数理解析研究所講究録 1469 巻 2006 年 27-34

ACA_0 のモデルの特徴付けと超準解析

東北大学大学院理学研究科数学専攻 横山 啓太 (Keita YOKOYAMA)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 序

2階算術の体系 Z_2 やその部分体系についてのモデルの研究はフリードマン，シンプソン，ハーリントン，田中らによって行われ，これにより2階算術の各部分体系間の consevativity や consistensy strength 等について数多くの結果が知られている（[1, 3] に多くの結果が紹介されている）．これらの応用の一つとして WKL_0 の超準モデルの特徴を用いて WKL_0 において超準解析の一部が展開できることが田中によって示されている [5]．ここでは ACA_0 のモデルを特徴づけることにより ACA_0 において WKL_0 より多様な超準解析の手法が展開できることを示す．また，2階算術のモデルの性質は1階算術のモデルの性質と表裏一体であり，これらのモデルの特徴付けにより PA の超準モデルの始切片の多様性がわかる．

2 モデルの特徴付け

2階算術は自然数と自然数の集合を対象とした理論で2元の一階論理を用いて記述される．[1] 2階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ は次からなる．

- 数変数:$x, y, z, \ldots$
- 集合変数:$X, Y, Z, \ldots$
- 定数記号:$0, 1$
- 関数記号:$+, \cdot$
- 関係記号:$<, =, \in$

[1] 従って「2階算術」ではなく「2元算術」と呼ぶのが妥当かもしれないが，ここでは慣習に従い2階算術という言葉を使う．

$\mathcal{L}_2$ から集合変数と関係記号 $\in$ を除いた物が 1 階算術の言語である．これを $\mathcal{L}$ とする．

定義 1 $\mathcal{L}_2$ 構造は次の 7 つ組からなる．

$$(M, S, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M).$$

ここで M は数変数の領域であり $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ は集合変数の領域である．また $=$ は M 上で解釈され，$\in$ は $M \times S$ 上で解釈される．この時 $(M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$ は $\mathcal{L}$ 構造になっている．$\mathcal{L}_2$ 構造は通常単に (M, S) などと書く．

論理式のうち，現れる量化記号が全て有界量化記号（$\forall n \leq t$ や $\exists n \leq t$ という形）である論理式を Σ^0_0 論理式という．さらに θ を Σ^0_0 論理式とするとき，$\exists x_1 \forall x_2 \ldots x_n \theta$ の形の論理式を Σ^0_n 論理式，$\forall x_1 \exists x_2 \ldots x_n \theta$ の形の論理式を Π^0_n 論理式という．また，集合量化記号を含まない論理式を算術的（Σ^1_0）論理式という．

以下で扱う 2 階算術の部分体系は次の 3 つである．

定義 2 (1) 体系 RCA_0 は次の公理からなる．

(a) 順序半環の公理

(b) Σ^0_1-帰納法

(c) 次の再帰的内包公理 $\Delta^0_1 - \mathrm{CA}$

$$\Delta^0_1 - \mathrm{CA} : \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x)).$$

ここで $\varphi(x)$ は Σ^0_1 論理式，$\psi(x)$ は Π^0_1 論理式で X を自由変数に持たないものとする．

(2) 体系 WKL_0 は RCA_0 に次の弱ケーニッヒ補題 WKL を付け加えた体系である．

$$\mathrm{WKL} : \forall X \ (X \text{ is an infinite tree}) \to (X \text{ has an infinite path}).$$

(3) 体系 ACA_0 は RCA_0 に次の算術的内包公理 $\Sigma^1_0 - \mathrm{CA}$ を付け加えた体系である．

$$\Sigma^1_0 - \mathrm{CA} : \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x)).$$

ここで $\varphi(x)$ は算術的論理式で X を自由変数に持たないものとする．

2 階算術のその他の部分体系については [1, 3] を参照．

以下で１階算術の視点から２階算術のモデルを特徴づけることを考える．その上で重要になるのが standard system の概念である．ここでは算術の超準モデルの standard system を $\mathbb{N}$ だけではなく一般の始切片の上で考える．$M \models \mathsf{I}\Sigma_1$ とし，$I \subseteq M$ を cut とする．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{code}(a) &= \{x \in M \mid p_x | a\} \\ \mathrm{Code}(M) &= \{\mathrm{code}(a) \mid a \in M\} \\ \mathrm{SS}_I(M) &= \{A \cap I \mid A \in \mathrm{Code}(M)\} \end{aligned}$$

と定める．ここで p_x は「M における x 番目の素数」である．

WKL_0 のモデルの性質としては次の２つの定理が特徴的である．

定理 3 ([1] 補題 3.27) $M \models \mathsf{I}\Sigma_1$ とし，$I \subseteq M$ を semi-regular cut とする．このとき，

$$(I, \mathrm{SS}_I(M)) \models \mathsf{WKL}_0.$$

定理 4 (WKL_0 の埋め込み定理 [6]) (M, S) を WKL_0 の可算超準モデルとする．このとき，M の始切片 I で $(I, S|_I)$ が (M, S) と同型となるものが存在する．ここで $S|_I = \{X \cap I \mid X \in S\}$ である．

この２つの定理から（始切片上の） standard system を用いて WKL_0 のモデルは次のように特徴づけられる．

定理 5 (M, S)を RCA_0 の可算超準モデルとする．このとき次は同値である．

(1) $(M, S) \models \mathsf{WKL}_0$.
(2) M の終拡大 M' で $\mathrm{SS}_M(M') = S$ となるものが存在する．

さらに (2) の M' としては特に M と同型な物を取ることができる．

同様の特徴付けを ACA_0 について考える．今 M を PA のモデルとし，S_0 を M の definable subset 全体とする．この時 (M, S_0) は ACA_0 のモデルとなることが知られている．今 M の初等的終拡大 M' を考えると $S_0 \subseteq \mathrm{SS}_M(M')$ となることが容易にわかる．さらに $S_0 = \mathrm{SS}_M(M')$ となるためには，M' における definable subset が S_0 と比較し

て増えていなければ良い，と考えられる．実はその様な終拡大が存在することが知られている．

定理 6 (Gaifman の定理 [2] Theorem 8.8) PA のモデルは保存的拡大を持つ．すなわち，$M \models \mathsf{PA}$ とするとき，M の真の初等拡大 M' で次を満たす物が存在する．

任意の $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(x, \vec{y})$ と $\vec{d} \in M'$ に対して，

$$\{a \in M' \mid M' \models \varphi(a, \vec{d})\} \cap M = \{a \in M \mid M \models \psi(a, \vec{c})\}$$

を満たす $\mathcal{L}$ 論理式 $\psi(x, \vec{z})$ と $\vec{c} \in M$ が存在する．

この定理を用いて構成される M' はまさに $S_0 = \mathrm{SS}_M(M')$ を満たす物である．これを一般化して次の定理を得る．

定理 7 (M, S)を RCA_0 の可算モデルとする．今 S の各元を M 上の一変数述語と見て、M を $\mathcal{L} \cup S$ 構造とみなすことができる．このとき次は同値である．

(1) $(M, S) \models \mathsf{ACA}_0$.

(2) M の（$\mathcal{L} \cup S$ 構造としての）初等的終拡大 $^*M$ で $\mathrm{SS}_M(^*M) = S$ となるものが存在する．

証明 (2)⇒(1) を示す． $(M, \mathrm{SS}_M(^*M))$ が算術的内包公理を満たすことを示せばよい．$\varphi(x)$ を (M, S) の元をパラメータとして持つ算術的な $\mathcal{L}_2$ 論理式とする．このとき $\varphi(x)$ は M の元をパラメータとして持つ $\mathcal{L} \cup S$ 論理式とみなすことができる． $\omega \in {}^*M \setminus M$ を取る．すると $^*M$ は Σ^0_1 帰納法を満たすことから

$$\forall x \varphi(x) \land x < \omega \leftrightarrow p_x | \alpha$$

を満たすような $\alpha \in {}^*M$ が存在する．この時 $A = \mathrm{code}(\alpha) \cap M$ とおくと $(M, \mathrm{SS}_M(^*M)) \models \forall x \varphi(x) \leftrightarrow x \in A$ である．

(1)⇒(2) を示すためには，次の Gaifman の定理の拡張が本質的である．

補題 8 S を 1 変数述語記号の可算集合とする．$\mathcal{L} \cup S$ 構造 M が $M \models \mathsf{PA}^-$ かつ $\mathcal{L} \cup S$ 論理式についての帰納法を満たすとき， M の真の初等拡大 $^*M$ で次を満たす物が存在する．

任意の $\mathcal{L}\cup S$ 論理式 $\varphi(x,\vec{y})$ と $\vec{d}\in {}^*M$ に対して,

$$\{a\in {}^*M \mid {}^*M\models\varphi(a,\vec{d})\}\cap M=\{a\in M\mid M\models\psi(a,\vec{c})\}$$

を満たす $\mathcal{L}$ 論理式 $\psi(x,\vec{z})$ と $\vec{c}\in M$ が存在する.

この補題は元の Gaifman の定理の証明にならって簡単に示される.

(M,S) を ACA_0 の可算モデルとする. M を $\mathcal{L}\cup S$ 構造と見ると, 明らかに $M\models\mathsf{PA}^-$ かつ帰納法を満たす. 補題により ${}^*M$ を取る. ${}^*M$ は M の初等的終拡大であるので, あとは $\mathrm{SS}_M({}^*M)=S$ を示せばよい.

$A\in S$ とする. $\omega\in {}^*M\setminus M$ を取る. すると ${}^*M$ は Σ^0_1 帰納法を満たすことから

$$\forall x A(x)\wedge x<\omega\leftrightarrow p_x|\alpha$$

を満たす $\alpha\in {}^*M$ が存在する. このとき, 任意の $a\in M$ について ${}^*M\models a\in\mathrm{code}(\alpha)\Leftrightarrow {}^*M\models A(a)\Leftrightarrow M\models A(a)$ であるので $\mathrm{code}(\alpha)\cap M=A$, よって $a\in\mathrm{SS}_M({}^*M)$ である.

$A\in\mathrm{SS}_M({}^*M)$ とする. このとき, ある $\alpha\in {}^*M$ が存在して $A=\{\beta\in {}^*M\mid p_\beta|\alpha\}\cap M$ となる. よってある $\mathcal{L}\cup S$ 論理式 $\psi(x,\vec{z})$ と $\vec{c}\in M$ が存在して,

$$A=\{a\in M\mid M\models\psi(a,\vec{c})\}$$

となる. 一方, (M,S) における算術的内包公理により, $M\models\psi(a,\vec{c})\leftrightarrow B(a)$ となる $B\in S$ が存在する. このとき明らかに $A=B\in S$ である.

以上により $\mathrm{SS}_M({}^*M)=S$ が示された. □

3 超準解析の2階算術への応用

WKL_0 において最大値原理やハール測度の存在証明などが超準解析的な手法を用いて行えることが知られている [4, 5]. この手法で中心的な役割を果たすのが次のような「超準モデルの超準モデル」の構成である. 任意の WKL_0 の可算超準モデル (M,S) に対して, 次を満たすような WKL_0 のモデル $({}^*M,{}^*S)$ と写像 $*:(M,S)\to({}^*M,{}^*S)$ が存在する.

(1) ${}^*M$ は M の真の終拡大.

(2) $S = \{X \cap M \mid X \in {}^*S\}$.

(3) 写像 $* : (M, S) \longrightarrow ({}^*M, {}^*S)$ は Σ^0_0 保存的.

WKL_0 のモデルを特徴づける定理 5 を用いるとこのような $({}^*M, {}^*S)$ および $*$ は容易に得られる．ここで (1) は「超準元が存在する」こと，(2) は「標準部分を取る」という操作が可能であるという性質，そして (3) は Σ^0_0 論理式について移行原理が成り立つことに対応している．しかし，多くの超準解析的な証明を行う上で Σ^0_0 論理式について移行原理は弱すぎるため，WKL_0 においては満足に超準解析的な手法を展開することができない．そこで ACA_0 のモデルを特徴づける定理 7 を用いて ACA_0 においてより多くの超準解析の証明を展開することを考える．

(M, S) を ACA_0 の可算モデルとする．定理 7 を用いて (M, S) を特徴づける終拡大 ${}^*M$ を取る．ここで ${}^*S$ を $\mathcal{L} \cup S$ 論理式で定義される ${}^*M$ の部分集合全体とすると $({}^*M, {}^*S)$ は ACA_0 のモデルとなる．さらに $A \in S$ に対して ${}^*A = \{a \in {}^*M | {}^*M \models A(a)\} \in {}^*S$ とおく．写像 $* : (M, S) \longrightarrow ({}^*M, {}^*S)$ を $a \in M$ に対して $*(a) = a$，$X \in S$ に対して $*(X) = {}^*X$ で定めると次の性質を満たすことが容易にわかる．

(1) ${}^*M$ は M の真の終拡大.

(2) $S = \{X \cap M \mid X \in {}^*S\}$.

(3) 写像 $* : (M, S) \longrightarrow ({}^*M, {}^*S)$ は Σ^1_0 保存的.

WKL_0 の場合とは異なり算術的な論理式に対して常に移行原理を用いることができるため，ACA_0 においてはより幅広く超準解析が展開できる．

以下では ACA_0 で行われる超準解析的手法の一例として次の定理を示す．

定理 9 $\mathsf{ACA}_0 \vdash$ 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数列は集積点を持つ．

ここで実数は $q_n = i/2^n$ の形で表されている有理数のコーシー列 $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ として定義する．

証明 $V = (M, S)$ を ACA_0 の可算モデルとし，${}^*V = ({}^*M, {}^*S)$ を (1),(2),(3) を満たす拡大とする．$A = \{\alpha_n\}_{n \in M} \in S$ を $[0, 1]$ 上の実数列とする．すると，(3) の移行原理により ${}^*A \in {}^*S$ は ${}^*V$ における $[0, 1]$ 上の実数列 ${}^*A = \{{}^*\alpha_n\}_{n \in {}^*M}$ である．

(1) により超準元 $\omega \in {}^*M \setminus M$ を取る．ここで (2) により V における実数 $\gamma = {}^*\alpha_\omega \cap M$ が取れる．このとき，${}^*\gamma \cap M = {}^*\alpha_\omega \cap M$ となる．よって

$$\forall n, m \in M \ {}^*V \models \exists y > m \, |{}^*\alpha_y - {}^*\gamma| < 2^{-n}$$

(y として ω を取ればよい) となる．さらに (3) の移行原理を用いて

$$\forall n, m \in M \ V \models \exists y > m \ |\alpha_y - \gamma| < 2^{-n}$$

すなわち

$$V \models \forall n \ \forall m \ \exists y > m \ |\alpha_y - \gamma| < 2^{-n}$$

が得られる．これは V において $A = \{\alpha_n\}_{n \in M}$ が集積点を持つことを示している．

以上より，任意の ACA_0 の可算モデルにおいて「閉区間 $[0,1]$ 上の実数列は集積点を持つ」ことがわかったので，ゲーデルの完全性定理により定理が示される．□

Ascoli-Arzelá の定理なども全く同様にして ACA_0 において証明されることがわかる [7].

4 PA の超準モデルへの応用

2 階算術のモデルを 1 階算術のモデルの終拡大を用いて特徴づけたことにより 1 階算術のモデルについてもいくつかのことがわかる．M を PA の超準モデルとする．このとき $(M, S) \models \mathsf{WKL}_0$ となるような可算集合 $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ を取ると，定理 5 から $(I, \mathrm{SS}_I(M))$ が (M, S) と同型となるような M の始切片 I が存在する．S の取り方が $2^{\aleph_0}$ 通りあることから，次が得られる．

定理 10 M を PA の超準モデルとする．このとき M の始切片で M と同型ではあるが埋め込まれ型の異なる (M 自身の自己同型により一致することのない) ものが $2^{\aleph_0}$ 個存在する．

同様のことを定理 7 を用いて考えると次が得られる．

定理 11 M を PA の超準モデルとする．$\mathrm{Th}(M) \neq \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ であれば，M の始切片で M と初等的同値ではあるが同型ではないものが $2^{\aleph_0}$ 個存在する．

証明 K を M の $\emptyset$-definable element 全体とし，$I_0 = \{a \in M | \exists b \in K\ a < b\}$ とおく．このとき $\mathrm{Th}(I_0) = \mathrm{Th}(M)$ かつ $\mathrm{SS}_{\mathbb{N}}(I_0) = \mathrm{SS}_{\mathbb{N}}(M)$ である．今 $(I_0, S) \models \mathsf{ACA}_0$ となるような可算集合 $S \subseteq \mathcal{P}(I_0)$ を取ると，定理 7 から I_0 の初等的終拡大 I_S で $\mathrm{SS}_{I_0}(I_S) = S$ となるものが存在する．このとき $\mathrm{Th}(I_S) = \mathrm{Th}(M)$ かつ $\mathrm{SS}_{\mathbb{N}}(I_S) = \mathrm{SS}_{\mathbb{N}}(M)$ となるので [2, Theorem 12.3] を用いると I_S は M に始切片として埋め込める．明らかに $S \neq S'$ であれば $I_S \ncong I_{S'}$ であり，S の取り方が $2^{\aleph_0}$ 通りあることから定理の主張が得られた．

□

謝辞

この研究を進めるにあたり指導教官の田中一之先生，山崎武先生には様々な助言を頂きました．この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[1] 田中一之. **逆数学と２階算術**. 河合文化教育研究所, 1997.

[2] R. Kaye. *Models of Peano Arithmetic*. Oxford University Press, 1991.

[3] Stephen G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Springer-Verlag, 1999.

[4] K. Tanaka and T. Yamazaki. A non-standard construction of Haar measure and weak König's lemma. *J. Symbolic Logic*, 65(1):173–186, 2000.

[5] Kazuyuki Tanaka. Non-standard analysis in WKL_0. *Math. Logic Quart.*, 43(3):396–400, 1997.

[6] Kazuyuki Tanaka. The self-embedding theorem of WKL_0 and a non-standard method. *Annals of Pure and Applied Logic*, 84:41–49, 1997.

[7] Keita Yokoyama. Non-standard arguments over ACA_0. preprint.