数理解析研究所講究録 1474 巻 2006 年 118-126

$x(n+1)=qx(n)-\sum_{j=0}^{m}a_j(n)f_j(x(n-j))$ に対する大域吸引性

早稲田大学理工学部　室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)
Department of Mathematical Sciences, Waseda University
東京理科大学理学部　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science

1 はじめに

変数遅れを持つ非線形差分方程式を考える.

$$\begin{cases} x(n+1)=qx(n)-\sum_{j=0}^{m}a_j(n)f_j(x(n-j)), & n=0,1,2,\cdots, \\ x(j)=x_j, \quad -m\le j\le 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $0<q\le 1$ かつ, $f(x)$ は $(-\infty,+\infty)$ での狭義単調増加関数で,

$$\begin{cases} f(0)=0, \quad 0<\frac{f_j(x)}{f(x)}\le 1, \quad x\ne 0, \quad 0\le j\le m, \\ f(x)\ne x, \quad \text{ならば}, \quad \lim_{x\to-\infty}f(x) \quad \text{は有限}. \end{cases} \tag{1.2}$$

また, $a_j(n)\ge 0$, $0\le j\le m$ は次の条件を満たすとする.

$$\sum_{j=0}^{m}a_j(n)>0 \qquad \text{かつ} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}a_j(n)=+\infty. \tag{1.3}$$

定義 1.1 (1.1) の零解が**一様安定**とは, 任意の $\varepsilon>0$ と非負の整数 n_0 に対して, (1.1) の解 $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ が $|x(n)|<\varepsilon$, $n=n_0,n_0+1,\cdots$ を満たす $\max\{|x(n_0-j)|\mid j=-k,-k+1,\cdots,0\}<\delta$ となる $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在することである.

定義 1.2 (1.1) の零解が**大域吸引性**を持つとは, (1.1) のすべての解が $n\to\infty$ に対し, 0 に収束することである.

定義 1.3 (1.1) の零解が**大域漸近安定**であるとは, 一様安定であり, かつ大域吸引性を持つことである.

差分方程式 (1.1) に関して多くの文献がある (たとえば, [1-14] とその中の文献を参照). $q=1$ の場合については, $\sup_{n\ge 0}\sum_{j=0}^{m}a_j(n)\le\frac{3}{2}+\frac{1}{2(m+1)}$ が (1.1) の零解が大域漸近安定であることの十分条件であることが知られている (たとえば, $f(x)=x$ に対しては, Yu [14], Matsunaga, Hara and Sakata [4], また, 一般化 Yorke 条件を満足する場合には Tkachenko and Trofimchuk [11] を参照). $f(x)=e^x-1$ で $0<q\le 1$ の場合は $q=1$ の 3/2 条件の拡張として, たとえば, Muroya [6] により, (1.1) の零解が大域漸近安定であることの十分条件が得られている.

定理 A (Muroya [6]). $f(x)=e^x-1$ に対し, 次を仮定すると (1.1) の零解は大域漸近安定である.

$$\sup_{n\ge m}\sum_{k=n-m}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_j(k)\le 1+q^{m+1}/2, \qquad n\ge m. \tag{1.4}$$

一方で，Tkachenko and Trofimchuk [10] は非自励系の差分方程式

$$x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-m}), \quad n \in Z \tag{1.5}$$

に対する零解の様々な大域安定性の十分条件を示している．ここで，$0 < q < 1$ かつ非線形関数 $f_n : \boldsymbol{R}^{m+1} \to \boldsymbol{R}$ は次の「一般化 Yorke 条件」を満たす．

(H1) すべての $\min_{0 \le i \le m} z_i \ge s$ となる $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{m+1}$，$\boldsymbol{z} = (z_0, z_1, \cdots, z_m)$ に対して，$f_n(\boldsymbol{z}) \le \theta(s)$ となる $\theta : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が存在する．

(H2) 次を満たす有理関数 $r(x) = ax/(1+bx)$，$a < 0$ かつ $b > 0$ が存在する．

$$r(M(\boldsymbol{z})) \le f_n(\boldsymbol{z}) \le r(-M(-\boldsymbol{z})), \quad n \in Z_+. \tag{1.6}$$

ただし，第 1 の不等式はすべての $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{m+1}$ に対して成り立ち，第 2 の不等式は，$\min_{0 \le i \le m} z_i > -b^{-1} \in (-\infty, 0)$ を満たすような $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{m+1}$ に対して成り立つ．

Tkachenko and Trofimchuk [10] の場合，(1.1) で自励系の場合，つまり，(1.1) で $a_j(n) = a_j$，$n \ge 0$ で，(1.2) で $f(x) = -ax/(1-x)$ に対し，次の (1.8) の r_1, r_2 の選び方と異なる $r_1 = q^m a_0$，$r_2 = \sum_{k=0}^m q^k \sum_{j=0}^m a_j - q^m a_0$ に対し，(1.1) で特別な $m = 0$ の場合の零解の大域漸近安定条件に相当する $r_1 + r_2 = \sum_{k=0}^m q^k \sum_{j=0}^m a_j \le 1 + q^{m+1}$ となる m と q の条件 $V_m(q) < 0$ と $W_m(q) < 0$ を求めたと解釈できる．その場合，q の取り得る範囲は次の場合に制限される．

$$(q + q^2 + \cdots + q^m)q^{m+1} \le 1. \tag{1.7}$$

本報告では，(1.5) と (1.6) の代わりに (1.1)-(1.3) を考え，(1.1) の零解の大域漸近安定条件を求めるため，

$$\begin{cases} r_1 = \sup_{n \ge m} \sum_{k=0}^{m} q^k \sum_{j=0}^{m-k} a_j(n-k), \quad r_2 = \sup_{n \ge m} \sum_{k=1}^{m} q^k \sum_{j=m-k+1}^{m} a_j(n-k), \\ \varphi(x) = \bar{q}x - r_1 f(x), \quad \bar{q} = q^{m+1}, \quad \hat{x} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\bar{q}}}{2\bar{q}} \end{cases} \tag{1.8}$$

とおき，Muroya and Ishiwata [7, 8] と Uesugi 他 [12] と同様の手法を用いて，$q = 1$ を含む場合の ‘3/2 条件’ を改良した次の定理が得られることを示す．

定理 1.1 $f(x) = e^x - 1$ に対し，次を仮定する．

$$\begin{cases} r_1 \le \bar{q} \text{ のとき，} r_1 + r_2 \le 1 + \frac{\bar{q}}{2}, \quad \text{もしくは} \quad r_2 \le 1 \text{ かつ } \frac{r_1 + r_2}{\bar{q}} e^{r_2} \le \frac{e^{\hat{x}}}{1 - \hat{x}}, \\ r_1 > \bar{q} \text{ のとき，} r_1 + r_2 \le 1 + \bar{q} \text{ かつ } \frac{r_1 + r_2}{\bar{q}} (\frac{\bar{q}}{r_1})^{\bar{q}} e^{r_1 + r_2 - \bar{q}} \le \frac{e^{\hat{x}}}{1 - \hat{x}}, \end{cases} \tag{1.9}$$

または，

$$\begin{cases} r_1 \le \bar{q} \text{ のとき，} r_1 + r_2 \le 1 + \frac{\bar{q}}{2}, \quad \text{もしくは} \quad r_2 \le 1, \ \frac{r_1 + r_2}{\bar{q}} e^{r_2} > \frac{e^{\hat{x}}}{1 - \hat{x}} \text{ かつ } G_3(\delta) > 0, \\ r_1 > \bar{q} \text{ のとき，} r_1 + r_2 \le 1 + \bar{q}, \ \frac{r_1 + r_2}{\bar{q}} (\frac{\bar{q}}{r_1})^{\bar{q}} e^{r_1 + r_2 - \bar{q}} > \frac{e^{\hat{x}}}{1 - \hat{x}} \text{ かつ } G_1(\alpha) > 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

を仮定する．ただし，(1.10) の場合，

$$\begin{cases} G_1(x) = \bar{q}\{\bar{q}\ln(\bar{q}/r_1) + (r_1 + r_2) - \bar{q} - r_2 e^x\} + (r_1 + r_2) \\ \qquad\qquad -(r_1 + r_2)(\bar{q}/r_1)^{\bar{q}} e^{r_1 + r_2 - \bar{q} - r_2 e^x} - x, \\ G_3(x) = (r_1 + (1 + \bar{q})r_2) - \bar{q} r_2 e^x - (r_1 + r_2) e^{r_2 - r_2 e^x} - x \end{cases} \tag{1.11}$$

であり，また，α と δ はそれぞれ，$G_1'(x) = 0$ と $G_3'(x) = 0$ の最小解である．このとき，(1.1) の零解は大域漸近安定である．

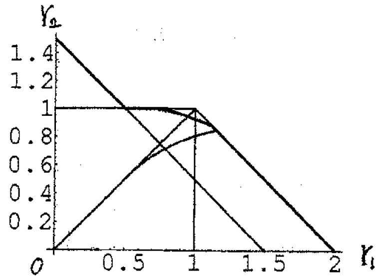

図 1: $q=1$ の場合の条件 (1.9)

図 1 は，Tkachenko and Trofimchuk [10] では扱えない，$q=1$ の場合の (1.1) の零解が大域漸近安定となる十分条件 (1.9) を満足する (r_1, r_2) の範囲である (Muroya [5], Muroya and Ishiwata [7], Uesugi 他 [12] 参照).

$f(x)=e^x-1$ の場合，$r_2 \leq 1$ に対して，定理 1.1 の条件は $r_1+r_2>1+\bar{q}/2$ を含む．よって，定理 1.1 は So and Yu [9], Muroya [5], Muroya and Ishiwata [7] の定理 3 の (8) 等の結果を拡張している．

応用として，$0<q\leq 1$ となる離散 Wazewska-Czyzewska and Lasota モデル ([13]) と 'Nicolson's blowflies' 遅延微分方程式の離散版に対し，定理 1.1 を適用すると Tkachenko and Trofimchuk [10] の (1.7) 等の制限のある従来の結果に比べて大幅な改良条件を得ることができる (4 節参照).

2　非線形差分方程式の零解の大域漸近安定性

ここで，非線形差分方程式 (1.1)-(1.3) の零解の大域漸近安定条件を考える．So and Yu [9] の方法を使って，次の 2 つの補題を得る ([9] の補題 2.1, 2.2 と定理 3.1 を参照).

補題 2.1　$\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の解とする．$x(n)$ がある時刻よりずっと 0 より大きい (小さい) ならば，$x(n)$ はある時刻より減少 (増加) し，$\lim_{n\to\infty} x(n)=0$ となる．

補題 2.2　$f(x)\neq x$ かつ $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の解とする．$x(n)$ が 0 の周りで振動し，$\sup_{n\geq m} \sum_{k=n-m}^{n} q^{n-k} \sum_{j=0}^{m} a_j(k) < +\infty$ となるならば，$x(n)$ は上にも下にも有界である．

注意 2.1　$f(x)\neq x$ かつ $r_1+r_2<+\infty$ ならば，補題 2.2 により，(1.1) の任意の解 $x(n)$ は 0 のまわりで振動し，上にも下にも有界である．

次の 2 つの補題は Muroya and Ishiwata [7] の補題 3, 4 を一般化したもので，本報告で基礎的な結果となっている．

補題 2.3　$\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の解とする．$x(n+1)\geq 0$ かつ $x(n+1)>x(n)$ を満たす整数 $n\geq m$ が存在するならば，

$$x(\underline{g}(n)) = \min_{0\leq j\leq m} x(n-j) < 0 \tag{2.1}$$

を満たす整数 $\underline{g}(n)\in[n-m,n]$ が存在する．また，$x(n+1)\leq 0$ かつ $x(n+1)<x(n)$ を満たす整数 $n\geq m$ が存在するならば，

$$x(\bar{g}(n)) = \max_{0\leq j\leq m} x(n-j) > 0 \tag{2.2}$$

を満たす整数 $\bar{g}(n) \in [n-m, n]$ が存在する.

証明 $x(n+1)$, $x(n-j) \geq 0$, $0 \leq j \leq m$ のとき, (1.1)-(1.3) により, $0 \leq x(n+1) \leq qx(n) \leq x(n)$ となる. また, $x(n+1)$, $x(n-j) \leq 0$, $0 \leq j \leq m$ のとき, (1.1)-(1.3) により, $0 \geq x(n+1) \geq qx(n) \geq x(n)$ となる. よって, (2.1) と (2.2) が成り立つ. □

補題 2.3 を適用することにより, 本報告で重要な次の補題を得る (Uesugi 他 [12] 参照).

補題 2.4 (1.2) と (1.3) を満たす (1.1) の解 $x(n)$ が 0 の周りで振動すると仮定する. ある実数 $L < 0$ に対して, $x(n) \geq L$, $n \geq n_L$ を満たす 正の整数 $n_L \geq 2m$ が存在するならば, 任意の整数 $n \geq n_L + 2m$ に対して,

$$x(n+1) \leq R_L, \quad n \geq n_L + 2m, \qquad \text{および} \qquad x(n+1) \geq S_L, \quad n \geq n_L + 4m \tag{2.3}$$

となる. ただし, R_L, S_L は次のように与えられる.

$$R_L = \max_{L \leq x \leq 0} \varphi(x) - r_2 f(L) > 0, \qquad S_L = \min_{0 \leq x \leq R_L} \varphi(x) - r_2 f(R_L) < 0. \tag{2.4}$$

さらに,

$$S_L > L, \qquad L < 0 \tag{2.5}$$

ならば, $\lim_{n \to \infty} x(n) = 0$ となる.

証明 任意の $k \geq n_L$ に対し, $x(k) \geq L$ を仮定する. 仮定より, $x(n+1) > 0$ および $x(n+1) > x(n)$ を満たす整数 $n \geq n_L + 2m$ が存在する. このとき, 補題 2.3 より, $x(\underline{g}(n)) = \min_{0 \leq j \leq m} x(n-j) < 0$ を満たす整数 $\underline{g}(n) \in [n-m, n]$ が存在する. $\underline{g}(n) - m \geq n - 2m$ と (1.1)-(1.3) より,

$$\begin{cases} x(n+1) \leq qx(n) - \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m} a_j(n)\right) f(x(\underline{g}(n))), \\ \quad qx(n) \leq q^2 x(n-1) - q\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} a_j(n-1)\right) f(x(\underline{g}(n))) - q a_m(n-1) f(L), \\ q^2 x(n-1) \leq q^3 x(n-2) - q^2\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m-2} a_j(n-2)\right) f(x(\underline{g}(n))) - q^2\left(\displaystyle\sum_{j=m-1}^{m} a_j(n-2)\right) f(L), \\ \qquad \vdots \\ q^{n-\underline{g}(n)} x(\underline{g}(n)+1) \leq q^{n-\underline{g}(n)+1} x(\underline{g}(n)) - q^{n-\underline{g}(n)}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m-n+\underline{g}(n)} a_j(\underline{g}(n))\right) f(x(\underline{g}(n))) \\ \qquad\qquad - q^{n-\underline{g}(n)}\left(\displaystyle\sum_{j=m-n+\underline{g}(n)+1}^{m} a_j(\underline{g}(n))\right) f(L) \end{cases}$$

なので, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} x(n+1) &\leq q^{n-\underline{g}(n)+1} x(\underline{g}(n)) - \left(\sum_{k=0}^{n-\underline{g}(n)} q^k \sum_{j=0}^{m-k} a_j(n-k)\right) f(x(\underline{g}(n))) \\ &\qquad - \left(\sum_{k=1}^{n-\underline{g}(n)} q^k \sum_{j=m-k+1}^{m} a_j(n-k)\right) f(L) \\ &\leq \varphi(x(\underline{g}(n))) - r_2 f(L) \leq R_L. \end{aligned}$$

$x(k+1) > R_L$ となる整数 $k \geq n_L + 2m$ が存在するとき，仮定より，$x(n+1) > 0$, $x(n+1) > x(n)$, $x(n+1) > R_L$ となる整数 $n \geq n_L$ が存在することになり，矛盾する．これより，任意の $n \geq n_L + 2m$ より，$x(n+1) \leq R_L$ を得る．

同様に，$x(n+1) < 0$ かつ $x(n+1) < x(n)$ となる整数 $n \geq n_L + 4m$ が存在すると仮定する．補題 2.3 より，$x(\bar{g}(n)) = \max_{0 \leq j \leq m} x(n-j) > 0$ と次を満たす整数 $\bar{g}(n) \in [n-m, n]$ が存在する．

$$\begin{aligned} x(n+1) &\geq q^{n-\bar{g}(n)+1} x(\bar{g}(n)) - \left(\sum_{k=0}^{n-\bar{g}(n)} q^k \sum_{j=0}^{m-k} a_j(n-k) \right) f(x(\bar{g}(n))) \\ &\qquad - \left(\sum_{k=1}^{n-\bar{g}(n)} q^k \sum_{j=m-k+1}^{m} a_j(n-k) \right) f(L) \\ &\geq \varphi(x(\bar{g}(n))) - r_2 f(R_L) \geq S_L. \end{aligned}$$

$x(k+1) < S_L$ となる整数 $k \geq n_L + 4m$ が存在するならば，仮定より，$x(n+1) < 0$, $x(n+1) < x(n)$, $x(n+1) < S_L$ となる整数 $n \geq n_L + 4m$ が存在することになり，矛盾する．これより，任意の $n \geq n_L + 4m$ に対して，$x(n+1) \geq S_L$ となる．よって (2.3) を得る．

さらに，任意の $L < 0$ に対し，(2.5) を仮定し，$\underline{L} = \liminf_{n\to\infty} x(n)$ とおく．$\underline{L} < 0$ ならば，$S_{\underline{L}} > \underline{L}$ が成り立つ．それゆえに，任意の $n \geq \bar{n}_{\underline{L}}$ に対して，$x(n) \geq S_{\underline{L}} > \underline{L}$ を満たす整数 $\bar{n}_{\underline{L}} \geq n_{\underline{L}} + 2m$ が存在することになり，矛盾する．よって，$\underline{L} = 0$ と $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ が成り立つ． □

注意 2.2 補題 2.1, 2.2 と 2.4 により，(1.1) の零解は一様安定である．それゆえに，$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ は (1.1) の零解が大域漸近安定であることを示している．

注意 2.3 定理 1.1 に対する (1.8) の r_1, r_2 と $\varphi(x)$ の定義が次の

$$\begin{cases} r_1 = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} q^k \sum_{j=0}^{m-k} a_j(n-k), \qquad r_2 = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} q^k \sum_{j=m-k+1}^{m} a_j(n-k) \\ \varphi(x) = \bar{q}x - r_1 f(x), \qquad \bar{q} = q^{m+1}, \qquad \hat{x} = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\bar{q}}}{2\bar{q}} \end{cases} \tag{2.6}$$

によって置き換えられることは，定理 1.1 の証明を少し工夫するだけで示される．

3 定理の証明

3 節では，定理 1.1 の (1.9) と (1.10) の十分条件を示す．

$\tilde{\varphi}(x) = \bar{q}x - (r_1 + r_2) f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ とおき，$\hat{z}$ は $\tilde{\varphi}'(x) = 0$ の唯一解とする．このとき，$\tilde{\varphi}(x)$ は $(-\infty, \hat{z}]$ で狭義単調増加関数であり，$\tilde{\varphi}(x)$ は $[\hat{z}, +\infty)$ で単調減少関数である．まず，基礎となる補題を示そう (Uesugi 他 [12; Lemma 3.1], El-Morshedy [1; Lemma 3.3 and Theorem 3.1] 参照)．

補題 3.1

$$r_1 > \bar{q}, \qquad かつ \qquad r_1 + r_2 \leq 1 + \bar{q} \tag{3.1}$$

を仮定する．このとき，$\varphi(x)$ は唯一の極値点 $L^* = \ln(\bar{q}/r_1) < 0$ を持ち，それは極大点である．さらに，$\tilde{\varphi}(x)$ は $[L^*, \tilde{\varphi}(L^*)]$ で狭義単調減少関数であり，

$$\tilde{\varphi}([L^*, \tilde{\varphi}(L^*)]) \subset [L^*, \tilde{\varphi}(L^*)] \quad および，任意の\ x \in [L^*, \tilde{\varphi}(L^*)]\ に対し，\ S\tilde{\varphi}(x) < 0. \tag{3.2}$$

また,

$$\text{任意の } L^* \le L < 0 \text{ に対し,} \ \tilde{\varphi}^2(L) > L. \tag{3.3}$$

証明 $\varphi'(x) = \bar{q} - r_1 e^x$ と $\tilde{\varphi}'(x) = \bar{q} - (r_1 + r_2)e^x$ より, (3.1) から, $\varphi(x)$ は唯一の極値点 $L^* = \ln(\bar{q}/r_1) < 0$ を持ち, それは極大点である. また, $\tilde{\varphi}'(L^*) = -r_2 e^{L^*} < 0$ となる. それゆえに, $x \in [L^*, \tilde{\varphi}(L^*)]$ に対し, $0 > L^* > \hat{z}$ かつ $\tilde{\varphi}'(x) < 0$ となり, $\tilde{\varphi}(x)$ は $[L^*, \tilde{\varphi}(L^*)]$ で狭義単調減少関数になる. さらに, $\tilde{\varphi}''(x) = \tilde{\varphi}'''(x) = -(r_1 + r_2)e^x$ と

$$\begin{aligned}S\tilde{\varphi}(x)(\tilde{\varphi}'(x))^2 &= \tilde{\varphi}'''(x)\tilde{\varphi}'(x) - \tfrac{3}{2}(\tilde{\varphi}''(x))^2 = \{(\bar{q} - (r_1 + r_2)e^x) - \tfrac{3}{2}(-(r_1 + r_2)e^x)\}(-(r_1 + r_2)e^x) \\ &= (\bar{q} + \tfrac{(r_1+r_2)e^x}{2})(-(r_1 + r_2)e^x) < 0\end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで, $\hat{z} \le x < 0$ に対し, $\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(x)) > x$ を示そう. $\hat{z} \le x < 0$ に対し, $g_1(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(x)) - x$ とおく. $\hat{z} \le x < 0$ に対して, $0 \le (r_1 + r_2)e^x - \bar{q} < 1$ となり,

$$\begin{aligned}g_1(x) &= \bar{q}\{\bar{q}x - (r_1 + r_2)(e^x - 1)\} - (r_1 + r_2)\{\exp(\bar{q}x - (r_1 + r_2)(e^x - 1)) - 1\} - x \\ &= \bar{q}^2 x + (r_1 + r_2)\{\bar{q} + 1 - (\bar{q}e^x + \exp(\bar{q}x - (r_1 + r_2)(e^x - 1)))\} - x \\ g_1'(x) &= \bar{q}^2 + (r_1 + r_2)\{-\bar{q}e^x - (\bar{q} - (r_1 + r_2)e^x)\exp(\bar{q}x - (r_1 + r_2)(e^x - 1))\} - 1 \\ &= (\bar{q}^2 - 1) \\ &\qquad + (r_1 + r_2)\{-\bar{q}e^x + ((r_1 + r_2)e^x - \bar{q})\exp((r_1 + r_2) + \bar{q}(x - 1) - ((r_1 + r_2)e^x - \bar{q}))\} \\ &\le (\bar{q}^2 - 1) + (r_1 + r_2)\{-\bar{q}e^x + \exp((r_1 + r_2) + \bar{q}(x - 1) - 1)\} \\ &\le (\bar{q}^2 - 1) + (r_1 + r_2)\{-\bar{q}e^x + e^{\bar{q}x}\} \\ &\le (\bar{q}^2 - 1) + (1 + \bar{q})(-\bar{q} + 1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

が成り立つ. なぜならば, $0 \le (r_1 + r_2)e^x - \bar{q} < 1$, また,

$$r_1 + r_2 \le 1 + \bar{q}, \quad ((r_1 + r_2)e^x - \bar{q})e^{-((r_1+r_2)e^x - \bar{q})} \le e^{-1}, \quad -\bar{q}e^x + e^{\bar{q}x} \ge 0$$

であり, $g_2(t) = t^{\bar{q}} - \bar{q}t - (1 - \bar{q})$, $0 < t < 1$ に対して, $g_2'(t) = \bar{q}(t^{\bar{q}-1} - 1) > 0$ である. よって, $g_2(t) < g_2(1) = 0$ となることから言える. このとき, $g_1(x) < g_1(0) = 0$ であり, $\hat{z} \le x < 0$ に対して, $\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(x)) > x$ となる. したがって, 与式 (3.2), (3.3) を得る. □

補題 3.1 は $0 < r_1 \le 2$ かつ $r_2 = 0$ のとき, $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ となることを示している. El-Morshedy [1; Lemma 3.3] により, 任意の $0 < R \le \tilde{\varphi}(L^*)$ に対して, $\tilde{\varphi}^2(R) < R$ が成り立つ.

(1.9) の後半の条件に関し, 次の補題を得る. ここで, $\hat{x}$ は $\bar{q}x^2 + x - 1 = 0$ 正の解であることに注意.

補題 3.2

$$r_1 > \bar{q}, \quad r_1 + r_2 \le 1 + \bar{q}, \quad \text{かつ} \quad \frac{r_1 + r_2}{\bar{q}}\left(\frac{\bar{q}}{r_1}\right)^{\bar{q}} e^{r_1 + r_2 - \bar{q}} \le \frac{e^{\hat{x}}}{1 - \hat{x}} \tag{3.4}$$

を仮定する.

a) $L \le 0$ に対し,

$$G_1(L) = \varphi(\bar{R}_L^*) - r_2 f(\bar{R}_L^*) - L, \quad \text{かつ} \quad \bar{R}_L^* = \varphi(L^*) - r_2 f(L) \tag{3.5}$$

とおく. このとき, 次が成り立つ.

i) $\lim_{L\to-\infty} G_1(L) = +\infty.$

ii) $G_1(L^*) = \tilde{\varphi}^2(L^*) - L^* > 0$.
iii) $\lim_{L\to-\infty} G_1'(L) = -1$, $G_1'(L^*) < 0$. また，$\tilde{L} < 0$ に対し，$G_1''(\tilde{L}) = 0$ のとき，$G_1'(\tilde{L}) \le 0$ となる．
よって，任意の $L \le L^*$ に対し，$G_1'(L) \le 0$ となり，$G_1(L) > 0$ となる．
b) $L \le 0$ に対し，

$$G_2(L) = \varphi(\bar{R}_L) - r_2 f(\bar{R}_L) - L, \quad \text{かつ} \quad \bar{R}_L = \varphi(L) - r_2 f(L) \tag{3.6}$$

とおく．このとき，任意の $L^* \le L < 0$ に対し，$G_2(L) = \tilde{\varphi}^2(L) - L > 0$ となる．

(1.9) の前半の条件に関し，以下の 2 つの補題を得る．

補題 3.3

$$r_1 < \bar{q}, \quad r_2 \le 1, \quad \text{かつ} \quad \frac{r_1 + r_2}{\bar{q}} e^{r_2} \le \frac{e^{\hat{x}}}{1 - \hat{x}} \tag{3.7}$$

を仮定する．このとき，$\varphi(x)$ は唯一の極値点 $R^* = \ln(\bar{q}/r_1) > 0$ を持ち，それは極大点である．
a) $-\infty < \hat{L} < 0$ は $\varphi(-r_2 f(\hat{L})) = 0$ によって唯一定まる．$L \le 0$ に対し，

$$G_3(L) = \varphi(\bar{R}_L) - r_2 f(\bar{R}_L) - L, \quad \text{かつ} \quad \bar{R}_L = -r_2 f(L) \tag{3.8}$$

とおく．このとき，次が成り立つ．
i) $\lim_{L\to-\infty} G_3(L) = +\infty$.
ii) $G_3(0) = 0$.
iii) $\lim_{L\to-\infty} G_3'(L) = -1$, $G_3'(0) < 0$ かつ，$\tilde{L} < 0$ に対し，$G_3''(\tilde{L}) = 0$ のとき，$G_3'(\tilde{L}) \le 0$ となる．
よって，任意の $L \le \hat{L}$ に対し，$G_3'(L) \le 0$ となり，$G_3(L) > 0$ となる．
b) $L \le 0$ に対し，

$$G_4(L) = -r_2 f(-r_2 f(L)) - L \tag{3.9}$$

とおく．このとき，任意の $\hat{L} < L < 0$ に対して，$G_4(L) > 0$ となる．

$r_2 \le 1$ の必要十分条件は $-r_2 f(-r_2 f(L)) > L$ であることに注意しよう．その理由は，$r_2 > 1$ のとき，$G_4(0) = 0$ かつ $G_4'(0) = r_2^2 - 1 > 0$ が成り立ち，これは任意の $L_0 < L < 0$ に対し，$G_4(L) < 0$ となる十分小さい $-L_0 > 0$ が存在することを意味しているからである．

補題 3.4

$$r_1 = \bar{q}, \quad r_2 \le 1, \quad \text{かつ} \quad \frac{\bar{q} + r_2}{\bar{q}} e^{r_2} \le \frac{e^{\hat{x}}}{1 - \hat{x}} \tag{3.10}$$

を仮定する．このとき，$\varphi(x)$ は唯一の極値点 $R^* = 0$ を持ち，それは極大点である．$r_1 = \bar{q}$ となる (3.8) の $G_3(L)$ は，任意の $L < \hat{L} = 0$ に対し，$G_3(L) > 0$ となる．

定理 1.1 の証明 $0 < r_1 \le 1 + \bar{q}$ かつ $r_2 = 0$, また，(3.4), (3.7) と (3.10), のそれぞれの場合に対し，各補題 3.1-3.4 は補題 2.4 の条件 (2.5) を満足するので，$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ を示している．ゆえに，注意 2.2, 次の補題 3.5 と定理 A から，定理 1.1 が示される． □

(1.10) の条件に関し，次の補題を得る．

補題 3.5 $f(x) = e^x - 1$ に対し，

$$\begin{cases} r_1 \le \bar{q} \ \text{のとき，} r_1 + r_2 \le 1 + \bar{q}/2, \ \text{もしくは} \ r_2 \le 1, \ \frac{r_1+r_2}{\bar{q}} e^{r_2} > \frac{e^{\hat{x}}}{1-\hat{x}} \ \text{かつ} \ G_3(\delta) > 0, \\ r_1 > \bar{q} \ \text{のとき，} r_1 + r_2 \le 1 + \bar{q}, \ \frac{r_1+r_2}{\bar{q}} (\frac{\bar{q}}{r_1})^{\bar{q}} e^{r_1+r_2-\bar{q}} > \frac{e^{\hat{x}}}{1-\hat{x}} \ \text{かつ} \ G_1(\alpha) > 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

を仮定する．ただし，$G_1(x), G_3(x), \alpha, \delta$ は定理 1.1 で定義されたものである．このとき，(1.1) の零解は大域漸近安定である．

4 応用例

次の遅延微分方程式は動物の血液セルの再生モデルとして知られる (Wazewska-Czyzewska and Lasota [13] 参照).

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\alpha N(t) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j e^{-\nu N(t-\tau_j)}, \quad t \geq 0, \ \ \alpha, \beta_j, \tau_j \geq 0, \ \ \nu, \beta = \sum_{j=0}^{m} \beta_j > 0. \tag{4.1}$$

この差分版である次の離散 Wazewska-Czyzewska and Lasota モデルを考える.

$$y_{n+1} = qy_n + \sum_{j=0}^{m} \beta_j e^{-\gamma y_{n-j}}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4.2}$$

ただし, $0 < q \leq 1$, $\gamma > 0$, $\beta_j \geq 0$, $\beta = \sum_{j=0}^{m} \beta_j > 0$ とする.

$0 < q < 1$ となる (4.2) に対しては, Karakostas, Philos and Sficas [3] によって, (4.2) の正の平衡点を y^* とおくと, 次の条件が満たされたときに y^* はすべての正の解に対する大域吸引性を持つことが知られている.

$$\beta\gamma \leq (1-q)e. \tag{4.3}$$

特に, $\gamma y^* \leq 1$ ならば,

$$\frac{\beta\gamma e^{-1}}{1-q} \leq \frac{\beta\gamma e^{-\gamma y^*}}{1-q} = \gamma y^* \leq 1$$

で (4.3) は満たされる. ここで,

$$x(n) = \gamma(y^* - y_n) \tag{4.4}$$

とおくとき, (4.2) は次のように (1.1) の形に書き直される. ただし, $0 < q \leq 1$ である.

$$x(n+1) = qx(n) - \gamma \sum_{j=0}^{m} \beta_j e^{-\gamma y^*} (e^{x(n-j)} - 1). \tag{4.5}$$

この場合, $f(x) = e^x - 1$ に対して, (1.2) が成立し, また, $a_j(n) = \gamma\beta_j e^{-\gamma y^*}$, $0 \leq j \leq m$ に対して, (1.3) を満足する.

定理 1.1 は (4.5) に対し, $0 < q \leq 1$ および, $-\infty < x(n) < \infty$ で零解が大域漸近安定であるための十分条件を考え, また, 条件 $r_1 + r_2 \leq 1 + \bar{q}$ は, $(1-\bar{q})\gamma y^* \leq 1 + \bar{q}$, したがって, $\beta\gamma \leq (1-q)\frac{1+\bar{q}}{1-\bar{q}} e^{\gamma y^*}$ と同値である. 一方, (4.4) で $y_n > 0$ に制限すると, $x(n) < \gamma y^*$ となり, Tkachenko and Trofimchuk [10] の一般化 Yorke 条件 (1.6) が適用できるためには, $\gamma y^* \leq 1$ つまり, (4.5) で $x(n) < 1$ という制限と (1.7) という条件が付く.

次に, 'Nicolson's blowflies' 遅延微分方程式の離散版を考える (たとえば, Györi and Trofimchuk [2] 参照).

$$y_{n+1} = qy_n + \sum_{j=0}^{m} \beta_j y_{n-j} e^{-y_{n-j}}, \quad \beta_j \geq 0, \quad \beta = \sum_{j=0}^{m} \beta_j > 0. \tag{4.6}$$

y^* を $(1-q)y^* = \beta y^* e^{-y^*}$ によって決まる唯一の平衡点 $y^* > 0$ とし, $x(n) = y^* - y_n$, $n \geq -m$ に対して, (4.6) により, 次が成り立つ.

$$x(n+1) = qx(n) - \sum_{j=0}^{m} \beta_j \{(y^* - x(n-j))e^{-(y^* - x(n-j))} - y^* e^{-y^*}\}. \tag{4.7}$$

ここで，

$$f_j(x) = (1 - \frac{x}{y^*})e^x - 1, \quad a_j(n) = y^* e^{-y^*} \beta_j, \quad 0 \le j \le m \tag{4.8}$$

とおくと，(4.7) は (1.1) のように書き直され，$f(x) = e^x - 1$ に対して，(1.2) が成立し，また，(1.3) を満足する．このとき，(4.7) に定理 1.1 を適用できる．

$q = 1$ の場合の (1.9) を満足する (r_1, r_2) の範囲を示す図 1 より考察されるように，$0 < q \le 1$ に対する (1.1) の零解が大域漸近安定となる十分条件を与える定理 1.1 は，Tkachenko and Trofimchuk [10] の (1.7) 等の制限のある従来の結果に比べて，大幅な改良となっている．

参考文献

[1] H. A. El-Morshedy, The global attractivity of difference equations of nonincreasing nonlinearities with applications, *Comput. Math. Appl.* **45** (2003), 749-758.

[2] I. Györi and S. Trofimchuk, Global attractivity and persistence in discrete population model, *J. Differ. Equations Appl.* **6** (2000), 647-665.

[3] G. Karakostas, Ch. G. Philos and Y. G. Sficas, The dynamics of some discrete population models, *Nonlinear Anal.* **17** (1991), 1069-1084.

[4] H. Matsunaga, T. Hara and S. Sakata, Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay, *Comput. Math. Appl.* **41** (2001), 543-551.

[5] Y. Muroya, Global stability for separable nonlinear delay differential equations, *Comput. Math. Appl.* **49** (2005), 1913-1927.

[6] Y. Muroya, A global stability criterion in scalar delay differential equations, submitted in *J. Math. Anal. Appl.*

[7] Y. Muroya and E. Ishiwata, Global stability for nonlinear difference equations with variable delay, *Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Tokyo Japan 2003* (2004), 347-358.

[8] 室谷義昭，石渡恵美子, 複数の遅れを持つ非線形差分方程式の大域的安定性, 京都大学数理解析研究所講究録 1372 (2004) 110-116.

[9] J. W-H So and J. S. Yu, Global stability in a logistic equation with piecewise constant arguments, *Hokkaido Math. J.* **24** (1995), 269-286.

[10] V. Tkachenko and S. Trofimchuk, Global stability in difference equations satisfying the generalized Yorke condition, *J. Math. Anal. Appl.* **303** (2005), 173-187.

[11] V. Tkachenko and S. Trofimchuk, A global attractivity criterion for nonlinear nonautonomous difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, in press.

[12] K. Uesugi, Y. Muroya and E. Ishiwata, On the global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.* **294** (2004), 560-580.

[13] M. Wazewska-Czyzewska and A. Lasota, Mathematical problems of the dynamics of the red-blood cells systems, *Ann. Polish Math. Soc. Series III, Appl. Math.* **17** (1988), 23-40.

[14] J. S. Yu, Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay, *Comput. Math. Appl.* **36** (1998), 203-210.