数理解析研究所講究録
1492巻 2006年 56-64

A fixed-point theorem for discrete-group actions on Hadamard spaces

井関 裕靖 (Hiroyasu Izeki), 東北大学大学院理学研究科
近藤 剛史 (Takefumi Kondo), 京都大学大学院理学研究科
納谷 信 (Shin Nayatani), 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1 序

離散群Γの距離空間Yへの等長的作用が常に固定点をもつとき,「ΓはYに対する固定点性質をもつ」ということにする. 例えば, 近藤氏が[6]で紹介しているKazhdanの性質(T)は, Hilbert空間に対する固定点性質として特徴づけられる. 群の固定点性質は様々な興味深い現象と関わりをもっているが, ここでは次の事実を紹介しておきたい.

事実 1.1. ΓがHilbert空間, Riemann対称空間$SL(m,\mathbb{R})/SO(m)$およびBruhat-Titsビルディング$PGL(m,\mathbb{Q}_r)/PGL(m,\mathbb{Z}_r)$ (mは任意の自然数で, rは任意の素数)に対する固定点性質をもつならば, 任意の自然数nと任意の準同型$\rho:\Gamma\longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$に対して$\rho(\Gamma)$は有限群になる.

仮定に現れる空間は, いずれもHadamard空間(§2参照)と呼ばれる非正曲率距離空間である. 上の事実が非自明な主張になるのは, もちろんΓが無限群の場合である. 無限群からの準同型写像の像が有限群となってしまうとき, その準同型はしばしばほとんど自明な準同型と呼ばれる. 上の事実は, 仮定にあるような固定点性質をもつ無限群の有限次元線形表現はほとんど自明なものしかない, すなわち, このような無限群の有限次元線形表現はほとんど情報をもっていない, ということを主張している.

本稿では, 有限生成群が, Hilbert空間とは限らない, より一般の非正曲率距離空間(後に定義するHadamard空間)に対する固定点性質をもつための十分条件を紹介する. 離散群ΓがHadamard空間に対する固定点性質をもつための十分条件は[3], [4]においても論じられているが, そこでは, Γの固有不連続かつ余有限な単体的作用を許容する単体複体Xの存在が仮定され, 固定点性質をもつための十分条件はXに対する条件として述べられていた. 本稿では, [4]の議論を改良することにより, このような単体複体Xの存在を仮定せず, 群の表示の情報(とYの幾何学的な不変量)だけからΓがHadamard空間Yに対する固定点性質をもつための十分条件(定理3.6, 3.9)

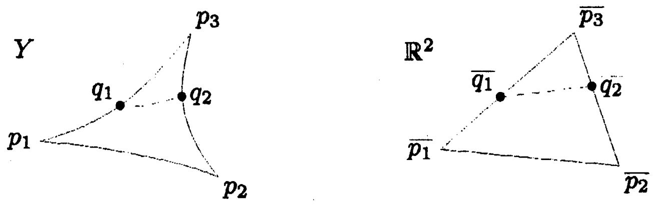
を与える．この結果は，近藤氏が [6] で紹介したランダム群に対する固定点性質を導くのに用いられている．詳細については [6] を参照されたい．

Gromov によれば，あるモデルにおけるランダム群の任意の有限次元線形表現はほとんど自明になるらしい．現在のところ，上に紹介した事実と我々の結果の応用としてこの主張を示すことはできないが，最近の研究の進展により，群の固定点性質や固定点性質をもつ群の分布に関する理解は急速に深まっているように思われる．

2 Hadamard 空間

この節では Hadamard 空間に関する基本的な事項の準備をする．参考文献として [2] を挙げておく．

(Y,d) を距離空間とする．等長的な埋込み $c:[0,l]\longrightarrow Y$，すなわち $d(c(t),c(t'))=|t-t'|$ を満たす区間 $[0,l]$ から Y への写像を**測地線**という．また，Y の任意の 2 点 p, q に対し，p と q を結ぶ測地線が存在するとき，(Y,d) は**測地的**と呼ばれる．Y の 3 点 p_1, p_2, p_3 を頂点とし，辺が測地線になっているような三角形を**測地三角形**と呼び，$\Delta(p_1,p_2,p_3)$ で表す．Y の測地三角形 $\Delta(p_1,p_2,p_3)$ に対し，$\Delta(p_1,p_2,p_3)$ と同じ辺の長さをもつ $\mathbb{R}^2$ の三角形 $\Delta(\overline{p_1},\overline{p_2},\overline{p_3})$ を $\Delta(p_1,p_2,p_3)$ の**比較三角形**と呼ぶ．q を $\Delta(p_1,p_2,p_3)$ の辺上の点とする．q が辺 p_ip_j 上の点であるとき，q の**比較点** $\overline{q}$ を比較三角形 $\Delta(\overline{p_1},\overline{p_2},\overline{p_3})$ の辺 $\overline{p_i p_j}$ 上の点で $d(p_i,q)=d(\overline{p_i},\overline{q})$, $d(p_j,q)=d(\overline{p_j},\overline{q})$ を満たす点として定義する．測地的距離空間 (Y,d) の測地的三角形 $\Delta(p_1,p_2,p_3)$ が **CAT(0) 性質**を満たすとは，$\Delta(p_1,p_2,p_3)$ の辺上の任意の 2 点 q_1, q_2 に対し，$d(q_1,q_2)\le d(\overline{q_1},\overline{q_2})$ が成立することをいう．ただし，$\overline{q_1}$, $\overline{q_2}$ はそれぞれ q_1, q_2 の比較点である．測地的距離空間 (Y,d) が **CAT(0) 空間**であるとは，(Y,d) の任意の比較三角形が CAT(0) 性質を満たすことをいう．



$d_Y(q_1,q_2)\le d_{\mathbb{R}^2}(\overline{q_1},\overline{q_2})$

定義から，CAT(0) 空間 (Y,d) の 2 点を結ぶ測地線は一意的であること，Y が可縮であることが容易にしたがう．また，距離空間として完備な CAT(0) 空間を **Hadamard 空間**と呼ぶ．単連結で断面曲率が非正な完備 Riemann 多様体は Hadamard 空間である．逆に，完備 Riemann 多様体 (Y,g) が CAT(0) 空間なら (Y,g) の断面曲率は非正になる．CAT(0) 性質は，Riemann 幾何における非正曲率性の距離空間への拡張 (の一つ) なのである．$SL(m,\mathbb{R})/SO(m)$ 等の既約な非コンパクト型 Riemann 対称空間は非正の断面曲率をもつ完備 Riemann 多様体の重要な例である．以下に Riemann 多様体ではない Hadamard 空間の例を幾つか挙げておく．

例 1. 若干の注意が必要であるが, 単連結で非正の断面曲率をもつ完備な無限次元 Riemann-Hilbert 多様体も Hadamard 空間になることが示される. このクラスには Hilbert 空間や普遍 Teichmüller 空間等, 局所コンパクトではない重要かつ興味深い例が含まれている.

例 2. 樹木, すなわち単連結な 1 次元単体複体 Y に, 各辺 (1 単体) の長さを 1 とし, $p, q \in Y$ の距離を p と q を結ぶ最短の折れ線の長さにより定めると, Y は Hadamard 空間になる. 各辺の長さを 1 としているので, Y の単体的自己同型は等長変換として Y に作用する.

例 3. r を素数, $\mathbb{Q}_r$ を r 進数のなす体, $\mathbb{Z}_r$ を r 進整数のなす環とする. $PGL(n, \mathbb{Q}_r)$, $PGL(n, \mathbb{Z}_r)$ で, それぞれ $GL(n, \mathbb{Q}_r)$ および $GL(n, \mathbb{Z}_r)$ をスカラー行列のなす正規部分群で割って得られる群とすると, 自然な位相に関し, $PGL(n, \mathbb{Z}_r)$ は $PGL(n, \mathbb{Q}_r)$ の極大コンパクト部分群となる. $Y = PGL(n, \mathbb{Q}_r)/PGL(n, \mathbb{Z}_r)$ には $\mathbb{R}^{n-1}$ の単体分割である Coxeter 複体を組み合わせて得られる単体複体の構造が入る. Y には, 各 Coxeter 複体の自然な Euclid 距離から距離が定まり Hadamard 空間となる. この Y は Bruhat-Tits ビルディングの例となっている. $n = 2$ のとき, Y は樹木 (tree) である.

以下に, 次節で必要となる幾つかの概念を定義しておく.

定義 2.1. Y を Hadamard 空間とする.

(1) c, c' を $p \in Y$ を始点とする測地線とする. c と c' の p における**角度** $\angle_p(c, c')$ を

$$\angle_p(c, c') = \lim_{t, t' \to 0} \angle_{\overline{p}}(\overline{c(t)}, \overline{c'(t')})$$

で定義する. ここで, $\angle_{\overline{p}}(\overline{c(t)}, \overline{c'(t')})$ は比較三角形 $\Delta(\overline{p}, \overline{c(t)}, \overline{c'(t')}) \subset \mathbb{R}^2$ の辺 $\overline{pc(t)}$ と $\overline{pc'(t)}$ のなす角度を表す.

(2) $p \in Y$ を始点とする測地線の集合に同値関係 $\sim$ を $c \sim c' \iff \angle_p(c, c') = 0$ により定める. このとき, $\angle_p$ は同値類の集合 $(S_pY)^\circ = \{p$ を始点とする測地線 $\}/\sim$ の距離になる. この距離を同じ記号 $\angle_p$ で表す. 距離空間 $((S_pY)^\circ, \angle_p)$ の完備化 $(S_pY, \angle_p)$ を p における**方向空間** (space of directions) と呼ぶ.

(3) TC_pY を S_pY 上の錘

$$TC_pY = (S_pY \times \mathbb{R}_+)/(S_pY \times \{0\})$$

とする. $W, W' \in TC_pY$ をそれぞれ $W = (V, t)$, $W' = (V', t')$ で表す. ただし, $V, V' \in S_pY$, $t, t' \in \mathbb{R}_+$ である. このとき

$$d_{TC_pY}(W, W')^2 = t^2 + t'^2 - 2tt' \cos \angle_p(V, V')$$

により TC_pY に距離 $d_{TC_pY}(\cdot, \cdot)$ が定まる. 距離空間 (TC_pY, d_{TC_pY}) は再び Hadamard 空間となり, p における Y の**接錘** (tangent cone) と呼ばれる. TC_pY には内積 (もどき) が

$$\langle W, W' \rangle = tt' \cos \angle_p(V, V')$$

により定義される. $W \in TC_pY$ の長さ t を $|W|$ で表す.

(4) $\pi_p : Y \longrightarrow TC_pY$ を $\pi_p(q) = ([c], d_Y(p,q))$ で定義する. ここで, c は p と q を結ぶ測地線, $[c]$ は c の同値類である. この写像 π_p は距離を増やさない写像である.

注意 1. Y が断面曲率が非正な完備 Riemann 多様体であるとき, (4) の π_p は指数写像 $\exp_p : T_pY \longrightarrow Y$ の逆写像に他ならない. この場合に $\pi_p = \exp_p^{-1}$ が距離を増やさない写像になっていることはよく知られた事実である.

定義 2.2. Y を Hadamard 空間とする. μ をコンパクトな台をもつ Y 上の確率測度とすると, 関数

$$q \mapsto \int_Y d_Y(q,p)^2 \, d\mu(p)$$

の最小値を与える点 $\mathrm{bar}(\mu)$ が一意に存在する. この $\mathrm{bar}(\mu)$ を μ の**重心**と呼ぶ. また, 確率測度 μ が $p_i \in Y$ に台をもつ Dirac 測度 δ_{p_i} の一次結合 $\mu = \sum_{i=1}^m w_i \delta_{p_i}$ で与えられているとき, μ の重心 $\mathrm{bar}(\mu)$ を $\{p_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ の重み $\{w_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ をもつ重心と呼ぶことがある.

3　有限表示群の Hadamard 空間への等長的作用に対する固定点定理

$S = \{s_1, \cdots, s_m, s_1^{-1}, \cdots, s_m^{-1}\}$ を, $s \in S$ なら $s^{-1} \in S$ を満たす $2m$ 個の元からなる集合とする. S の元を有限個並べて得られる文字列 $R = s_{i_1}^{\pm 1} \cdots s_{i_l}^{\pm 1}$ を**語**, 語を構成する文字の個数 l を語の**長さ**という. 語 R が**簡約不可能**であるとは, r が $s_k s_k^{-1}$ または $s_k^{-1} s_k$ という文字列を含まないことをいう. $\mathcal{R}$ を簡約不可能な語のなす集合の部分集合とする. このとき, $P = \langle S, \mathcal{R} \rangle$ を**表示**と呼び, S を**生成元集合**, $\mathcal{R}$ を**関係式集合**と呼ぶ. S により生成される自由群 $F_S = \langle s_1 \rangle * \cdots * \langle s_m \rangle$ の $\mathcal{R}$ の正規閉包 ($\mathcal{R}$ を含むような F_S の正規部分群で最小のもの) $\overline{\mathcal{R}}$ による商 $F_S/\overline{\mathcal{R}}$ として得られる群を Γ_P で表す.

$\mathcal{R}_3 = \{R_1, \ldots, R_n\} \subset \mathcal{R}$ を $\mathcal{R}$ の元で長さが 3 のものからなる集合とする. S が有限集合であるから, $\mathcal{R}_3$ も有限集合である. また, $\widetilde{\mathcal{R}_3}$ を $\mathcal{R}$ に属する長さ 3 の語の巡回置換とその逆 ($s_a s_b s_c \in \mathcal{R}_3$ に対する $s_c^{-1} s_b^{-1} s_a^{-1}$) を重複も込めて集めた集合とする. したがって, $\#\widetilde{\mathcal{R}_3} = 6(\#\mathcal{R}_3)$ である.

$P = \langle S, \mathcal{R} \rangle$ を表示とする. $s \in S$ が定める Γ_P の元を $\overline{s}$ で表す. また, 以下では, Γ_P の Γ_P 自身への作用として, Γ_P の元を左からかけることにより定まる作用を考える. この作用から直積空間 $\Gamma_P \times \cdots \times \Gamma_P$ への Γ_P の対角作用が定まる. $m_2 : \Gamma_P \times \Gamma_P \times \Gamma_P \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$m_2(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = \#\{R = s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3} \mid \gamma_1 = \gamma_0 \overline{s_a},\ \gamma_2 = \gamma_1 \overline{s_b},\ \gamma_0 = \gamma_2 \overline{s_c}\}$$

により定義する. 明らかに, m_2 は対称で Γ_P 不変な $\Gamma_P \times \Gamma_P \times \Gamma_P$ 上の関数である. また, $\mathcal{R}_3$ は有限集合なので, 固定された $(\gamma_0, \gamma_1) \in \Gamma_P \times \Gamma_P$ に対して $\gamma \mapsto m_2(\gamma_0, \gamma_1, \gamma)$

の台は有限集合である．このことに注意して，$m_1 : \Gamma_P \times \Gamma_P \longrightarrow \mathbb{R}$, $m_0 : \Gamma_P \longrightarrow \mathbb{R}$ を帰納的に

$$m_1(\gamma_0, \gamma_1) = \sum_{\gamma \in \Gamma_P} m_2(\gamma_0, \gamma_1, \gamma), \quad m_0(\gamma_0) = \sum_{\gamma \in \Gamma_P} m_1(\gamma_0, \gamma)$$

で定義する．m_1 が対称であること，m_0, m_1 がともに Γ_P 不変であることは定義から明らかである．m_i $(i = 0, 1, 2)$ を Γ_P の**標準ウェイト**と呼ぶ．以下，混乱のおそれがないときは m_i の添字 i を省略する．

補題 3.1. m を Γ_P の標準ウェイトとする．

(1) 任意の $\varphi : \Gamma_P \times \Gamma_P \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，

$$\sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma_P} m(e, \gamma, \gamma')\varphi(\gamma, \gamma') = \sum_{R = s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} \varphi(\overline{s_a}, \overline{s_c}^{-1})$$

が成立する．

(2) 任意の $\psi : \Gamma_P \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_P} m(e, \gamma)\psi(\gamma) = \sum_{R = s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} \psi(\overline{s_a})$$

が成立する．

Y を Hadamard 空間，$\mathrm{Isom}(Y)$ を Y の等長変換群とする．準同型 $\rho : \Gamma_P \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$ に対し，ρ 同変写像 $f : \Gamma_P \longrightarrow Y$，すなわち，任意の $\gamma, \gamma' \in \Gamma_P$ に対し $f(\gamma'\gamma) = \rho(\gamma')f(\gamma)$ を満たす写像を考える．ρ 同変写像 f と $\gamma \in \Gamma_P$ に対し $F_\gamma : \Gamma_P \longrightarrow TC_{f(\gamma)}Y$ を

$$F_\gamma(\gamma') = \pi_{f(\gamma)}(f(\gamma'))$$

により定義する．ここで，$\pi_{f(\gamma)} : Y \longrightarrow TC_{f(\gamma)}Y$ は定義 2.1(4) で定義された写像である．

定義 3.2. $f : \Gamma_P \longrightarrow Y$ を ρ 同変写像とする．

(1) f のエネルギー $E(f)$ を

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_P} m(e, \gamma) d_Y(f(e), f(\gamma))^2$$

で定義する．

(2) $\{F_\gamma(\gamma') \mid \gamma' \in \Gamma_P\}$ の重み $\{m(\gamma, \gamma')/m(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma_P\}$ をもつ重心を $-\Delta f(\gamma) \in TC_{f(\gamma)}Y$ で表す．

注意 2. $\gamma' \mapsto m(\gamma, \gamma')$ の台は有限集合なので，上の定義の和は有限和である．補題 3.1 から

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{R = s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} d_Y(f(e), f(\overline{s_a}))^2$$

となることを注意しておく．

命題 3.3 (第一変分公式). $f:\Gamma_P \longrightarrow Y$ を ρ 同変写像とする. f が ρ 同変写像の中でエネルギーを最小にする写像なら, 任意の $V \in TC_{f(e)}Y$ に対して,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_P} m(e,\gamma)\langle V, F_e(\gamma)\rangle \leq 0$$

が成立する. さらに, $-\Delta f(e) = 0_{f(e)}$ である.

注意 3. ρ 同変写像 $f:\Gamma_P \longrightarrow Y$ は $e \in \Gamma_P$ の像 $f(e)$ で決まり, $f(e)$ は任意に選べるから,

$$\mathcal{M}_\rho = \{f:\Gamma_P \longrightarrow Y \mid f \text{ は}\rho \text{ 同変写像}\} = Y$$

である. この $\mathcal{M}_\rho$ と Y の同一視により, $\mathcal{M}_\rho$ には Hadamard 空間の構造が入る. ρ 同変写像のエネルギー E は, この距離に関して $\mathcal{M}_\rho$ 上の凸関数である. したがって, Jost [5], Mayer [7] により導入された勾配流 f_t が E に対しても定義される. この勾配流を生成する勾配ベクトル場にあたるものは定義されていないが, Mayer は勾配ベクトル場の大きさ (勾配流の速さ) $|\nabla_{-}E|$ を定義している. 上の命題3.3 の証明と $|\nabla_{-}E|$ の定義から

$$|\nabla_{-}E|(f) \geq |2(-\Delta f)(e)| \tag{3.1}$$

が示される. (cf. [4, pp. 18-19].)

定理 3.4. 任意の ρ 同変写像 $f:\Gamma_P \longrightarrow Y$ に対し, 以下の公式が成立する.

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{R=s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} \left[d_{TC_{f(e)}Y}(F_e(\overline{s_a}), F_e(\overline{s_c}^{-1}))^2 - |F_e(\overline{s_a})|^2\right] \\ &+ \sum_{R=s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} \left[d_Y(f(\overline{s_a}), f(\overline{s_c}^{-1}))^2 - d_{TC_{f(e)}Y}(F_e(\overline{s_a}), F_e(\overline{s_c}^{-1}))^2\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &m(e)|-\Delta f(e)|^2 \\ = &\sum_{R=s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} \left[d_{TC_{f(e)}Y}(F_e(\overline{s_a}), F_e(\overline{s_c}^{-1}))^2 - d_{TC_{f(e)}Y}(-\Delta f(e), F_e(\overline{s_a}))^2\right] \\ &+ \sum_{R=s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} \left[d_Y(f(\overline{s_a}), f(\overline{s_c}^{-1}))^2 - d_{TC_{f(e)}Y}(F_e(\overline{s_a}), F_e(\overline{s_c}^{-1}))^2\right]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

注意 4. (3.2) の右辺第2項の [ ] 内は, $\pi_e : Y \longrightarrow TC_eY$ が距離を増やさない写像であること, $F_e(\overline{s_a}) = \pi_e(f(\overline{s_a}))$ であることから, 非負の値をとる.

ここで, 表示 P に対する不変量 $\lambda_1(P, TC_pY)$ を

$$\lambda_1(P, TC_pY) = \inf_{\varphi} \left\{ \frac{\frac{1}{2}\sum_{R=s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} d_{TC_pY}(\varphi(\overline{s_a}), \varphi(\overline{s_c}^{-1})))^2}{\sum_{R=s_a s_b s_c \in \widetilde{\mathcal{R}_3}} d_{TC_pY}(\overline{\varphi}, \varphi(\overline{s_a}))^2} \right\}$$

により定義する (cf. [8]). ただし, $\overline{\varphi}$ は $\{\varphi(\gamma)|\gamma \in \Gamma_P\}$ の $\{m(e,\gamma)/m(e)|\gamma \in \Gamma_P\}$ を重みにもつ重心を表し, 右辺の下限は定値写像でないような全ての $\varphi : \Gamma_P \longrightarrow TC_pY$ についてとる. 補題 3.1 に注意すると,

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{1}{2}\sum_{R=s_as_bs_c\in\widetilde{\mathcal{R}_3}} d_{TC_{f(e)}Y}(F_e(\overline{s_a}), F_e(\overline{s_c}^{-1})))^2}{\sum_{R=s_as_bs_c\in\widetilde{\mathcal{R}_3}} d_{TC_{f(e)}Y}(-\Delta f(e), F_e(\overline{s_a}))^2}\\ =&\frac{\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\gamma'\in\Gamma_P} m(e,\gamma,\gamma')d_{TC_{f(e)}Y}(F_e(\gamma), F_e(\gamma'))^2}{\sum_{\gamma\in\Gamma_P} m(e,\gamma)d_{TC_{f(e)}Y}(-\Delta f(e), F_e(\gamma))^2}\end{aligned} \tag{3.3}$$

である. 表示 $P = \langle S, \mathcal{R}\rangle$ に対し, 次で定義されるグラフを $L(P)$ で表す:

$$\begin{cases}\{L(P)\ \text{の頂点}\} = S\\ \{L(P)\ \text{の辺}\} = \{(s_a^{-1}, s_b), (s_b^{-1}, s_c), (s_c^{-1}, s_a) \mid s_as_bs_c \in \mathcal{R}_3\}.\end{cases}$$

$TC_pY \cong \mathbb{R}$ のとき, (3.3) の右辺は $L(P)$ 上の関数に対する Rayleigh 商であり, $\lambda_1(P,\mathbb{R})$ はグラフ $L(P)$ のラプラス作用素の第一正固有値と一致する. この意味で, $\lambda_1(P, TC_pY)$ は (一般には線形構造をもたない)Hadamard 空間 TC_pY に値をとる写像の非線形固有値とみなされる.

公式 (3.2) の右辺第 1 項に $\lambda_1(P, TC_pY)$ の定義にある分子と分母の差が現われていることに注意されたい. (3.2) から $\lambda_1(P, TC_pY)$ によるエネルギー $E : \mathcal{M}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ の勾配評価が導かれる:

命題 3.5. 定数 $C > 1/2$ が存在して, 任意の $p \in Y$ に対して $\lambda_1(P, TC_pY) \geq C$ が満たされるなら, 正の定数 C_0 が存在して, 任意の $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$ と ρ 同変写像 $f : \Gamma_P \longrightarrow Y$ に対して

$$|-\Delta f(e)|^2 \geq C_0E(f)$$

が成立する.

この評価と (3.1) から, エネルギー E の勾配流の速さ $|\nabla_- E|$ が勾配流に沿って指数的に減衰することが導かれる. したがって, E の勾配流は時刻無限大で臨界点に収束する. 上の勾配評価によれば, 臨界点 f_0 において $E(f_0) = 0$, すなわち f_0 は定値写像である. ρ 同変写像 f_0 が定値写像なら, その像 $f_0(\Gamma_P)$ は明らかに $\rho(\Gamma_P)$ の固定点である. 以上の議論により, 次の定理が得られたことになる:

定理 3.6. Γ_P を表示 P から定まる有限生成群, Y を Hadamard 空間とする. 定数 $C > 1/2$ が存在して, 任意の $p \in Y$ に対して $\lambda_1(P, TC_pY) \geq C$ が成立するなら, 任意の $\rho : \Gamma_P \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$ に対し $\rho(\Gamma_P)$ は Y に固定点をもつ.

この結果を応用して具体的な Γ_P, Y に対する固定点性質を導くには $\lambda_1(P, TC_pY)$ の評価が必要である. $TC_pY = \mathbb{R}$ なら, これは線形変換の固有値評価に過ぎない. しかしながら, 一般の TC_pY に対しては, この $\lambda_1(P, TC_pY)$ の評価・決定は非常に困難である. ここでは, 次に導入する Y の幾何学的不変量 $\delta(Y)$ と $\mu_1(P) = \lambda_1(P,\mathbb{R})$ による $\lambda_1(P, TC_pY)$ の評価 (命題 3.8) を紹介しておく.

定義 3.7. Y を Hadamard 空間, μ を有限な台をもつ Y 上の確率測度とする. また, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, $\varphi : Y \longrightarrow \mathcal{H}$ を距離を増やさない写像で, かつ $|\varphi(p)| = d_Y(\mathrm{bar}(\mu), p)$ を満たすものとする. このとき, $\delta(Y)$ を

$$\delta(Y) = \sup_{\mu} \inf_{\varphi} \frac{|\int_Y \varphi \, d\mu|^2}{\int_Y |\varphi|^2 \, d\mu}$$

で定義する. ここで, sup, inf は, 上の性質を満たす μ, φ 全てにわたってとる.

例 4. Y が単連結かつ非正曲率な Riemann 多様体, または Hilbert 空間なら $\delta(Y) = 0$.

例 5. Y が樹木なら $\delta(Y) = 0$.

例 6. r を素数, $Y = PGL(3, \mathbb{Q}_r)/PGL(3, \mathbb{Z}_r)$ とすると

$$\delta(Y) \geq \frac{(\sqrt{r} - 1)^2}{2(r - \sqrt{r} + 1)}$$

である. $r = 2$ のときは

$$\delta(Y) \leq \frac{37 - 18\sqrt{2}}{28} = 0.4122\cdots$$

が成立する.

これらの例からも想像されるように, $\delta(Y)$ は Y の特異点の複雑さを Hilbert 空間への埋め込みを通して表す不変量になっている. この $\delta(Y)$ を用いると, $\lambda_1(P, TC_pY)$ に対する次の評価が得られる.

命題 3.8 (cf. [4, Proposition 5.3]). Y を Hadamard 空間とする. 任意の $p \in Y$ に対し

$$(1 - \delta(Y))\mu_1(P) \leq \lambda_1(P, TC_pY) \leq \mu_1(P)$$

が成立する.

定理 3.6 と命題 3.8 から, 近藤氏が述べた [6, 定理 3.3] がしたがう:

定理 3.9. Γ_P を表示 P により定まる有限生成群, Y を Hadamard 空間で $\mu_1(P) > 1/2(1 - \delta(Y))$ を満たすものとする. このとき, 任意の $\rho : \Gamma_P \longrightarrow \mathrm{Isom}(Y)$ に対し, $\rho(\Gamma_P)$ は Y に固定点をもつ.

定理 3.9 から, 近藤氏 [6] の説明にあるようにして, ランダム群の Hadamard 空間への等長的作用に対する固定点定理が導かれる.

参考文献

[1] W. Ballmann and J. Świątkowski, *On L^2-cohomology and property* (T) *for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, GAFA **7** (1997), 615–645.

[2] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[3] M. Gromov, *Random walks in random groups*, GAFA **13** (2003), 73–146.

[4] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces*, Geom. Dedicata **114** (2005), 147–188.

[5] J. Jost, *Nonlinear Dirichlet forms*, in New Directions in Dirichlet Forms, Studies in Advanced Mathematics AMS/IP, 1998, 1–48.

[6] T. Kondo, *Random groups and property* (T), in this volume.

[7] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. and Geom. **6** (1998), 199–253.

[8] M.-T. Wang, *Generalized harmonic maps and representations of discrete groups*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 545–563.