

## コルモゴロフ超流動乱流中における 渦糸長分布の自己生成

大阪市立大学理学部物理学科 三谷 陽 (Akira Mitani)

Faculty of Science,  
Osaka City University

液体<sup>4</sup>Heが2.17K以下で超流動状態に移り、液体の粘性が消失することがKapitzaにより発見されて以来、超流動は多くの研究者たちを魅了し続けてきた。超流動状態は、ミクロなスケールの統治則である量子力学が、流体の粘性と言うマクロな輸送現象に劇的な変化をもたらす、典型的な巨視的量子現象として注目された。通常の流体では見られない超流動状態に固有な性質の多くは、Tiszaの二流体モデルと呼ばれる現象論の導入により見事に説明された。二流体モデルでは、流体はフォノン・ロトンの素励起からなり粘性を伴う常流体と非粘性の超流体という独立な二つの成分から構成され、それぞれが密度 $\rho_n$ 、 $\rho_s$ を伴い、速度 $v_n$ 、 $v_s$ で流れるとする。二流体間では、運動量、エネルギーのやりとりがないため、非粘性である超流体成分の流れは半永久的に減衰しない。しかしながら、この流れがある臨界速度を超えると流れが減衰し、超流体は文字通りの永久流ではなくなる。これは、循環が循環量子 $\kappa$ の整数倍に量子化された量子渦が発生し、流れにより成長し複雑に絡みあった渦糸タングル、すなわち超流動乱流状態が実現したためである。従って、量子渦のダイナクスは超流動流の安定性と密接に関係し、また多くの興味深い現象を引き起こすため、現在でも精力的に研究されている。また、超流動中の渦度 $\omega$ は渦の存在する位置にのみ集中し、理想的な渦糸が実現していることが分かっている [1]。

近年、このような循環が量子化された量子渦糸からなる、絶対0度での量子乱流のエネルギースペクトルが、古典乱流と同様にKolmogorovの $-5/3$ 乗則を示すという、量子渦ダイナミクスの数値計算結果がAraki達やKobayashi達により発表された [2, 3]。量子乱流中の量子渦は、複素オーダーパラメータの位相欠陥として性格に定義できるオブジェクトであるため、古典乱流中の渦とは異なり乱流中の個々の渦糸の長さも明確にできる量となる。これを利用しAraki達は量子乱流の渦糸長分布

$n(l)$  を議論し、 $n(l) \propto l^{-1.38}$  という乱流の実空間での自己相似性を示す結果を得た [2]。ここで  $n(l)\Delta l$  は長さ  $l$  から  $l + \Delta l$  をもつ乱流中の渦数である。しかし、現在まで「なぜ絶対 0 度の超流動乱流で渦糸長分布の自己相似性が現れるのか?」、「何が乱流中の渦糸長分布に自己相似性を与えるのか」という問いに対して理論的に説明する具体的な研究は行われず、未だ未説明の問題であった。我々は局所誘導近似が良い近似となる、すなわち乱流中の渦同士の間相互作用が無視できる、希薄な乱流に焦点を絞り、この問いに解答を与える目的で研究を行った。

まず絶対 0 度での量子渦のダイナミクスの性質について振り返ってみたい。まず第一に前述のように量子渦は複素秩序パラメーターの位相欠陥として定義される。そのため境界の効果が無視できる場合、量子乱流は様々なスケールの「渦環」の集団であると解釈できる。また、粘性が存在しないため、渦環が消滅することも無く、唯一の渦環のトポロジカルな変化は渦同士の再結合にのみによって引き起こされる。第二に絶対 0 度では常流体が存在しないため、常流体と渦糸との相互作用である相互摩擦力が働かない。また、今回は局所誘導近似が成り立つ希薄な乱流を考えているため、乱流中の個々の渦糸の長さは、渦同士の再結合が起きない限り、ダイナミクスの過程で保存する。よって、渦糸長分布は乱流中で渦糸の再結合が起きない限り変化しない量である。第三に渦環同士の再結合によるトポロジカルな変化は図 1 の 2 つ、すなわち分裂型と結合型に分類できる。しかし、Tsubota 達による渦糸ダイナミクスの直接数値計算 [4] によって、乱流が希薄な場合、分裂型の再結合の発生頻度が 2~3 倍、結合型のそれより大きいことが知られている。そのため、今回は簡単のため分裂型の再結合のみを考えることにする。最後に渦糸のダイナミクスは動的スケールリング則が成り立つ。渦糸の運動方程式は局所誘導近似のもとで以下のように記述される。

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t_0} = \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \quad (1)$$

$$t_0 \equiv \kappa / (4\pi) t \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{s}$  は渦糸上の位置ベクトル、 $\mathbf{s}'$ 、 $\mathbf{s}''$  はそれぞれ、弧長をパラメータとしたときの 1 階、2 階微分を示す。また  $\kappa$  は循環量子である。この方程式は空間次元に入、時間次元に  $\lambda^2$  を掛けるスケール変換の元に不変の方程式である。このことから、統計的に考えた場合、あるスケールの渦輪が分裂するのに要する時間を  $T$  とすると、その渦輪の  $\lambda$  倍のスケールの渦輪が分裂するのに要する時間は  $\lambda^2 T$  となる。以上の

事実より我々は  $i$  と名付けられた渦環が単位時間当たり分裂型の再結合を行う確率は

$$P(i) \propto (1/l_i)^2 \quad (3)$$

と渦環のスケール  $l_i$  の逆数の2乗に比例すると考えることができる。

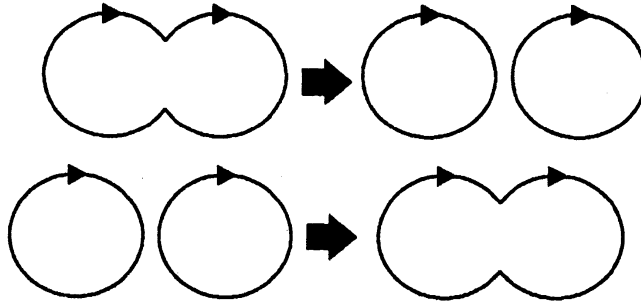


図1: 渦糸同士の再結合の2種。上が分裂型、下が結合型の再結合を表す。

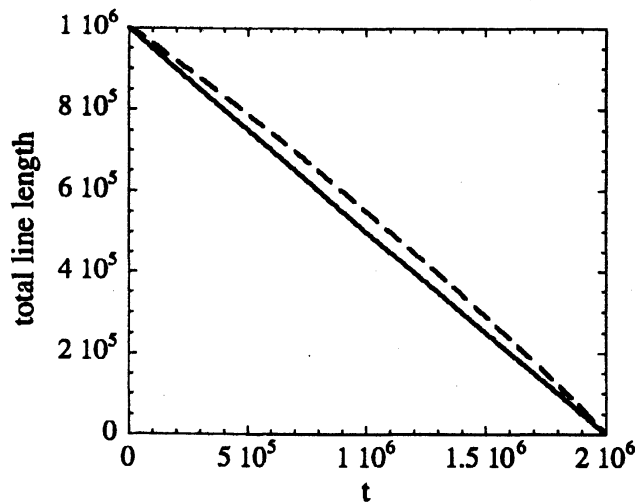


図2: 全渦糸長の時間依存性。実線は分裂確率として(4)式を用いた結果、破線は分裂確率として(5)式を用いた結果である。

以上の量子渦ダイナミクスの性質を鑑みれば、量子渦ダイナミクスシミュレーションで得られた渦糸長分布は、ダイナミカルスケーリング則によって支配された発生頻度で起こる、連続的な渦環の分裂の結果であると考えることができる。そのため絶対0度での超流動乱流の減衰は、以下に示すような非常に単純なモデルに帰着でき

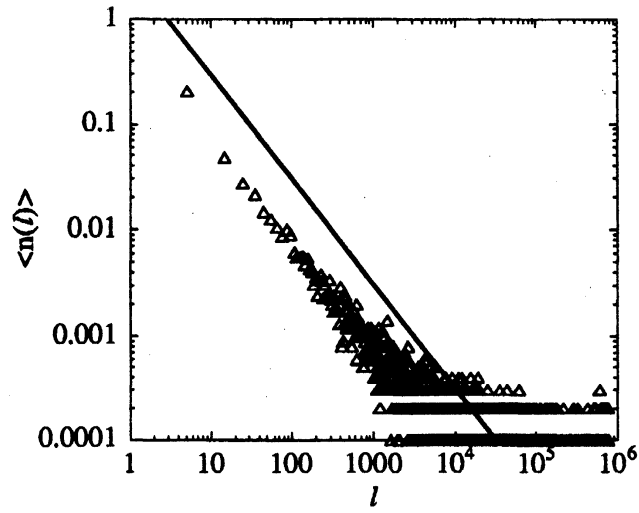


図 3: 我々のモデルによって得られた渦糸長分布。実線は  $l^{-1}$  に比例する。

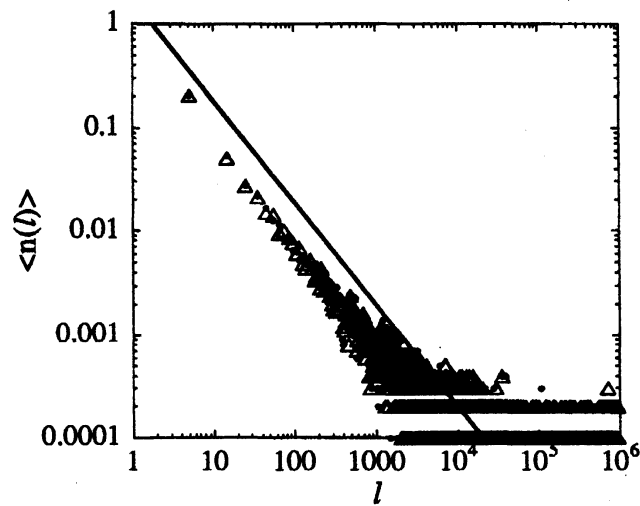


図 4: 我々のモデルによって得られた渦糸長分布。実線は  $l^{-1}$  に比例する。三角点は  $t = 5 \times 10^5$ 、丸点は  $t = 10^6$  で得られた渦糸長分布。

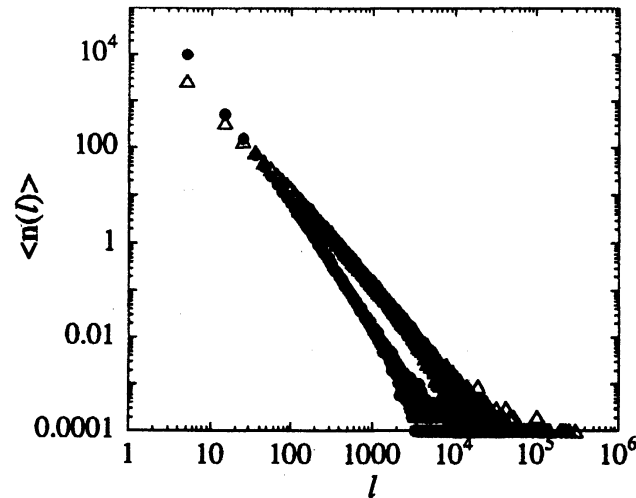


図5: 式(5)を分裂確率として用いた時の渦糸長分布。実線は $l^{-1}$ に比例する。三角点は $t = 5 \times 10^5$ 、丸点は $t = 10^6$ で得られた渦糸長分布。

る。まず初期状態として $m_0$ 個の渦環があるとする。それぞれの渦環の長さは $l_i$ とする。これらの渦環を毎時間ステップごとに1つの渦環を選択し渦環を分割する操作をおこなう。この時、長さ $l_i$ の渦環を分割する確率は

$$\Pi(l_i) = \frac{(1/l_i)^2}{\sum_j (1/l_j)^2}, \quad (4)$$

であり、渦環の長さ $\mathcal{R}l_i$ と $(1-\mathcal{R})l_i$ の二つの渦環に分裂することにする。ここで $\mathcal{R}$ は0~1の乱数とする。また、分裂に際しカットオフ長 $l_{min}$ より短い長さをもつ渦環が発生した場合、我々はこれを取り除く。この操作を $t$ 回繰り返すと、我々は様々なスケールを持つ渦環集団を得る。この渦環集団の渦糸長分布が絶対0度での超流動乱流の減衰過程の渦糸長分布に相当する。

以上のモデルに基づいて、数値シミュレーションを行った。以下に結果を示す。用いたパラメータは $m_0 = 1$ 、 $l_1 = 10^6$ 、 $l_{min} = 1$ である。また、以下<math>\langle \rangle</math>で囲まれた量は1000個のサンプルのアンサンブル平均を取ったものである。図2は全渦糸長の時間変化を示している。カットオフ長より小さい渦環を取り除くという操作により、全渦糸長が単調減少しているのがわかる。また図3は我々のモデルによって得られた減衰過程での渦糸長分布を示している。我々のモデルでの渦糸長分布が $l^{-1}$ に比例していることが見て取れる。これは、Araki達により得られた $l^{-1.38}$ とよい一致を

示しているのが分かる。また、渦糸ダイナミクスの数値シミュレーションでは減衰過程で絶対値、ベキともに時間に依存しないエネルギースペクトルを得ている。そのため、正しく減衰過程を記述するモデルは減衰過程で時間依存しない渦糸長分布をとると考えることができる。図4に減衰過程の各時刻に得られる渦糸長分布の比較を示す。明かに我々のモデルは減衰の過程で時間に依存しない渦糸長分布を作ることを示している。

では、ダイナミカルスケーリング則によるスケールに依存する分裂確率は、渦糸長分布のベキ則の発現に本当に必要であるのか？この疑問に答えるために我々は、分裂確率  $\Pi(l)$  を

$$\Pi(l) = \frac{(1/l_i)^0}{\sum_j (1/l_j)^0} = \text{const.} \quad (5)$$

と、仮定し、上記のシミュレーションと同様の計算を行った。図5は減衰の各ステージでの渦糸長分布をしめしている。分裂確率として式(5)を用いたモデルでは、各時刻での渦糸長分布のベキが時間変動しているのが見て取れる。これは上述の議論よりこのモデルは減衰を正しく記述していないことを示唆する。

本研究は、絶対0度での超流動乱流の減衰過程でのベキ則渦糸長分布の発現のメカニズムについて議論した。超流動乱流中の減衰過程は非常に単純なモデルに帰着できる。このモデルは「渦環の連続的な分裂」と「ダイナミカルスケーリング則に起因する分裂確率のスケール依存性」という2つの要素が、減衰過程でのベキ則渦糸長分布の発現を引き起こすことを示した。今回の研究では希薄乱流という理想化された系を想定したが、分裂型だけでなく、結合型の再結合も同様に起こりうる、比較的高密度な渦糸タングルでの系についてさらに研究を続けることにより我々は超流動乱流の自己相似性について新たな知見が得られると考えている。

## 参考文献

- [1] R. J. Donnelly, *Quantized vortices in helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [2] T. Araki, M. Tsubota, and S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 145301 (2002).
- [3] M. Kobayashi, M. Tsubota, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 065302 (2005).
- [4] M. Tsubota, T. Araki, and S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. B* **62**, 11751 (2000).