

周期流を用いたクエット乱流の解析

京大・工 木田重雄 (Shigeo KIDA)
京大・工 渡部 威 (Takeshi WATANABE)
京大・工 田谷貴男 (Takao TAYA)

1 はじめに

互いに反対方向に一定の速度で運動する 2 枚の平行な平板の間の流れは、レイノルズ数がある臨界値より大きい場合には、乱流状態が維持されることが知られている。このクエット系の流れの数値計算では、通常、平板の運動方向とそれに垂直な方向に周期条件が流れに課される。レイノルズ数が臨界値より大きくても、この周期条件の周期がある値より大きくなければ乱流は維持されない。この最小の周期をもつ流れをミニマル流という。クエット乱流の代表的な組織構造として、流れ方向渦と低速ストリークが知られている。Hamilton *et al.* (1995) は、クエット系のミニマル流の数値シミュレーションにおいて、これら 2 つの組織構造が互いに影響しあいながら、生成消滅を繰り返すことを示した。流れはほぼ周期的に変動するが、乱流状態は厳密に同じ状態に戻ることはない。Kawahara & Kida (2001) は、Hamilton *et al.* (1995) の数値シミュレーションと全く同じ条件のもとで、厳密に周期的に変動する流れを発見し、それが乱流とほぼ同様の時空間変化をすることを示した。本稿では、この周期流の乱流研究への応用のひとつとして、パッシブに流される線素の伸長率や方向と流れの瞬間場の相関関係を解析する。

2 クエット系

図 1 に示すように、距離 $2h$ だけ離れ互いに反対方向に速さ U で運動している平行な平板の間の流れを考える。流体の動粘性係数を ν とすると、この系の流れは、レイノルズ数 $Re = Uh/\nu$ が約 320 より大きいと乱流状態の維持されることが知られている。

さていま、流れは平板の運動方向とそれに垂直な方向にそれぞれ周期 L_x と L_z で周期的とし、平板上では粘着条件が満たされているとする。Hamilton *et al.* (1995) は、 $L_x = 5.513h$, $L_z = 3.770h$, $Re = 400$ とした数値シミ

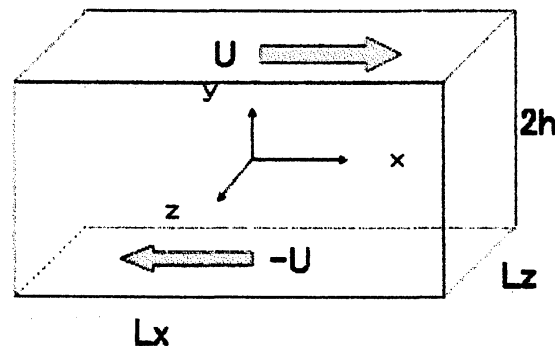


図 1: クエット系の座標系。距離 $2h$ だけ離れて互いに反対方向に同じ速さ U で運動する 2 つの平行な平板の間の流れを考える。

ュレーションを行ない、上述の定常乱流を実現した。その後、Kawahara & Kida (2001) は、Hamilton *et al.* (1995) と同じ条件のもとで乱流状態と同じふるまいを示す周期流を得た。計算はスペクトル法で行ない、 x 方向と z 方向にはいずれもモード数 16 のフーリエ変換、また平板に垂直方向にはモード数 32 のチェビシェフ多項式展開を用いた。流れの運動方程式の時間積分は、非線形項にアダムス–バッシュフォース法、粘性項にクランク–ニコルソン法を適用し、時間きざみを $\Delta t = 0.001h/U$ として実行した。本稿では、解析の便宜上、レイノルズ数は $Re = 400$ のままであるが、空間周期をそれぞれ $L_x = 5.5h$ および $L_z = 3.85h$ に選んで、Kawahara & Kida (2001) の周期流に接続する周期流 (周期を T とする) を求めた。以下では、この新しい周期流に流される短い線 (線素という) のふるまいを調べる。

3 線素の特性量

乱流中では物質は激しくかき混ぜられる。この混合のメカニズムを明らかにすることを目標にして、受動的に流される線素が、流れのどのような構造によって、どのように変形され輸送されるかを調べる。

3.1 線素の伸張率

前節で述べた周期流中にパッシブに流される多数の粒子対を放つ。粒子の速度は周期流の速度場から 4 次のラグランジュ補間で求め、粒子の運動を 2 次のルンゲ–クッタ法で近似して追う。粒子対の個数を N とし、 i 番目の粒子対の粒子間距離を δl_i ($i = 1, 2, \dots, N$) とする。各粒子対を線素とみなすと、その伸張率は、

$$\gamma_i = \frac{d(\log \delta l_i)}{dt} \quad (1)$$

で表される。初期時刻にすべての粒子対間の距離をある小さな基準の長さ (d とする) に設定する。数値積分で 1 ステップ進むと、粒子対間距離は平均的には d より長くなる。このとき、式 (1) の微分を差分で近似して伸張率を計算し、その後で、粒子対の中点の位置は変えずに粒子対間距離を基準値 d に戻す操作を行なう (図 2)。数値積分の各ステップで、この操作を繰り返して線素の伸張率の時系列を求める。

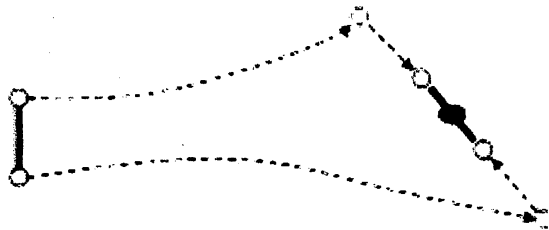


図 2: 線分の規格化。数値積分の各ステップで、粒子間距離を小さな一定値に戻す。この際、両粒子の中点と距離ベクトルの方向は変えない。

周期流中のパッシブ線素の伸張率の大きさの概略をつかむために、まず多数の線素を長時間流し伸張率の平均値を求める。ここでは、初期に 5,320 個の線素を一様に配置し、その運動を 13 周期分追跡した。周期流の各時間位相ごとに全線素にわたって伸張率を平均し、さらにそれを、初期条件依存性の無視できる後の 10 周期分の時間帯にわたって平均した。その結果を図 3 に示す。伸張率の平均値は、周期流の時間位相に依存して大きく変動し、時刻 $t/T = 0.4$ あたりの最小値と $t/T = 0.8$ あたりの最大値では倍近くも異なる。伸張率のこの時間変化は、

周期流の速度変動の活発度の時間変化とその大きさをともにする (Kawahara & Kida (2001) の図 2 参照)。以下では、伸長率の大きな時間帯 ($t/T = 0.8$ 付近) に特に注目する。

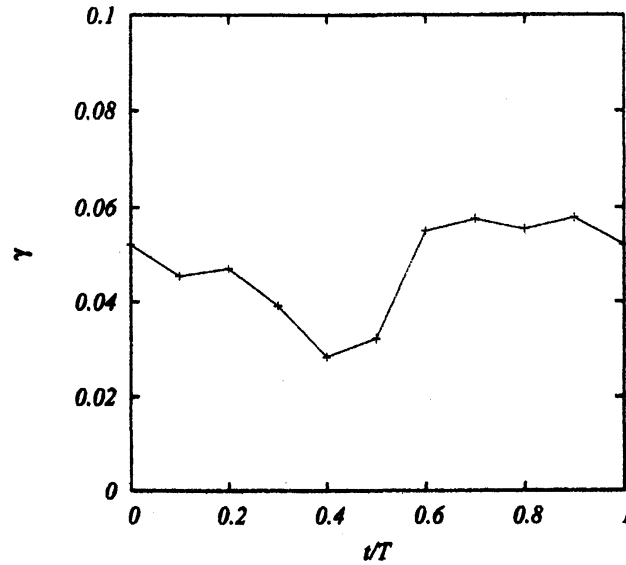


図 3: 伸張率 γ の時間変化。周期流の各時間位相において、流れ場に一樣に流した 5,320 個の線素の伸張率の平均値をさらに周期流の 10 周期にわたって平均した。

3.2 線素の方向

線素は流されながら方向を変える。位置も方向も初期条件に依存して異なる。層流中では、同じ位置から出発しても方向の異なる 2 つの線素はいつまでも重なることはない。しかし乱流中では、同じ位置から出発した線素の方向はしばらくするとそろってくる。

層流の具体例として円環クエット流を取り上げ、このことを見てみよう (図 4)。周方向の速さは、 $u_\theta = ar + b/r$ (a と b は定数) で与えられる。円環の中心から距離 R にある線素は、時間 $2\pi R / (aR + b/R)$ の後にもとの位置に帰ってくる。しかし、その方向は、反時計回りに角度 $\Delta\theta = 2\pi aR / (aR + b/R)$ だけ回転するので、一般にはもとに戻らない。この線素の位置に方向の異なる別の線素を放つと円環を一周した後は、これら 2 つの線素のなす角はもとと完全に一致する。

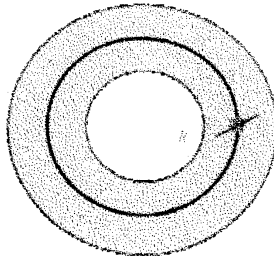


図 4: 円環クエット流中の線素の運動。

つぎに、周期流における線素の方向の整列の様子を観察するために数値実験を行なう。ある粒子を基準にして、それから基準長 d だけ離れ、方向がランダムである多数のテスト粒子を配置し、これらの粒子の運動を追跡する。テスト粒子は、数値積分の各ステップで、基準粒子からの方向は変えないで、基準粒子からの距離を基準長に戻す操作を行なう。このように得られたテスト粒子の相対位置の時間変化を図 5 に示す。基準粒子の位置を原点にとってある。初期に基準粒子のまわりに等方的に分布していたテスト粒子は、まず一方向につぶれ 2 次元的になり (図 5(b)), 周期流の周期の 2 倍の時間がたつと、すべて同じ方向 (図では 2 点) にそろそろ。別の基準粒子につい

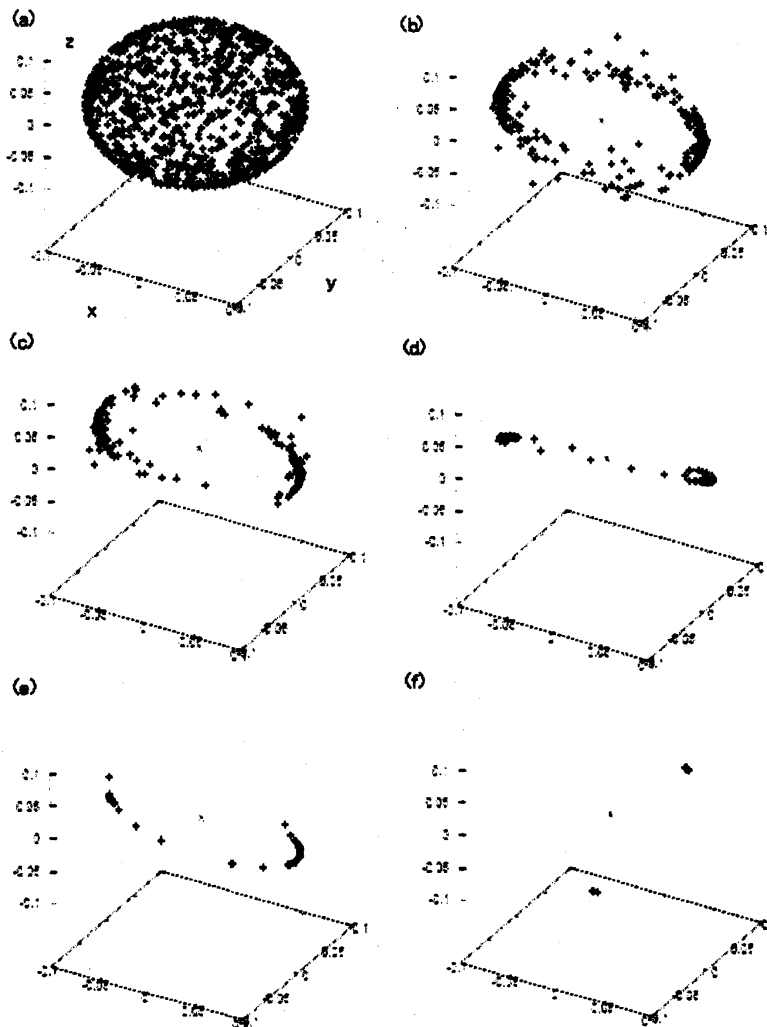


図 5: 線素の方向の整列。初期時刻に基準粒子を $(3.8h, 0, 1.5h)$ に置き、それから距離 $0.1h$ だけ離し、方向をランダムにして 1,000 個の粒子を分布させる。基準粒子の位置は常に原点にとってある。 $t/T =$ (a) 0, (b) 0.1, (c) 0.2, (d) 0.5, (e) 1, (f) 20.

でも同様にふるまい、いずれも $2 \sim 3T$ 程度経過すると一方向にそろふ。このことから、不安定周期流中をパッシブに流れる線素の方向は、ある一定の時間が経過すれば、初期条件によらず、各時刻各位置で一意に定まる、といえる。周期流の流れ場は周期ごとに全く同じ状態が再現されるが、その中で流されるパッシブ線素の方向もまた同時に再現されるのである。次節では、この性質を用いて線素に付随する特性量の場を構成する。

4 線素の場

前節で、空間の各点で線素の方向と伸長率が一意に定まることを見た。ここでは、線素の伸長率の方向ベクトルなど、線素に付随する特性量 $f(\mathbf{x}, t)$ の時空間分布を求める。

4.1 場の構成

計算領域を一辺が Δx の M 個の微小な立方体に分割する (図 6)。このとき、 i 番目 ($i = 1, 2, \dots, M$) の立方体の中心 (X_i, Y_i, Z_i) のまわりに特性量 $f(\mathbf{x}, t)$ をテイラー展開し、1次で打ち切り、

$$f(\mathbf{x}, t) = a_i(t) + b_i(t)(x - X_i) + c_i(t)(y - Y_i) + d_i(t)(z - Z_i) \quad (2)$$

と表す。ここに現れる係数 $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$ は、時刻 t に i 番目の箱の中に入ったすべての線素の位置と特性量の値を用いて、

$$I_i(t) = \sum_{k=1}^K [a_i(t) + b_i(t)(x_k - X_i) + c_i(t)(y_k - Y_i) + d_i(t)(z_k - Z_i) - f_k]^2 \quad (3)$$

を最小にする条件により求められる。ここで、 K (≥ 4 とする) は箱の中の線素の総数、 (x_k, y_k, z_k) と f_k ($k = 1, 2, \dots, K$) は k 番目の線素の位置座標と特性量である。このようにして求めた $a_i(t)$ を i 番目の立方体の中心 (X_i, Y_i, Z_i) における特性量 $f(\mathbf{x}, t)$ の値とする。

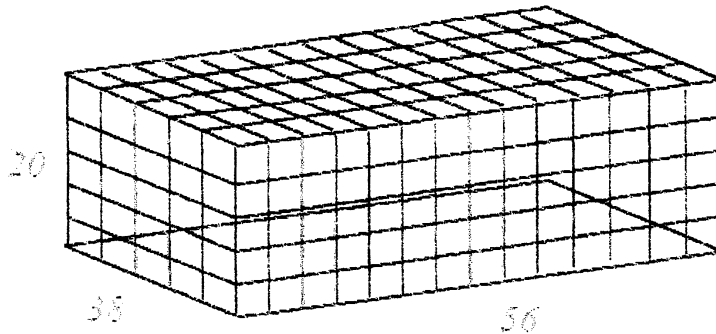
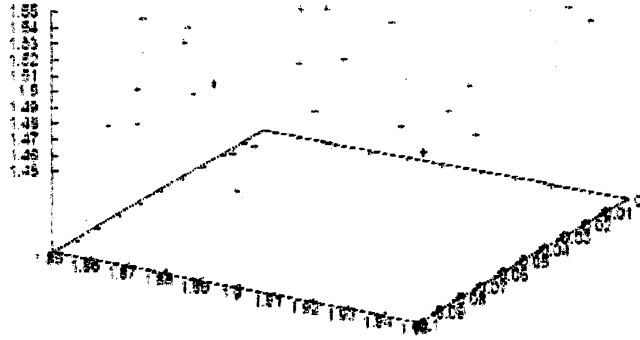


図 6: 計算領域の分割。線素の場を求めるために、計算領域を多数の立方体に分割する。 $\Delta x = 0.1h$.

初期に間隔 $0.2h$ で均一に 5,320 個の線素を配置し、線素の伸長率や方向の場を求める。立方体の一边を $\Delta x = 0.1h$ とすると、すべての立方体に 4 つ以上の線素が入るまでに 221 周期かかった。図 7 に、時間位相 $t/T = 0.8$ で、中心が $(1.9, 0.05, 1.5)$ にある立方体の中に落ちた (a) 線素の位置と (b) 方向の分布を示す。線素の位置はこの立方体の中に広く分散しているのに対し、向きはほぼひとつの方向にそろっている (図では 2ヶ所に集中している)。

(a)



(b)

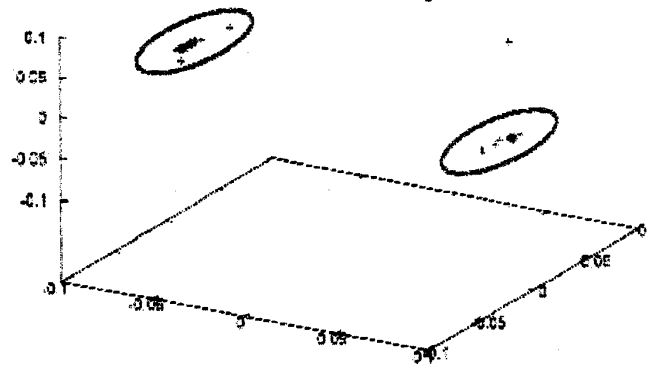


図 7: 立方体中のパッシブ線素の分布。(a) 線素の位置。(b) 線素の方向。時間位相 $t/T = 0.8$ 。辺の長さ $0.1h$ の立方体の中心 $(1.9, 0.05, 1.5)$ 。

4.2 線素場と流れ場の相関

いま取り扱っている非圧縮流では、変形速度テンソルの3つの固有値の和はゼロであるから、第1固有値は常に正であり、第3固有値は常に負である。したがって、流体要素は第1固有ベクトルの方向に引き伸ばされ、第3固有ベクトルの方向に縮められる。このことから、第1固有値が大きいく、かつ第1固有ベクトルと線素の方向が一致するところでは、線素の伸長率が格段に大きくなると考えられる。

図8(a)に、平板間中央部 ($-L_y/4 < y < L_y/4$) で伸長率の大きいところを濃灰色の等値面で示す。また、これに変形速度テンソルの第1固有値の大きいところを淡灰色の等値面で重ねて図8(b)に示す。これらの図から、伸長率の大きいところでは変形速度テンソルの第1固有値も大きいのが、これら2つの領域は必ずしも一致していないことがわかる。この不一致は、線素と変形速度テンソルの第1固有ベクトルの方向の違いによる(ここでは詳しい説明は割愛する)。

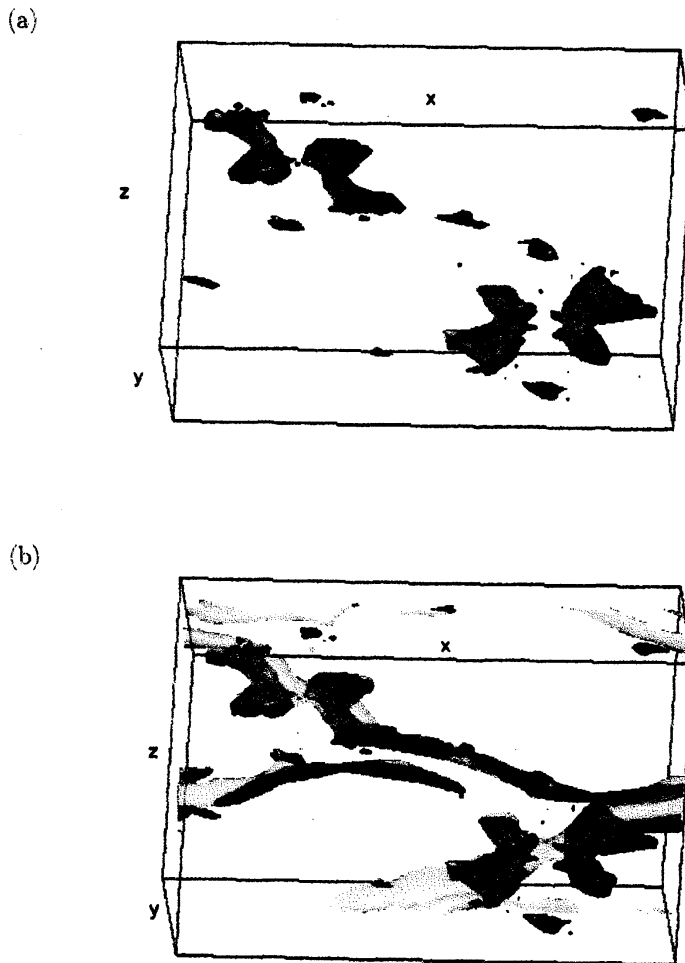


図 8: 線素の伸長率の大きな領域。(a) 伸長率が 0.31 の等値面を濃灰色で示す。
(b) 変形速度テンソルの第1固有値が 0.91 の等値面を淡灰色の面で表し図(a)に重ねてある。 $t/T = 0.8$.

5 まとめ

クエット乱流の特性をよく表す不安定期流に多数のパッシブ線素を流し、その伸長率と流れ場の構造との関係を調べたことを明らかにした。

まず、ある時刻に、方向の異なる2つの線素を同じ位置に放つと、時間の経過とともに、これらの線素の向きは急速にそろってくる。この線素の向きの整列は周期流の3周期程度で完了する。この整列現象は、パッシブに流される線素の方向(したがって、その伸長率も)が初期条件によらず、不安定期流(おそらく乱流も)の時空間挙動によって一意に定まることを意味する。すなわち、パッシブ線素の方向、ならびに伸長率の場が定義でき、線素の伸長率と乱流の瞬時構造との関係の解析性が保証される。つぎに、多数のパッシブ粒子対を長時間流し、各粒子対の位置、方向、ならびに伸長率のデータを統計処理することにより、線素の方向および伸長率の場を構成した。さらに、これらのパッシブ線素に付随する特性量と速度勾配テンソルの固有値や固有ベクトルなどの時空間相関をとることにより、線素の伸長率の大きいところでは、速度勾配テンソルの最大固有値をもつ固有ベクトルと強い相関のあることがわかった。

乱流の特性をよく表す不安定期流による乱流力学の解析研究は始まったばかりである。再現性のある周期流を用いた乱流拡散や混合、渦構造の生成消滅のメカニズムの解明が期待される。

参考文献

- Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317–348 (1995).
- Kawahara, G. and Kida, S. 2001 Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.* **449**, 291–300.