数理解析研究所講究録 1469 巻 2006 年 35-45

PAのモデルの中で定義可能な非標準モデル

聖徳大学人文学部 池田一磨 (KAZUMA IKEDA)
筑波大学数理物質科学研究科 坪井明人 (AKITO TSUBOI)

概要

本稿では，$M \models \mathrm{PA}$ のモデルで定義される $N \models \mathrm{PA}$ の性質を研究する．第2節では，Tennenbaum の定理の一般化として，N を M で $\Delta_1(M)$-定義可能なモデルとするとき，$N \cong M$ となることを示す．第3節では，パラメータ無しに定義されるモデルについて研究する．特に，N が M でパラメータ無しで定義されるモデルで，$N \cong M$ かつ $M \succ \omega$ となるとき，$N \cong M$ であることを示す．第4節では，パラメータを用いて定義されるモデルについて研究する．ここでは，$N \equiv M$ かつ $N \not\cong M$ となるモデル M と M で定義される N が存在することを示す．また，$N \equiv M$，$N \cong M$ かつ N と M が definably isomorphic ではないモデル M と M で定義可能なモデル N が存在することを示す．

1　準備

定義 1 $\mathscr{L}$ を言語，M を $\mathscr{L}$-構造，A を M の部分集合とする．M^n の部分集合 D は，$D=\psi(\bar{x},\bar{a})^M (=\{\bar{b}\in M^n : M\models\psi(\bar{b},\bar{a})\})$ となる $\mathscr{L}$-論理式 $\psi(\bar{x},\bar{y})$ とパラメータ $\bar{a}\in A$ が存在するとき，M で **A-定義可能**であるという．また，元 $b\in M$ は，集合 $\{b\}$ が M で A-定義可能であるとき，M で **A-定義可能**であるという．A-定義可能な元全体からなる集合を，M における A の **definable closure** といい，$\mathrm{dcl}_M(A)$ で表す．M 上の関数 f は，そのグラフ $\{(\bar{a},b) : f(\bar{a})=b\}$ が M で A-定義可能であるとき，M で **A-定義可能**であるという．A を強調する必要が無いとき，A を省略する．

定義 2 M と N をペアノ算術 PA のモデルとする．$N=(D,0^N,1^N,+^N,\cdot^N,<^N)$ となる A-定義可能な $D\subset M$，A-定義可能な $0^N,1^N\in D$，A-定義可能な関数 $+^N,\cdot^N$ および A-定義可能な $<^N\subset M^2$ が存在するとき，N は M で **A-定義可能**であるという．

以後，$\mathscr{L}_A$ で PA の言語を表し，$M,N,\ldots$ で PA のモデルを表す．また，M の標準部分を ω で表す．特に断らない限り，N は M の中で定義されたモデルとする．

定義 3　1. B を M^n の部分集合とする．M の任意の end extension M^* と任意の元 $\bar{a}\in M^n$ に対して，

$$\bar{a}\in B \Leftrightarrow M^*\models\varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow M^*\models\psi(\bar{a})$$

となる Σ_1-論理式 $\varphi(\bar{x})$ と Π_1-論理式 $\psi(\bar{x})$(ただし，M のパラメータを含んでも良い) が存在するとき，B は **Δ_1(M)-定義可能**であるという．

2. $f : M^n \to M$ を定義可能な関数とする．M の任意の end extension M^* に対して，

   (a) 任意の $\bar{a} \in M$ に対して，$M^* \models \exists! y \varphi(\bar{a}, y)$；

   (b) 任意の $\bar{a}, b \in M$ に対して，$f(\bar{a}) = b$ iff $M^* \models \varphi(\bar{a}, b)$；

   となる Σ_1-論理式 $\varphi(\bar{x}, y)$(ただし，M のパラメータを含んでも良い) が存在するとき，f は **$\boldsymbol{\Delta_1}$(M) -定義可能**であるという．

注意 4 上の概念に関して次の事実が簡単に分かる．

1. f が $\Delta_1(M)$-定義可能ならば，f はまた上の (a)，(b) を満たす Π_1-論理式によっても定義される．

2. ω 上の帰納的関数は $\Delta_1(\omega)$-定義可能である．

3. M を PA のモデルとする．このとき，PA の provably recursive function は $\Delta_1(M)$-定義可能である．

4. $\Delta_1(M)$-定義可能な関数は，代入に関して閉じている．

定義 5 M と N を PA のモデルとする．$N = (D, 0^N, 1^N, +^N, \cdot^N, <^N)$ となる $\Delta_1(M)$-定義可能な $D \subset M$, $\Delta_1(M)$-定義可能な $0^N, 1^N \in D$, $\Delta_1(M)$-定義可能な関数 $+^N, \cdot^N$ および $\Delta_1(M)$-定義可能な $<^N \subset M^2$ が存在するとき，N は M で **$\boldsymbol{\Delta_1}$(M)-定義可能**であるという．

記法 6 1. $\mathrm{p}(x) = y$ は，x に対して x 番目の素数 y を対応させる原始帰納的関数を定義する $\mathscr{L}_A$-論理式を表す．

2. $x \in y$ は，標準的な意味以外に，$\mathrm{p}(x)$ が y を割り切るということを表現する $\mathscr{L}_A$-論理式を表す．

3. $(z)_x = y$ は，x と z に対して，$\mathrm{p}(x)^y \in z$ となるような最大の y を対応させる原始帰納的関数を定義する $\mathscr{L}_A$-論理式を表す．

4. 任意の論理式 φ に対して，$\ulcorner \varphi \urcorner$ は φ の Gödel 数の numeral を示すために使う．また，$\ulcorner \delta(\dot{x}) \urcorner = y$ によって，n に $\ulcorner \delta(n) \urcorner$ を対応させる原始帰納的関数を表現を表す．(cf. [1, 4])

5. N を M で定義可能なモデル，φ を閉論理式とする．このとき，“$N \models \varphi$” は，φ が N で成り立つ，ということを表現する $\mathscr{L}_A$-閉論理式 (ただし，M のパラメータは含んでも良い) を表す．

6. I が M の initial segment であることを $I \subseteq_e M$ によって表す．(cf. [2])

定義 7 (cf. [2, 6]) $M \models \mathrm{PA}$, $I \subseteq_e M$, $S \subset I$とする．ある$a \in M$に対して$S = \{n \in I : M \models n \in a\}$となるとき，$S$は$M$における$I$の**コードされた部分集合**という．

$I = \omega$のとき，SはMにおける**コードされた部分集合**という．Mにおけるコードされた部分集合全体からなる集合を$SSy(M)$で表す．

補題 8 $M \models \mathrm{PA}$, $I \subsetneq_e M$, $I \subset K \subset M$とする．また，$D = \{n \in K : M \models \varphi(n)\}$とする．ここで，$\varphi(x)$は$\mathscr{L}_A(M)$-論理式である．このとき，$D \cap I$は$M$における$I$のコードされた部分集合である．

証明. aについての帰納法により，$M \models \exists y \forall x < a(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$が証明できる．$I \subsetneq_e M$であるから，$I <^M a$となる$a \in M$が存在する．したがって，ある$d \in M$が存在して，任意の$b \in I$に対して，$M \models \varphi(b) \Leftrightarrow M \models b \in d$となる．よって，$D \cap I = \{n \in I : M \models b \in d\}$となる． □

補題 9 AをMの部分集合，NをMでA-定義可能な集合とする．このとき，MでA-定義可能な埋め込み写像$f : M \to N$が唯一つ存在する．また，$f(M) \subseteq_e N$である．この関数fをMからNへの**標準埋め込み写像**と呼ぶ．

証明. 関数$f : M \to N$を$f(0^M) = 0^N$, $f(n +^M 1^M) = f(n) +^N 1^N$によって定義する．明らかに$f$は$\mathrm{dom} f = M$となる，$M$で$A$-定義可能な関数である．この関数が，$+$と$\cdot$を保存するのは明らかである．

先ず，fが唯一つの埋め込み写像であることを示す．gをMからNへのA-定義可能な埋め込み写像とする．$f(n) \neq g(n)$となる最小のnをとる．fとgは埋め込み写像であるから，$f(0^M) = 0^N = g(0^M)$である．よって，$n \neq 0^M$．したがって，$n = m +^M 1^M$とかける．帰納法の仮定より，$f(m) = g(m)$であるから，

$$f(n) = f(m +^M 1^M) = f(m) +^N 1^N = g(m) +^N 1^N = g(m +^M 1^M) = g(n)$$

となる．これは矛盾である．よって，fは唯一つの埋め込み写像である．

次に，$f(M) \subseteq_e N$であることを示す．$n \in M$, $a \in N$とする．このとき，$a <^N f(n)$ならば$a \in f(M)$であることをnに関する帰納法によって示す．$n = 0^M$のときは明らかである．よって，$n = m +^M 1^M$とする．$a <^N f(m +^M 1^M) = f(m) +^N 1^N$だから，$a \leq^N f(m)$である．$a = f(m)$ならば明らかに$a \in f(M)$．$a <^N f(m)$ならば帰納法の仮定より$a \in f(M)$である．よって，$f(M) \subseteq_e N$である． □

2 Tennenbaumの定理の一般化

命題 10 Nを$\Delta_1(M)$-定義可能なモデル，fをMからNへの標準埋め込み写像とする．このとき，fは$\Delta_1(M)$-定義可能である．

証明. M^* を M の end extension とする．また，論理式 $\varphi(x,y)$ を次の様に定義する．

$$\varphi(x,y) := \exists z[(z)_0 = 0^N \wedge (z)_x = y \wedge \forall i < x((z)_{i+1} = (z)_i +^N 1^N)]$$

$+^N$ は Σ_1-論理式によって定義されるので，この論理式も Σ_1-論理式である．明らかに，$f(m) = n \Leftrightarrow M^* \models \varphi(m,n)$ である．次に，任意の $a \in M$ に対して，$M^* \models \exists! y \varphi(a,y)$ となることを示す．明らかに，$M^* \models \varphi(a, f(a))$ である．$b \neq f(a)$ となる $b \in M^*$ に対して，$M^* \models \varphi(a,b)$ となると仮定する．すると，

$$M^* \models (d_1)_0 = 0^N \wedge (d_1)_a = f(a) \wedge \forall i < x((d_1)_{i+1} = (d_1)_i +^N 1^N)],$$

$$M^* \models (d_2)_0 = 0^N \wedge (d_2)_a = b \wedge \forall i < x((d_2)_{i+1} = (d_2)_i +^N 1^N)].$$

となる d_1, d_2 を選べる．M^* は PA のモデルであるから，$(d_1)_i = (d_2)_i$ となる最大の i を選べる．しかし，このとき d_1 と d_2 の選び方から，$(d_1)_{i+1} = (d_2)_{i+1}$ となり，i の選び方に反する． □

定理 11 N を M の $\Delta_1(M)$-定義可能なモデルとする．このとき，N は M と *definably isomorphic* である．

証明. 標準埋め込み写像 $f : M \to N$ が全射でないと仮定する．$A = \{m \in f(M) : N \models \mathrm{Tr}_{\Pi_1}(m)\}$ とおく．ただし，$\mathrm{Tr}_{\Pi_1}(x)$ は Π_1-論理式に関する partial truth definition である．$f(M) \subsetneq_e N$ であるから，補題 8 より $A = \{n \in N : n \in a_0\}$ となる $a_0 \in N$ が取れる．このとき，次の主張 A と B が証明できるが，これは矛盾である．

主張 A $f^{-1}(A)$ は $\Delta_1(M)$-定義可能である．

$\varphi(x)$ によって論理式 "$N \models \exists z(\mathrm{p}(f(x)) \cdot z = a_0)$" を表す．また，$\psi(x)$ によって論理式 "$N \models \exists z \exists w(0 < w < p(f(x)) \wedge (\mathrm{p}(f(x)) \cdot z + w = a_0))$" を表す．$N$ が $\Delta_1(M)$-定義可能であるから，命題 10 より，f は $\Delta_1(M)$-定義可能である．よって，N も f も $\Delta_1(M)$-定義可能であるから，$\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は Σ_1-論理式である．$b \in M$ に対して，以下の同値式が成り立つ．

$$\begin{aligned} b \in f^{-1}(A) &\iff f(b) \in A \iff N \models f(b) \in a_0 \\ &\iff N \models \mathrm{p}(f(b)) \text{ divides } a_0 \\ &\iff N \models \exists z(\mathrm{p}(f(b)) \cdot z = a_0) \\ &\iff M \models \varphi(b) \end{aligned}$$

また，$M \setminus f^{-1}(A)$ は $\psi(x)$ によって定義可能であることはすぐに分かる．すなわち，$f^{-1}(M)$ は $\neg\psi(x)$ によって定義可能である．よって，$f^{-1}(M)$ は $\Delta_1(M)$-定義可能である．

主張 B $f^{-1}(A)$ は $\Delta_1(M)$-定義可能ではない．

そうでないと仮定する．したがって，$\Delta_1(M)$-定義可能の定義を満たすための Σ_1-論理式 $\varphi(x,a)$ と Π_1-論理式 $\psi(x,a)$ が存在する．ここで，a はパラメータで，簡単のために a 以外のパラメータは含まないものとする．$b=f(a)$ とおく．self-reference lemma (cf. [1]) より，

$$\mathrm{PA} \vdash \neg\varphi(\ulcorner\delta(\dot{y})\urcorner, y) \leftrightarrow \delta(y)$$

となる Π_1-論理式 $\delta(y)$ が取れる．

このとき，$N \models \delta(b)$ と仮定すると，下の式より矛盾する．

$$\begin{aligned}
N \models \delta(b) &\Longrightarrow N \models \neg\varphi(\ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner, b) \quad (\because \delta \text{ の定義}) \\
&\Longrightarrow f(M) \models \neg\varphi(\ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner, b) \quad (\because \neg\varphi \in \Pi_1 \text{ かつ } f(M) \subseteq_e N) \\
&\Longrightarrow M \models \neg\varphi(\ulcorner\delta(\dot{a})\urcorner, a) \quad (\because f \text{ は埋め込み写像}) \\
&\Longrightarrow \ulcorner\delta(\dot{a})\urcorner \notin f^{-1}(A) \quad (\because \varphi \text{ の定義}) \\
&\Longrightarrow f(\ulcorner\delta(\dot{a})\urcorner) \notin A \\
&\Longrightarrow \ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner \notin A \quad (\because f(\ulcorner\delta(\dot{a})\urcorner) = \ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner) \\
&\Longrightarrow N \models \neg\delta(b) \quad (\because A \text{ の定義})
\end{aligned}$$

また，$N \models \neg\delta(b)$ と仮定しても，下の式より矛盾することが分かる．

$$\begin{aligned}
N \models \neg\delta(b) &\Longrightarrow f(\ulcorner\delta(\dot{a})\urcorner) = \ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner \notin A \quad (\because A \text{ の定義}) \\
&\Longrightarrow \ulcorner\delta(\dot{a})\urcorner \notin f^{-1}(A) \\
&\Longrightarrow M \models \neg\psi(\ulcorner\delta(\dot{a})\urcorner, a) \quad (\because \psi \text{ の定義}) \\
&\Longrightarrow f(M) \models \neg\psi(\ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner, b) \\
&\Longrightarrow N \models \neg\psi(\ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner, b) \quad (\because \neg\psi \in \Sigma_1 \text{ かつ } f(M) \subseteq_e N) \\
&\Longrightarrow N \models \neg\varphi(\ulcorner\delta(\dot{b})\urcorner, b) \quad (\because \varphi \text{ と } \psi \text{ の定義}) \\
&\Longrightarrow N \models \delta(b) \quad (\because \delta \text{ の定義})
\end{aligned}$$

以上より，$f^{-1}(A)$ は $\Delta_1(M)$-定義可能ではない． □

3 M で $\emptyset$-定義可能なモデル

定義 12 Ψ を M の定義可能な集合からなる集合とする．$\Psi \subset \{\varphi(x,\bar{a})^M : \bar{a} \in M\}$ となる論理式 $\varphi(x,\bar{y})$ が存在するとき，Ψ は**一様に定義される**という．

事実 13 M の $\emptyset$-定義可能な集合全体からなる集合は一様には定義されない．

証明. $\emptyset$-定義可能な集合全体からなる集合が，$\varphi(x,\bar{y})$ によって一様に定義されると仮定する．このとき，$\bar{y}$ は1変数と思ってよい．$\neg\varphi(x,x)$ を $\psi(x)$ とおく．仮定から

$M \models \forall x(\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x,a))$ となる $a \in M$ が存在する．すると，$M \models \psi(a) \leftrightarrow \varphi(a,a)$ を得るが，これは矛盾である． □

補題 14 N は M で $\emptyset$-定義可能で，M から N への標準埋め込み写像 f は *elementary* であるとする．このとき，f は同型写像である．

証明． f を elementary であるから，$f(M) \prec N$ である．$f(M) \precneqq N$ と仮定して，矛盾を導く．$D \subset M$ を $\emptyset$-定義可能な集合とし，D は論理式 $\varphi(x)$ によって定義されているものとする．f は埋め込み写像であるから，$f(D)$ は $\varphi(x)$ によって $f(M)$ で定義される．$f(M) \prec N$ であるから，$f(D) = \{y \in f(M) : N \models \varphi(y)\}$ である．補題 8 より，$f(D) = \{y \in f(M) : N \models y \in a\}$ となる $a \in N$ が取れる．よって，

$$b \in D \Leftrightarrow f(b) \in f(D) \Leftrightarrow N \models f(b) \in a$$

となる．N は M で $\emptyset$-定義可能であるから，$b \in D \Leftrightarrow M \models$ "$N \models f(b) \in a$" となる．よって，$\emptyset$-定義可能な集合全体は一様に定義できることになるが，これは事実 13 に反する． □

定理 15 N は M で $\emptyset$-定義可能で，$N \equiv M$ かつ $M \succ \omega$ とする．このとき，N は M と *definably isomorphic* である．

証明． $f : M \to N$ を M から N への標準埋め込み写像とする．$N \equiv M$ だから，$f|\omega$ は elementary である．f が elementary でないと仮定すると，

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ かつ } N \models \neg\varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$$

となる $a_1, \ldots, a_n \in M$ と論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が存在する．N は M で $\emptyset$-定義可能であるから，

$$M \models \exists x_1 \ldots \exists x_n[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \text{“}N \models \neg\varphi(f(x_1), \ldots, f(x_n))\text{”}]$$

となる．$M \succ \omega$ だから，

$$M \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \wedge \text{“}N \models \neg\varphi(f(m_1), \ldots, f(m_n))\text{”}$$

となる $m_1, \ldots, m_n \in \omega$ が存在する．しかし，これは $f|\omega$ が elementary であることと矛盾する．よって，f は elementary である．したがって，補題 14 より f は同型写像である． □

系 16 N は ω-定義可能で，$N \equiv \omega$ であるとする．このとき，N は ω と *definably isomorphic* である．

4 M で M-定義可能なモデル

補題 17 M を非標準モデルとし，N を M で定義可能なモデルとする．このとき，$SSy(M) = SSy(N)$ である．

証明. f を M から N への標準埋め込み写像とする．明らかに，$SSy(M) \subset SSy(N)$ である．よって，$SSy(N) \subset SSy(M)$ を示す．$D \in SSy(N)$ とし，D は N において $a \in N$ によってコードされると仮定する．このとき，$a \in f(N)$ としてよい．なぜなら，$a \notin f(N)$ ならば，次のようにして D をコードする $a_0 \in f(N)$ をとることができる．$f(M) \neq \omega$ であるから，$b \in f(M) \setminus \omega$ が取れる．このとき，任意の $n \in \omega$ に対して，$N \models \exists y < b \forall x \leq n(x \in y \leftrightarrow x \in a)$ である．したがって，$N \models \forall x \leq n^*(x \in y \leftrightarrow x \in a)$ となる $n^* \in N \setminus \omega$ (overspill による) と $a_0 < b$ が取れる．$f(M)$ は N の initial segment であるから，$a_0 \in f(M)$ である．$f(M) \prec_{\Delta_0} N$ かつ $y \in x$ が PA において Δ_0-論理式であることに注意すると，$a \in f(M)$ は $f(M)$ において D をコードする．f は M と $f(M)$ の間の同型写像であるので，D は M においてコードされる． □

記法 18

1. T^G は集合 $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in T\}$ を表す．
2. $\mathrm{Pr}_T(x)$ は，論理式 x が T において証明できる，ということを表現する論理式である．$\mathrm{Con}(T)$ は $\neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$ のことである．
3. $\mathrm{Rfn}(T)$ は $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$ という形をした論理式全体からなる集合を表す．ここで，φ は $\mathscr{L}_A$-閉論理式である．$\mathrm{Rfn}(T)$ は T に関する **Local Reflection Principle** と呼ばれる．(cf. [4])
4. $\mathrm{Con}_y(\psi(y))$ は，論理式 $\psi(y)$ によって表現された "理論" が無矛盾であることを表現する閉論理式である．

補題 19 M を $\mathrm{PA} + \mathrm{Rfn}(\mathrm{PA})$ のモデルとし，$a \in M$ が M において $\mathrm{Th}(M)^G$ をコードしているものとする．このとき，$M \models \mathrm{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n^*)$ となる $n^* \in M \setminus \omega$ が存在する．

証明. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を $\mathrm{Th}(M)$ の任意の元とする．$M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Rfn}(\mathrm{PA})$ であるから，

$$M \models \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m)\urcorner) \to \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m)$$

となる．よって，$M \models \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ であるから，$M \models \mathrm{Con}(\mathrm{PA} + \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\})$ である．$a \in M$ が M において $\mathrm{Th}(M)^G$ をコードしていることに注意すれば，任意の $n \in \omega$ に対して，$M \models \mathrm{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n)$ となることが分かる．したがって，overspill により $M \models \mathrm{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n^*)$ となる $n^* \in M \setminus \omega$ が存在する． □

命題 20 M を $\mathrm{PA} + \mathrm{Rfn}(\mathrm{PA})$ のモデルとする．このとき，次は同値である．

1. M で定義可能で，かつ $N \equiv M$ となる帰納的に飽和なモデル N が存在する．

2. $\mathrm{Th}(M)^G$ が M でコードされる．

証明． (*1* $\Rightarrow$ *2*) ここでは，$M \models \mathrm{PA}$ であるとする．M で定義可能で，かつ $N \equiv M$ となる帰納的に飽和なモデル N が存在すると仮定する．次の帰納的な type $p(x)$ を考える．

$$p(x) = \{\ulcorner\varphi\urcorner \in x \leftrightarrow \varphi : \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{-閉論理式}\}$$

$p(x)$ は帰納的であるから，仮定によりこれを realize する $a \in N$ が存在する．このとき，a は N において $\mathrm{Th}(M)^G$ をコードする．補題 17 によって，$\mathrm{Th}(M)^G$ は M でコードされる．

(*2* $\Rightarrow$ *1*) $\mathrm{Th}(M)^G$ が M において $a \in M$ でコードされているとする．補題 19 によって，$M \models \mathrm{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n^*)$ となる $n^* \in M \setminus \omega$ が存在する．

このとき，Henkin の構成法を形式化することによって，M の中にモデルを定義する．$\alpha(x)$ を，α^M が M の cofinal な部分集合，となるような論理式とする．α^M は新しい定数記号の (コードの) 集合を表すことを意図している．$\beta(x)$ を，x が "定数記号" としては $\mathscr{L}_A$ の定数記号の他に α^M に含まれる定数記号を含み，"変数記号" としては x_0 のみを含む論理式である，ということを表現する論理式とする．$e(x)$ を，β^M に含まれるすべての "論理式" を並べた $\emptyset$-定義可能な関数とする．ただし，$e(x)$ は $y \geq x$ となる "定数記号" $c(y)$ を含んでいないと仮定する．$\delta_0(x)$ を，δ_0^M が $\exists x_0\varphi(x_0) \rightarrow \varphi(m)$ という形をしている閉論理式全体からなる集合，となるような論理式とする．ただし，m は $e(m) = \ulcorner\varphi(x_0)\urcorner$ となる数とする．

$\delta(y, a)$ を論理式 $(y \in a \wedge y \leq n^*) \vee \delta_0(y)$ とする．このとき，$M \models \mathrm{Con}_y(\delta(y, a))$ となる．$f(x)$ を，新しい "定数記号" を含むすべての "閉論理式" を並べた $\emptyset$-定義可能な関数とする．帰納法によって，次のような $\{a, n^*\}$-定義可能な関数 $\mathscr{F} : M \rightarrow \beta^M$ を定義する．

$$\mathscr{F}(x) = \begin{cases} f(x) & M \models \mathrm{Con}_y(\delta(y,a) \vee \exists z < x(y = \mathscr{F}(z)) \vee y = f(x)) \text{ のとき} \\ \neg f(x) & \text{その他} \end{cases}$$

ここで，$\neg f(x)$ は $f(x)$ によってコードされた論理式の否定のコードを表す．

$\mathscr{F}$ を使って，M において $\{a, n^*\}$-定義可能な構造 N を次のように定義する．

- N の universe$|N|$ を集合 $\alpha^M/\sim$ とする．ただし，$c, d \in \alpha^M$ に対して，$c \sim d \Leftrightarrow$ "$c = d$"$\in \mathrm{ran}(\mathscr{F})$ である．c の同値類を $[c]$ で表す．
- $0^N = [0]$，$1^N = [1]$ とする．
- $[a] +^N [b] = [a + b]$，$[a] \cdot^N [b] = [a \cdot b]$ とする．

このとき，標準的な方法で，任意の閉論理式 φ に対して，$N \models \varphi \Leftrightarrow M \models \ulcorner\varphi\urcorner \in \mathrm{ran}(\mathscr{F})$，となることが分かる．よって，$N \models \mathrm{Th}(M)$ である．

主張 A N は帰納的に飽和である．

$r(x,a)$ を N で帰納的な type とする．定義より集合

$$A = \{\ulcorner\varphi(x,y)\urcorner : \varphi(x,a) \in r(x,a)\}$$

は帰納的である．A は recursively enumerable であるから，$\ulcorner\psi_n(x,y)\urcorner$ $(n \in \omega)$ を A に含まれるすべての "論理式" を並べたものとする．このとき，$\{a\}$-定義可能な帰納的関数 h を次のように定義する．

$$h(n,a) = \ulcorner\exists x[\psi_0(x,\dot{a}) \wedge \psi_1(x,\dot{a}) \wedge \cdots \wedge \psi_n(x,\dot{a})]\urcorner$$

$r(x,a)$ は帰納的な type であるから，任意の $n \in \omega$ に対して，$N \models \exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(x,a)$ である．だから，任意の $n \in \omega$ に対して $M \models h(n,a) \in \mathrm{ran}(\mathscr{F})$ である．overspill より，$M \models h(n^*,a) \in \mathrm{ran}(\mathscr{F})$ となる $n^* \in M$ が存在する．これより，ある $d \in N$ が存在して，任意の $\varphi(x,a) \in r(x,a)$ に対して，$N \models \varphi(d,a)$ となることが分かる．すなわち，$r(x,a)$ は d で realize される．□

定理 21 M を，$\mathrm{Th}(M)^G \in SSy(M)$ となる $\mathrm{PA} + \mathrm{Rfn(PA)}$ のモデルとする．このとき，$N_* \equiv M_*$ かつ $N_* \not\cong M_*$ となるモデル $M_* \prec M$ と M で定義可能なモデル N_* が存在する．

証明. $a \in M$ が $\mathrm{Th}(M)^G$ を M でコードしていると仮定する．M_* を M における a の definable closure $\mathrm{dcl}_M(a) (\prec M)$ とする．帰納的な type

$$\{\forall x \exists! y \varphi(x,y) \to \forall y[\varphi(a,y) \to y < z] : \varphi(x,y) \text{ は } \mathscr{L}_A\text{-論理式}\}$$

は $\mathrm{dcl}_M(A)$ において realize されないので，M_* は帰納的飽和ではない．また，$M_* = \mathrm{dcl}_M(a) \prec M$ であるから，$\mathrm{Th}(M)^G$ は M_* でコードされる．よって，命題 20 より，$N_* \equiv M_*$ となる M_* で定義可能で，帰納的に飽和なモデル N_* が存在する．$N_* \not\cong M_*$ であるから，この M_* と N_* が求めるものである．□

事実 22 (cf. [5]) M と N が帰納的に飽和な可算モデルとする．もし $M \equiv N$ かつ $SSy(M) = SSy(N)$ ならば，M と N は同型である．

注意 23 M を帰納的に飽和な可算モデルとする．このとき，$N \equiv M$ となる M で定義可能なモデル N は M と同型である．それは次のように示せる．N の帰納的な *type* $p_N(x)$ に対して，$p_M(x) = \{``N \models \varphi(x)" : \varphi(x) \in p_N(x)\}$ は M の帰納的な *type* である．仮定から $p_M(x)$ は M で *realize* されるが，このことから $p_N(x)$ が N で *realize* されることが分かる．よって，N は帰納的に飽和である．補題 *17* より $SSy(M) = SSy(N)$ である．また，仮定から $N \equiv M$ であるから，事実 *22* により，N と M は同型である．

定理 24 M を $\mathrm{PA}+\mathrm{Rfn}(\mathrm{PA})$ のモデルとする．

1. $\mathrm{Th}^G(M) \in SSy(M)$ と仮定する．このとき，$N \equiv M$ であるが，M と *definably isomorphic* でない，M で定義可能なモデル N が存在する．

2. M を帰納的に飽和な可算モデルとする．このとき，次の条件を満たす定義可能なモデル $N \equiv M$ が存在する．

   (a) $N \cong M$

   (b) N と M は *definably isomorphic* ではない

証明. (1) $a \in M$ が $\mathrm{Th}(M)^G$ をコードすると仮定する．そして，$M_* = \mathrm{dcl}_M(a)$ とおく．定理 21 の証明と同様に，$N_* \equiv M_*$ かつ $N_* \not\cong M_*$ となる定義可能なモデル N_* を取ることができる．特に，N_* と M_* は definably isomorphic ではないことに注意する．$\varphi(x)$ を M_* で N_* を定義する $\mathscr{L}_A(M_*)$-論理式とし，$N=\varphi(x)^M$ とおく．$M \succ M_*$ であるから，N は $\mathrm{Th}(M)$ のモデルである．このとき，M と N が definably isomorphic でないことを示す．そうでないと仮定する．このとき，ある $\mathscr{L}_A$-論理式 $\psi(x,y,z)$ とパラメータ $b \in M$ が存在して，論理式 $\psi(x,y,b)$ が M から N への定義可能な同型写像 $\sigma(x)=y$ を定義する．$M \succ M_*$ であるから，ある $b^* \in M_*$ が存在して，$\psi(x,y,b_*)$ が M_* から N_* への定義可能な同型写像を定義する．しかし，これは $N_* \not\cong M_*$ に反する．

(2) M は帰納的に飽和なモデルであるから，$\mathrm{Th}(M)^G$ をコードする $a \in M$ が存在する．N を上の (1) で得られたモデルとする．このとき，N は M と definably isomorphic ではない．しかし，注意 23 によれば，M と N は同型である． □

参考文献

[1] P. Hájek and P. Pudlák, *Metamathematics of first order arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[2] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[3] S. Shelah *Classification theory and the number of non-isomorphic model*, 2nd revised ed, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[4] C. Smoryński, The incompleteness theorems, In: *Handbook of mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977, 821–865.

[5] ________, Recursively saturated nonstandard models of arithmetic, The Journal of Symbolic Logic, 46, 1981, 259–286.

[6] S. Tennenbaum, Non-archimedean models for arithmetic, Notices of the American Mathematical Society, 1959, 270.

[7] A. Tsuboi, On M-recursively saturated models of arithmetic, Tsukuba Journal of Mathematics, Vol. 6, No. 2, 1982, 305–318.