$ 行列 $(x_{i_pi_q})_{1\le p,q\le k}$. □

式 (1.4) において, $-1/\alpha$ が自然数のときは左辺は z に関して多項式なので, 右辺は有限和となり条件 $\|\alpha zX\|<1$ は不要である. 特に $\alpha=-1$ のときは, (1.4) は特性行列式の展開式

$$\det(I+zX)=\sum_{k=0}^{n}z^k\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\det(X_{i_1\cdots i_k})$$

に他ならない． $\alpha = 1$ のときは特性多項式の逆数の展開式であるが，この場合の (1.4) は MacMahon's Master Theorem と呼ばれ，定理 1.1 はその α 類似と位置づけることができる．また行列のサイズが 1 次の場合は定理 1.1 は一般二項定理に他ならない．[M] では α パフィアンが定義され，定理 1.1 のパフィアンへの拡張がなされている．

2 巡回加群 $V_n^{(\alpha)}$

2.1

式 (1.1) で定まる表現 ρ を考え，$V_n^{(\alpha)} = \rho(U(\mathfrak{gl}_n))\mathrm{det}_\alpha(X)$ とおく．以下 ρ を省略して記述する．$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．列 $(i_1, \ldots, i_n) \in [n]$ に対して，

$$D^{(\alpha)}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \mathrm{det}_\alpha \begin{pmatrix} x_{i_1 1} & x_{i_1 2} & \ldots & x_{i_1 n} \\ x_{i_2 1} & x_{i_2 2} & \ldots & x_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_n 1} & x_{i_n 2} & \ldots & x_{i_n n} \end{pmatrix}$$

とおく．特に，$\mathrm{det}_\alpha(X) = D^{(\alpha)}(1, 2, \ldots, n)$ である．次の補題が示すように，$\mathrm{det}_\alpha(X)$ への $U(\mathfrak{gl}_n)$ の作用はまた α 行列式の線型結合で書ける．

補題 2.1.

$$E_{pq} \cdot D^{(\alpha)}(i_1, \ldots, i_n) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i_k, q} D^{(\alpha)}(i_1, \ldots, i_{k-1}, p, i_{k+1}, \ldots, i_n).$$

証明．直接計算で示せる．

$$\begin{aligned} E_{pq} \cdot D^{(\alpha)}(i_1, \ldots, i_n) &= \sum_{j=1}^{n} x_{pj} \frac{\partial}{\partial x_{qj}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} x_{i_1 \sigma(1)} \cdots x_{i_n \sigma(n)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \sum_{k=1}^{n} x_{pj} \delta_{i_k, q} \delta_{\sigma(k), j} x_{i_1 \sigma(1)} \cdots \widehat{x_{i_k \sigma(k)}} \cdots x_{i_n \sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i_k, q} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} x_{p\sigma(k)} x_{i_1 \sigma(1)} \cdots \widehat{x_{i_k \sigma(k)}} \cdots x_{i_n \sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i_k, q} D^{(\alpha)}(i_1, \ldots, i_{k-1}, p, i_{k+1}, \ldots, i_n). \end{aligned}$$

ここで $\widehat{x_{kl}}$ は x_{kl} を除くことを意味する． □

このように E_{pq} の $D^{(\alpha)}(i_1, \ldots, i_n)$ への作用は，$i_1, \ldots, i_n$ の中に q に等しいものがあれば，それを（一つずつ）p に置き換えろ，という形になっている．

例 2.1.

$$\begin{aligned}E_{21}\cdot D^{(\alpha)}(4,1,2,1) =& D^{(\alpha)}(4,2,2,1)+D^{(\alpha)}(4,1,2,2),\\ E_{11}\cdot D^{(\alpha)}(4,1,2,1) =& 2D^{(\alpha)}(4,1,2,1),\\ E_{43}\cdot D^{(\alpha)}(4,1,2,1) =& 0. \quad \square\end{aligned}$$

次の補題は，すべての $D^{(\alpha)}(i_1,\dots,i_n)$ が $V_n^{(\alpha)}$ に含まれることを意味する．

補題 2.2. $V_n^{(\alpha)}$ は，$\{D^{(\alpha)}(i_1,\dots,i_n) \mid i_1,\dots,i_n\in[n]\}$ から生成されるベクトル空間に一致する． □

2.2

普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の n 階テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}=\mathbb{C}^n\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^n$ への作用は

$$E_{pq}\cdot(\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_n})=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{pq}\boldsymbol{e}_{i_k}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_n}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i_k,q}\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_p\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_n}$$

で定まる．ここで，$\{\boldsymbol{e}_k\}_{k=1}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底．補題 2.1 と補題 2.2 から次が言える．

命題 2.3. $\Phi_n^{(\alpha)}$ を以下で定まる $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ から $V_n^{(\alpha)}$ への線型写像とする．

$$\Phi_n^{(\alpha)}(\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_n})=D^{(\alpha)}(i_1,\dots,i_n),\qquad i_1,\dots,i_n\in[n].$$

このとき $\Phi_n^{(\alpha)}$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群準同型である．特に $V_n^{(\alpha)}$ は，商空間 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}/\mathrm{Ker}\,\Phi_n^{(\alpha)}$ と同型． □

$\alpha=0$ の場合，$\Phi_n^{(0)}(\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_n})=D^{(0)}(i_1,\dots,i_n)=x_{i_1 1}\cdots x_{i_n n}$ は明らかに全単射．したがって，$V_n^{(0)}\cong(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$．よって $\alpha=0$ の場合の既約分解を得る．

$$V_n^{(0)}\cong\bigoplus_{\lambda\vdash n}(E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}. \tag{2.1}$$

ただしここで，E^λ はウエイト $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ に対応する $U(\mathfrak{gl}_n)$ のシューア加群であり，f^λ は型が λ の標準ヤング盤の個数である．

2.3

ここでは，$V_n^{(\alpha)}$ の既約分解を与えるため，関数 $\mathfrak{S}_n\in\sigma\mapsto\alpha^{n-\nu(\sigma)}$ に関連したある公式を求める．n の分割 $\lambda\vdash n$ が与えられたとき，λ のヤング図形の箱全体から集合 $\{1,2,\dots,n\}$ への全単射を型 λ のナンバリングと呼ぶ．幾何的に，例えば，$\lambda=(3,3,1)$ のナンバリングの一つとして

$$T=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&7\\\hline 1&6&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}$$

のように表示する．ナンバリング T に対して，$R(T)$ でその行固定群とする．例えば，先の例で挙げた T に対しては，$R(T)$ は，$\{2,3,7\}$ に作用する対称群 $\mathfrak{S}_3$ と $\{1,4,6\}$ に作用する $\mathfrak{S}_3$ と $\{5\}$ に作用する（自明な）$\mathfrak{S}_1$ の直積群である．同様に，列に対して $C(T)$ も定義する．

分割 λ のフロベニウス座標 $(a_1,\dots,a_d|b_1,\dots,b_d)$ を思い出そう．ここで，$a_i=\lambda_i-i\geq 0, b_i=\lambda_i'-i\geq 0$ $(1\leq i\leq d)$ である．ただし，$\lambda'=(\lambda_1',\lambda_2',\dots)$ は λ の共役な分割，すなわち，λ' のヤング図形は λ の転置である．λ のコンテント多項式 $f_\lambda(\alpha)$ を次で定める ([Mac])．

$$f_\lambda(\alpha)=\prod_{i=1}^{d}\left\{\prod_{j=1}^{a_i}(1+j\alpha)\cdot\prod_{j=1}^{b_i}(1-j\alpha)\right\}=\prod_{i\geq 1}\prod_{j=1}^{\lambda_i}(1+(j-i)\alpha). \tag{2.2}$$

等式 $f_\lambda(\alpha)=f_{\lambda'}(-\alpha)$ が成り立つ．

命題 2.4. T を型が $\lambda\vdash n$ のナンバリングとする．このとき，

$$\begin{aligned}&\sum_{q\in C(T)}\mathrm{sgn}(q)\sum_{p\in R(T)}\alpha^{n-\nu(pq\sigma)} \\ &=\begin{cases}\mathrm{sgn}(q_0)f_\lambda(\alpha) & \text{ある } q_0\in C(T) \text{ と } p_0\in R(T) \text{ に対し } \sigma=q_0p_0 \text{ のとき,}\\ 0 & \text{その他.}\end{cases}\end{aligned} \tag{2.3}$$

証明．フロベニウスの指標公式を思い出そう．

$$p_\sigma=\sum_{\mu\vdash n}\chi^\mu(\sigma)s_\mu.$$

ここで，p_σ は $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ のサイクルタイプが $\rho=(\rho_1,\rho_2,\dots)$ のときに $p_\sigma=p_{\rho_1}p_{\rho_2}\cdots$, $p_k=x_1^k+x_2^k+\cdots$ で，s_μ はシューア関数，χ^μ は μ に対応した $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の指標である．対称関数の特殊化 $p_k\mapsto\alpha$ $(k\geq 1)$ を行うと，

$$\alpha^{\nu(\sigma)}=\sum_{\mu\vdash n}\chi^\mu(\sigma)\frac{f^\mu}{n!}\prod_{i\geq 1}\prod_{j=1}^{\mu_i}(\alpha+(j-i))$$

を得る ([Mac, I-7, Example 17])．よって

$$\alpha^{n-\nu(\sigma)}=\sum_{\mu\vdash n}\frac{f^\mu}{n!}f_\mu(\alpha)\chi^\mu(\sigma). \tag{2.4}$$

ナンバリング T に対して，c_T をヤング対称子とする．

$$c_T=\sum_{q\in C(T)}\mathrm{sgn}(q)\sum_{p\in R(T)}qp.$$

次はよく知られた公式である（例えば [FH]）．

$$\chi^\mu\cdot c_T=\delta_{\lambda,\mu}\frac{n!}{f^\mu}c_T,\qquad \mu\vdash n \tag{2.5}$$

ϕ_α を $\phi_\alpha = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)}\sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ と定める．(2.4) より

$$\phi_\alpha = \sum_{\mu\vdash n} \frac{f^\mu}{n!} f_\mu(\alpha)\chi^\mu$$

だから，(2.5) より

$$\phi_\alpha \cdot c_T = \sum_{\mu\vdash n} \frac{f^\mu}{n!} f_\mu(\alpha)\delta_{\lambda,\mu}\frac{n!}{f^\mu}c_T = f_\lambda(\alpha)c_T.$$

言い換えると，

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{q\in C(T)} \mathrm{sgn}(q) \sum_{p\in R(T)} \alpha^{n-\nu(pq\sigma)}\sigma = f_\lambda(\alpha)\sum_{q\in C(T)}\mathrm{sgn}(q)\sum_{p\in R(T)} qp.$$

これは命題の主張を表している． □

注意 2.1. 命題2.4の証明は，対称群の表現論に頼らなくとも，初等的な手法で証明できる（[MW] の version 1 参照）． □

例 2.2. $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ に対して

$$\sum_{q\in C(T)} \mathrm{sgn}(q) \sum_{p\in R(T)} \alpha^{3-\nu(pq\sigma)} = \begin{cases} (1+\alpha)(1-\alpha) & \sigma = (1) \text{ または } (12) \text{ のとき}, \\ -(1+\alpha)(1-\alpha) & \sigma = (13) \text{ または } (123) \text{ のとき}, \\ 0 & \sigma = (23) \text{ または } (132) \text{ のとき}. \end{cases}$$ □

例 2.3. 1行だけからなる標準ヤング盤 $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}$ に対しては命題2.4は

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} = \prod_{j=1}^{n-1}(1+j\alpha) \tag{2.6}$$

となる． □

2.4

$V_n^{(\alpha)}$ の基底（の候補）を構成しよう．列 $(i_1,\ldots,i_n)\in[n]^n$ とナンバリング T に対し，$V_n^{(\alpha)}$ の元 $v_T^{(\alpha)}$ を

$$v_T^{(\alpha)}(i_1,\ldots,i_n) = \sum_{q\in C(T)} \mathrm{sgn}(q)\sum_{p\in R(T)} D^{(\alpha)}(i_{qp(1)},\ldots,i_{qp(n)}) \tag{2.7}$$

と定める．次の命題は $v_T^{(\alpha)}$ が $v_T^{(0)}$ の定数倍であることを述べていて，命題2.4から得られる．

命題 2.5. $\lambda \vdash n$ とする．各 $(i_1, \ldots, i_n) \in [n]^n$ と型 λ のナンバリング T に対し，

$$v_T^{(\alpha)}(i_1, \ldots, i_n) = f_\lambda(\alpha) v_T^{(0)}(i_1, \ldots, i_n). \quad \square \tag{2.8}$$

例 2.4. 標準ヤング盤 $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ に対しては

$$\begin{aligned} v_T^{(\alpha)}(1,2,1) =& 2D^{(\alpha)}(1,2,1) - D^{(\alpha)}(2,1,1) - D^{(\alpha)}(1,1,2) \\ =& (1+\alpha)(1-\alpha)(2x_{11}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{13} - x_{11}x_{12}x_{23}). \quad \square \end{aligned}$$

例 2.5. 標準ヤング盤 $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$ に対して，

$$\begin{aligned} v_T^{(\alpha)}(1,2,2,4) =& D^{(\alpha)}(1,2,2,4) + D^{(\alpha)}(1,2,4,2) - 2D^{(\alpha)}(1,4,2,2) + D^{(\alpha)}(2,1,2,4) \\ &+ D^{(\alpha)}(2,1,4,2) - 2D^{(\alpha)}(2,2,1,4) - 2D^{(\alpha)}(2,2,4,1) + D^{(\alpha)}(2,4,1,2) \\ &+ D^{(\alpha)}(2,4,2,1) - 2D^{(\alpha)}(4,1,2,2) + D^{(\alpha)}(4,2,1,2) + D^{(\alpha)}(4,2,2,1) \\ =& (1+\alpha)(1-\alpha)(x_{11}x_{22}x_{23}x_{44} + x_{11}x_{22}x_{43}x_{24} - 2x_{11}x_{42}x_{23}x_{24} + x_{21}x_{12}x_{23}x_{44} \\ &+ x_{21}x_{12}x_{43}x_{24} - 2x_{21}x_{22}x_{13}x_{44} - 2x_{21}x_{22}x_{43}x_{14} + x_{21}x_{42}x_{13}x_{24} \\ &+ x_{21}x_{42}x_{23}x_{14} - 2x_{41}x_{12}x_{23}x_{24} + x_{41}x_{22}x_{13}x_{24} + x_{41}x_{22}x_{23}x_{14}). \quad \square \end{aligned}$$

同じ型の半標準ヤング盤 S と標準ヤング盤 T に対して，列 $\boldsymbol{i}^{(S,T)} = (i_1^{(S,T)}, \ldots, i_n^{(S,T)})$ を次のように定義する．各 $k \in [n]$ に対し，$(i^{(k)}, j^{(k)})$ で，T の中で番号 k の入った箱とする．S の対応する箱 $(i^{(k)}, j^{(k)})$ に書かれている番号を $i_k^{(S,T)}$ と定める．例えば，

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 \\ \cline{1-3} 4 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad と \qquad T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 9 \\ \cline{1-3} 7 & 8 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

に対しては $\boldsymbol{i}^{(S,T)} = (1,3,2,3,2,3,4,6,4)$．そして

$$v_{S,T}^{(\alpha)} = v_T^{(\alpha)}(\boldsymbol{i}^{(S,T)}) = v_T^{(\alpha)}(i_1^{(S,T)}, \ldots, i_n^{(S,T)})$$

とおく．この $v_{S,T}^{(\alpha)}$ たちが，$V_n^{(\alpha)}$ の "基底の候補" である．

例 2.6.

$$\begin{aligned} (S,T) &= \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right): & v_{S,T}^{(\alpha)} =& 2D^{(\alpha)}(1,2,1) - D^{(\alpha)}(2,1,1) - D^{(\alpha)}(1,1,2), \\ (S,T) &= \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right): & v_{S,T}^{(\alpha)} =& D^{(\alpha)}(1,3,2) - D^{(\alpha)}(3,1,2) + D^{(\alpha)}(2,3,1) - D^{(\alpha)}(2,1,3), \\ (S,T) &= \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right): & v_{S,T}^{(\alpha)} =& D^{(\alpha)}(1,2,3) - D^{(\alpha)}(2,1,3) + D^{(\alpha)}(3,2,1) - D^{(\alpha)}(3,1,2). \quad \square \end{aligned}$$

例 2.7. 1列のみからなるヤング盤

$$S = T = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

に対しては，$v^{(\alpha)}_{S,T}$ は行列式でかける．$v^{(\alpha)}_{S,T} = \sum_{q\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(q) D^{(\alpha)}(q(1),\dots,q(n)) = \prod_{j=1}^{n-1}(1 - j\alpha)\det(X)$. □

2.5

$V^{(\alpha)}_n$ の既約分解と基底を与えよう．ナンバリング T に対して，$W^{(\alpha)}_T$ を $v^{(\alpha)}_T(i_1,\dots,i_n)$ の形の元全体で生成されるベクトル空間とする．

定理 2.6. $V^{(\alpha)}_n$ の既約分解は以下のように与えられる．

$$V^{(\alpha)}_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n}\bigoplus_{T} W^{(\alpha)}_T.$$

ここで，T は型が λ の標準ヤング盤全体を走る．そして，

$$W^{(\alpha)}_T = \begin{cases} \{0\}, & \alpha \in \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{\lambda'_1 - 1}, -1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{\lambda_1 - 1}\}, \\ E^\lambda, & \text{その他の } \alpha. \end{cases}$$

$W^{(\alpha)}_T \neq \{0\}$ のとき，

$$\{v^{(\alpha)}_{S,T} = f_\lambda(\alpha) v^{(\alpha)}_{S,T} \mid S \text{ は } [n] \text{ の要素を成分にもつ，} T \text{ と同じ型の半標準ヤング盤}\}$$

はその基底をなす．さらに，S_{H} を第 r 行の成分がすべて r であるような半標準ヤング盤とし，S_{L} を第 r 列の成分が上から $n - \lambda'_r + 1, \dots, n-1, n$ であるような半標準ヤング盤とする．このとき，$v_{S_{\mathrm{H}},T}, v_{S_{\mathrm{L}},T}$ はそれぞれ $W^{(\alpha)}_T$ の最高ウエイトベクトルと最低ウエイトベクトルである． □

定理の主張は命題 2.5 と Weyl's construction からほぼ明らかである．$W^{(\alpha)}_T = \{0\}$ となる必要十分条件は，$f_\lambda(\alpha) = 0$ となるときである．また，既約分解だけもう少し分かりやすく述べると次のように書ける．

系 2.7. $k = 1, 2, \dots, n-1$ に対し，

$$V^{(\frac{1}{k})}_n \cong \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash n,\\ \lambda'_1 \le k}} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda} \qquad V^{(-\frac{1}{k})}_n \cong \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash n,\\ \lambda_1 \le k}} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}.$$

その他の $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{n-1}\}$ に対して，

$$V_n^{(\alpha)} \cong (\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}. \quad \square$$

例 2.8. $n=3$ のとき $V_n^{(\alpha)}$ の各 α における既約分解は，

$$V_3^{(\alpha)} \cong \begin{cases} E^{(3)} & \alpha = 1, \\ E^{(3)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)} & \alpha = \frac{1}{2}, \\ E^{(1,1,1)} & \alpha = -1, \\ E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(1,1,1)} & \alpha = -\frac{1}{2}, \\ E^{(3)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(1,1,1)} & \text{その他の } \alpha. \end{cases}$$

また $V_3^{(\frac{1}{2})} = E^{(3)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)}$ の基底として，次の組 (S,T) 対応した $v_{S,T}^{(\frac{1}{2})}$ 全体がとれる．

$$(S,T) = \left(\boxed{1|2|3}, \boxed{1|2|3}\right) \quad \text{または} \quad (S,T) \in \left\{ \begin{smallmatrix}1&1\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&1\\3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&3\\3\end{smallmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix} \right\}$$

特に，$\dim V_3^{(\frac{1}{2})} = 1 + 6 \times 2 = 13.$ $\square$

3 補足

最後に関連した幾つかの注意を与えておく．

3.1

行列式の 2 乗を，α 行列式から書くことができる．一般論から $\dim(E^\lambda \otimes (E^\lambda)^*)^{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})} = 1$ だから ([W])，定理 2.6 から次を得られる．

命題 3.1. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{k} \mid 1 \le k \le \frac{n-1}{2}\}$ と仮定する．このとき次を満たすような $\lambda \vdash n$ が存在する．$f_\lambda(\alpha) \neq 0$ であって，型 λ の任意の標準ヤング盤 T に対して，ある $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$-包絡作用素 $A^{(\alpha)} : (W_T^{(\alpha)})^* \to W_T^{(\alpha)}$ が存在して，$A^{(\alpha)}((v_{T,T}^{(\alpha)})^*) = v_{T,T}^{(\alpha)}$ かつ，(V 上の多項式環での式として)

$$\det(X)^2 = f_\lambda(\alpha)^{-2} \sum_S v_{S,T}^{(\alpha)} \cdot A^{(\alpha)}((v_{S,T}^{(\alpha)})^*). \tag{3.1}$$

ここで和は型 λ の半標準ヤング盤 S 全体を走り，$(v_{S,T}^{(\alpha)})^*$ は $(v_{S,T}^{(\alpha)})^*(v_{S',T}^{(\alpha)}) = \delta_{S,S'}$ で定まる．特に，n が偶数のときは $\lambda = (2^{\frac{n}{2}})$，奇数のときは $\lambda = (1^1 2^{\frac{n-1}{2}})$ とすれば，それは条件を満たす． $\square$

例 3.1. $T = \boxed{1}\boxed{2}$ とし，$\alpha \neq -1$ とする．加群 $W_T^{(\alpha)}$ は定理 2.6 より次からなる基底をもつ: $v_+ = v^{(\alpha)}_{\boxed{1}\boxed{1},\boxed{1}\boxed{2}} = 2D^{(\alpha)}(1,1)$, $v = v^{(\alpha)}_{\boxed{1}\boxed{2},\boxed{1}\boxed{2}} = D^{(\alpha)}(1,2) + D^{(\alpha)}(2,1)$, $v_- = v^{(\alpha)}_{\boxed{2}\boxed{2},\boxed{1}\boxed{2}} = 2D^{(\alpha)}(2,2)$. $(W_T^{(\alpha)})^*$ から $W_T^{(\alpha)}$ への線型写像 A:

$$A(v_+^*) = -\frac{1}{2}v_-, \quad A(v^*) = v, \quad A(v_-^*) = -\frac{1}{2}v_+$$

は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の包絡作用素である．よって

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^2 \det(X)^2 =& v_+ \cdot A(v_+^*) + v \cdot A(v^*) + v_- \cdot A(v_-^*) = v^2 - v_+ \cdot v_- \\ =& (D^{(\alpha)}(1,2) + D^{(\alpha)}(2,1))^2 - 4D^{(\alpha)}(1,1)D^{(\alpha)}(2,2). \quad \square\end{aligned}$$

3.2

各 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $V_n^{(\alpha)}$ の既約分解を得たが，$\alpha = \infty$ のときを考えてみよう．もちろん単に $\lim_{\alpha\to\infty} \det_\alpha(X)$ としても意味を成さないので，“正規化” しよう．$\det_\alpha(X)$ は α の多項式としてみると $n-1$ 次式であるから，

$$\det_\infty(X) := \lim_{|\alpha|\to\infty} \alpha^{1-n}\det_\alpha(X) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n \\ \nu_n(\sigma)=1}} x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

と定める．例えば，

$$\det_\infty \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23}.$$

そして $V_n^{(\infty)}$ を巡回加群 $U(\mathfrak{gl}_n)\det_\infty(X)$ で定める．すると

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{1-n} f_\lambda(\alpha) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ はフック}$$

であるから定理 2.6 より次を得る．

命題 3.2.

$$V_n^{(\infty)} \cong \bigoplus_{\lambda:\text{フック}} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda} = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(E^{(k,1^{n-k})}\right)^{\oplus\binom{n-1}{k-1}},$$

ここで λ は n の分割でフックなもの全体を走る． $\square$

例 3.2.

$$V_5^{(\infty)} \cong E^{(5)} \oplus \left(E^{(4,1)}\right)^{\oplus 4} \oplus \left(E^{(3,1,1)}\right)^{\oplus 6} \oplus \left(E^{(2,1,1,1)}\right)^{\oplus 4} \oplus E^{(1,1,1,1,1)}. \quad \square$$

3.3

イマナントは，n の分割 λ に対して

$$\mathrm{Imm}_\lambda(X) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$$

で定義される．このイマナントから生成される巡回加群についての既約分解は

$$U(\mathfrak{gl}_n)\mathrm{Imm}_\lambda(X) \cong (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}$$

となる．一般に類関数 $f:\mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}$ が与えられたとき，$d_f(X) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$ とおく．f を指標で分解したときに $f = \sum_{\lambda\vdash n} c_\lambda(f)\chi^\lambda$ となるとすると，

$$U(\mathfrak{gl}_n) d_f(X) \cong \bigoplus_{\lambda\vdash n: c_\lambda(f)\neq 0} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}$$

となる．系 2.7 はこの $f(\sigma) = \alpha^{n-\nu(\sigma)}$ としたときの場合である．

3.4

任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して $V_n^{(\alpha)} \subset V_n^{(0)}$ が成り立つ．対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $V_n^{(0)}$ へ

$$x_{i_1 1}x_{i_2 2}\cdots x_{i_n n}\cdot\sigma = x_{i_{\sigma(1)}1}x_{i_{\sigma(2)}2}\cdots x_{i_{\sigma(n)}n}, \qquad \sigma\in\mathfrak{S}_n$$

で作用する．この作用は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の作用と可換である．$V_n^{(\alpha)}$ はこの作用で閉じているため $U(\mathfrak{gl}_n)\times\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の表現空間と思える．その既約分解は

$$V_n^{(\alpha)} = U(\mathfrak{gl}_n)\mathrm{det}_\alpha(X)\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cong \bigoplus_{\lambda\vdash n: f_\lambda(\alpha)\neq 0} E^\lambda \boxtimes S^\lambda$$

となる．ここで S^λ は λ に対応した $\mathfrak{S}_n$ の既約表現（Specht 加群）である．

$U(\mathfrak{gl}_n)$ の作用 (1.1) は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の左からの作用である．同様に右からの作用を $\rho_{\mathrm{R}}(E_{pq}) = \sum_{k=1}^n x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}$ で定める．これにより $U(\mathfrak{gl}_n)$ の両側からの作用における巡回加群 $U(\mathfrak{gl}_n)\mathrm{det}_\alpha(X)U(\mathfrak{gl}_n)$ を考えると，その既約分解は

$$U(\mathfrak{gl}_n)\mathrm{det}_\alpha(X)U(\mathfrak{gl}_n) \cong \bigoplus_{\lambda\vdash n: f_\lambda(\alpha)\neq 0} E^\lambda \boxtimes E^\lambda$$

となる．

参考文献

[F] W. Fulton, "Young Tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry", London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press, 1997.

[FH] W. Fulton and J. Harris, Representation theory, A first course, Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[KW] K. Kimoto and M. Wakayama, Quantum α-determinant cyclic modules of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$, in preparation.

[Mac] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd Edition, Oxford, 1995.

[M] S. Matsumoto, Alpha-pfaffian, pfaffian point process and shifted Schur measure, Linear Algebra Appl. **403** (2005), 369–398.

[MW] S. Matsumoto and M. Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules of $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, math.RT/0508523.

[ST] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[V] D. Vere-Jones, A generalization of permanents and determinants, Linear Algebra Appl. **111** (1988), 119–124.

[W] H. Weyl, The Classical Groups. Their invariants and representations, 2nd Edition, Princeton University Press, Princeton, 1946.