数理解析研究所講究録
1501 巻 2006 年 10-17

Arrangements with non-vanishing twisted cohomology

首都大学東京　川原 行人 (Yukihito Kawahara)
Department of Mathematics,
Tokyo Metropolitan University

1 Introduction

n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の超曲面 V の補集合を M とする. また、V が可約で超平面 H を含むとき、$V=\tilde{V}\cup H$ とかけ、H を無限遠超平面として、アファイン空間 $\mathbb{C}^n=\mathbb{P}^n\setminus H$ 内の超曲面 $\tilde{V}$ の補集合と M を見ることができる. しばしば、アファイン空間 $\mathbb{C}^n$ での例を挙げることがあるが、それは、自然に無限遠超平面を超曲面 V の中に含めて考えているということである.

モノドロミー表現 $\rho:\pi_1(M,x)\to\mathbb{C}^*$ に対して、階数 1 の複素局所系 $\mathcal{L}_\rho$ が定まり、局所系係数のコホモロジー $H^k(M,\mathcal{L}_\rho)$ が考えられる. これには、次のような形の消滅定理がよく知られている (服部、青本、河野、ESV-STV-Yuzvinsky, Dimca, Cho など).

定理 1 (消滅定理). モノドロミー表現 ρ がある一般的な条件を満たすとき、

$$H^k(M,\mathcal{L}_\rho)=0 \qquad (k\neq n).$$

本稿では、いつ $H^k(M,\mathcal{L}_\rho)\neq 0$ $(k<n)$ となるか？という問題を考える. この問題に関して、最近、超平面配置の場合を中心によく研究がされている ([Fa] 参照). Lefshetz の超平面切断の定理によると、本質的には、$k=n-1$ の場合について考えるのが妥当だといえる. 今までの研究では、超曲面あるいは超平面配置を固定して、局所系係数のコホモロジーが非消滅 (あるいは消滅) するモノドロミー表現 ρ (または重み λ) の条件を見つけるといったアプローチが採られてきたと思われる. しかし、2 次元の直線配置の場合でも、非消滅となる ρ を持つものは特殊なものでしかない. たとえば、下の例のような直線配置は $H^1(M,\mathcal{L}_\rho)\neq 0$ となる ρ が存在するが、こうした直線配置は数えるほどしか知られていない. さらには、3 次元以上の場合の例はほとんど知られていな

い (?). 本稿では、$H^{n-1}(M,\mathcal{L}_\rho)\neq 0$ となる ρ を持つ超曲面 V (または超平面配置) を見つける、または、構成することを主題としたい.

例 2 (B_3 配置). $\mathbb{P}^2$ の同次座標を $[x_1:x_2:x_3]$ として、方程式 $x_1x_2x_3(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_2-x_3)(x_2+x_3)(x_3-x_1)(x_3+x_1)=0$ で定義される超曲面 V は直線配置となり、B_3 配置と呼ばれる. 各直線を、順に、$H_1,H_2,\dots,H_9$ とし、直線 H_i を反時計回りに 1 周するループを γ_i とするとき、モノドロミー表現 ρ が

$$\rho(\gamma_i)=\exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\lambda_i\right)$$

で定義されているとする. ここで、λ_i は複素数値であり、その組 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_9)$ は超平面配置の重みと呼ばれる. λ が条件

$$\frac{1}{2}\lambda_1=\lambda_6=\lambda_7,\ \frac{1}{2}\lambda_2=\lambda_8=\lambda_9,\ \frac{1}{2}\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5,\ \sum_{i=1}^{9}\lambda_i=0$$

を満たすとき、$H^1(M,\mathcal{L}_\rho)\neq 0$ となる. 本稿では、このことを次のように解釈することで、一般化される. まず、因子 D_1,D_2,D_3 を次のように定める : $D_1: x_1^2(x_2-x_3)(x_2+x_3)=0$, $D_2: x_2^2(x_3-x_1)(x_3+x_1)=0$, $D_3: x_3^2(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$. 各因子の台は 3 本の直線から成り、計 9 本の直線は B_3 配置をなす. そして、各因子に対して重み $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ を与える. ただし、$\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$ とする. この重みを、$2\mu_1=\lambda_1,\mu_1=\lambda_6,\mu_1=\lambda_7$ というように各直線に分配し直すと上の重み λ の条件が与えられる. そして、因子 D_1,D_2,D_3 は線形従属であることが、局所系係数のコホモロジーが非消滅となることの本質的な理由となる.

2 Twisted de Rham Theory

通常 V を既約分解して扱うが、ここでは既約性などを考慮しない形で捩れ De Rham 理論を修正する. $\mathbb{P}^n$ 上の次数 d の有効因子 $D_1,\dots,D_m$ をとり、それらの台の和集合の補集合を M とする. $d=1$ のときは、超平面配置の場合となり、D_i 達が既約かつ素因子であれば、次数 d の超曲面の配置である. Ω_M^p を M 上の正則 p 次形式とし、$\mathcal{O}_M=\Omega_M^0$ とかく. ここで、D_i に対する複素数 λ_i をとり、その組 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ を重みと呼ぶことにする. ただし、

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=0$$

という条件を仮定する. このとき、大域的な 1 次形式 $\omega_\lambda=\sum_{i=1}^m\lambda_i d\log D_i\in\Gamma(M,\Omega_M^1)$ が定まる. これによって、$\nabla_\lambda=d+\omega_\lambda\wedge:\mathcal{O}_M\to\Omega_M^1$ が定義され、$\nabla_\lambda^2=0$ となることから、平坦接続となる. さらに、その核 $\mathcal{L}_\lambda$ は局所系である. そして、捩れ De Rham 複体

$$0\to\mathcal{L}_\lambda\to\mathcal{O}_M\xrightarrow{\nabla_\lambda}\Omega_M^1\xrightarrow{\nabla_\lambda}\Omega_M^2\xrightarrow{\nabla_\lambda}\cdots$$

が得られ、[De] 同様に、

$$H^k(M,\mathcal{L}_\lambda) \simeq H^k(\Gamma(M,\Omega_M),\nabla_\lambda)$$

となる．また、 $k>n$ のとき $H^k(M,\mathcal{L}_\lambda)=0$ となる．

局所系とモノドロミー表現は同値であることから、$\mathcal{L}_\lambda$ に対応するモノドロミー表現 ρ が得られる．因子 $D_1,\dots,D_m$ の既約成分全体の集合を $\mathcal{D}$ とし、$D\in\mathcal{D}$ に対し、因子 D_i での D の重複度を k_i とする．ただし、因子 D_i が D を含まないとき $k_i=0$ とする．そして、各 $D\in\mathcal{D}$ に対する重み λ_D を $\lambda_D=\sum_{i=1}^m k_i\lambda_i$ と定義する．既約な超曲面 $D\in\mathcal{D}$ を反時計回りに 1 周するループを γ_D とするとき、モノドロミー表現 ρ を $\rho(\gamma_D)=\exp(-2\pi\sqrt{-1}\lambda_D)$ で定義すればよい．ここで、既約成分 D が複数の因子に含まれることもあり得ることに注意されたい．

3 Vanishing Theorem

超平面配置の場合の消滅定理 1 を紹介しておく．$d=1$ すなわち、$D_1,\dots,D_m$ が超平面であるときに条件を記述する．また、D_i に対する重み λ_i を場合によって λ_{D_i} とかくことにする．$\mathcal{A}=\{D_1,\dots,D_m\}$ は超平面配置であるが、それらの超平面の空でない交わりの集合を $L(\mathcal{A})$ とかき、交差集合 (intersection set) という．$X\in L(\mathcal{A})$ に対して

$$\mathcal{A}_X=\{H\in\mathcal{A}\mid X\subset H\},\qquad \lambda_X=\sum_{H\in\mathcal{A},X\subset H}\lambda_H$$

とする．$\mathcal{A}_X$ は中心的 (central) である．超平面配置 $\mathcal{C}$ が中心的であるとは、$\cap_{H\in\mathcal{C}}H$ が空でないときをいう．このとき、$\mathcal{C}$ が分解可能 (decomposable) であるとは、空でない部分集合 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ があり、$\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ で共通部分を持たず、適当な線形座標変換によって、$\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ の定義方程式が共通変数を持たないようにすることができるときをいう．そして、$\mathcal{A}_X$ が分解可能であるとき、$X\in L(\mathcal{A})$ を 稠密 (dense) であるという．

定理 3 ([ESV, STV, Yu]). 重み λ が一般的な条件 "稠密であるすべての $X\in L(\mathcal{A})$ に対して $\lambda_X\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}$" を満たすとき、$H^k(M,\mathcal{L}_\lambda)=0$ $(k\neq n)$ となる．

また、この条件はある程度緩められている ([CDO, Ka2])．一般に、超曲面の場合の状況下の消滅定理は [Ch, Di] などがある．

4 Non-vanishing Theorem

2 章の設定のもとで、非消滅定理を述べる．$\mathbb{P}^n$ 上の次数 d の有効因子 $D_1,\dots,D_m$ と $\sum_{i=1}^m\lambda_i=0$ となる重み $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ を与える．それらの台の補集合 M 上の捩れ De Rham コホモロジーは、局所系係数コホモロジー $H^k(M,\mathcal{L}_\lambda)$ と同型であった．この $n-1$ 次コホモロジーが消滅しないものが、目標であった．

定理 4. $1 < n < m$ とする. $D_1, \ldots, D_m$ が条件:

(A1) $D_1, \ldots, D_m$ は、$\mathbb{P}^n$ 上の $n-1$ 次元のある線形系 Λ の元である.

(A2) 次を満たす線形系 Λ の base point P が少なくとも 1 つ存在する: P の十分小さい近傍では $D_1 \cdots D_m$ は超平面配置をなす.

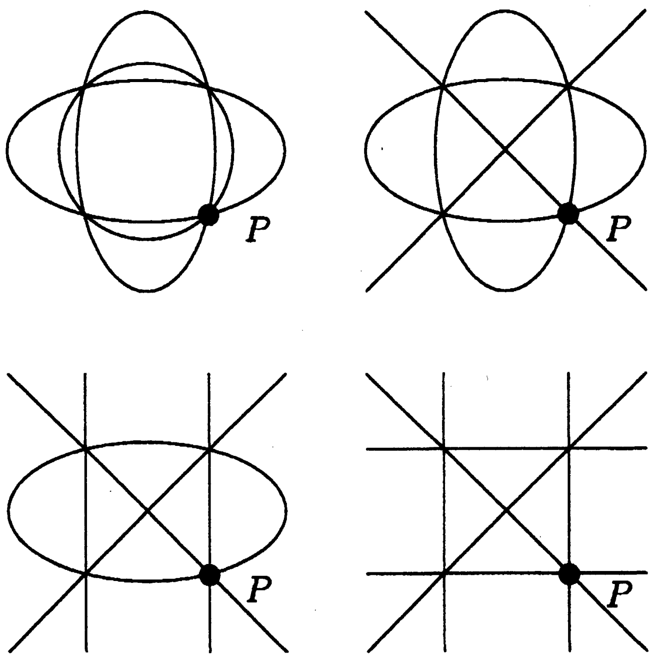
(A3) $D_1, \ldots, D_m$ は線形系 $\Lambda = \mathbb{P}^{n-1}$ の中で点集合とみなしたとき、一般の位置にある.

を満たすとする. 重み λ は非自明 $(\lambda \notin \mathbb{Z}^m)$ とし、$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$ とするとき、

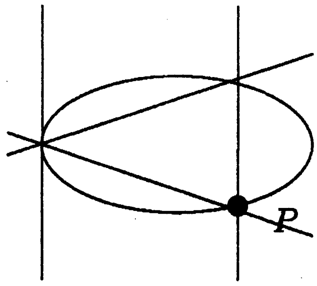
$$\dim H^{n-1}(M, \mathcal{L}_\lambda) \geq \binom{m-2}{n-1}.$$

となる.

例 5. $n = 2$, $m = 3$, $d = 2$ つまり、$\mathbb{P}^2$ 上の 2 次の因子 D_1, D_2, D_3 を考える. それらは、3 つの 2 次曲線であるが、2 本の直線をまとめて 2 次曲線としてもよい. 定理の条件を満たすのは次の 4 つの形が考えられる:



右下は、$2 \times 3 = 6$ 本の直線配置となり、$\mathbb{P}^2$ 上で考えているので、これは Ceva の定理に現れる直線配置となっている. また、P のような base point は 1 つだけあればよいので、左下を変形させ、接線となるようにしてもよい:



これらのいずれも、$H^1(M,\mathcal{L}_\lambda)\neq 0$ となる重み $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ を持つこととなる．また、右下の Ceva の直線配置では、各直線に対する重み付けを考えると $(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_3)$ であり、$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ となっている．

5 Hyperplanes Arrangements

因子 $D_1,\dots,D_m$ がすべて超平面から生成されているとき、M は超平面配置の補集合になる．この場合の超平面配置の組合せ的な構造を紹介する．

5.1 ラテン方陣と有限群

例 5 に与えた Ceva の直線配置がこの場合の例となる．D_1 に含まれる 2 直線を H_1, H_2 とすると $D_1=H_1+H_2$ とかけ、同様に $D_2=H_3+H_4$, $D_3=H_5+H_6$ とする．行列状に交わり方の様子を次のようにかく．

	H_3	H_4
H_1	H_5	H_6
H_2	H_6	H_5

これは、行を D_1 に属する H_1, H_2 とし、列を D_2 に属する H_3, H_4 とする．各成分は、行と列に対する直線の交点を通る D_3 に属する直線をかく．たとえば、$(1,1)$ 成分は、H_1 と H_3 の交点を H_5 が通っていることを意味している．こうして得られる行列の構造は、単純に $K=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ である (ここでは $0,1$ は記号として考えている)．一般に、$n=2,m=3$ つまり $\mathbb{P}^2$ 上の直線から成る因子 D_1, D_2, D_3 では、同様に $d\times d$ 行列 K が得られる (d は次数)．この行列 K は、各行、列とも d 個の要素の置換になり、K はラテン方陣と呼ばれる．逆に、ラテン方陣 K から、非消滅を持つ直線配置を考えることもできる．

また、上の例のラテン方陣 K は、加法群 $\mathbb{Z}_2$ の乗積表として得られる．一般に、有限群の乗積表からラテン方陣を作ることができ、次の関連があることがわかる:

非消滅を持つ直線配置	$\longleftrightarrow$	ラテン方陣	$\longleftrightarrow$	有限群
Ceva の直線配置	$\longleftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{Z}_2$
Pappus の直線配置	$\longleftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{Z}_3$

$d=3$ のときには、Pappus の定理に現れる 9 本の直線配置が得られる. $d=4$ のときには、群は、加法群で表して $\mathbb{Z}_4$ と $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ と 2 つあるが、これも古典的射影幾何学の定理である Kirkman の定理と Steiner の定理に現れる 12 本の直線配置がそれぞれ得られる. この 2 つの定理は、共に、3 本の Pascal 直線が 1 点で交わるというものであるが、組み合せ的な構造が違うことは、群の違いから理解しやすい. 補足しておくと、直線配置ではないが、Pascal の定理 (2 次曲線と Pascal 直線、3 本の直線 $\times 2$) に現れるものも、非消滅を持つ.

Remark 6. 今は、$\mathbb{P}^2$ 上の 3 つの因子 ($n=2, m=3$) しか考えていないが、$m=4$ のときはオイラー方陣、さらに、m を大きくするには、直交ラテン方陣を考えることになる.

5.2 退化

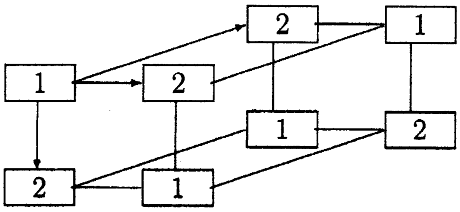
Steiner の定理の 12 本の直線配置を、直線が重なるように退化させることができ、そうして得られた 9 本の直線配置が B_3 配置である. B_3 配置では、3 本の直線は 2 重になっている. このように、超平面が重なったり、ラテン方陣で得られる退化のデータ以上に退化しているものも、考えられたりする.

例 7. D_1, D_2, D_3 をそれぞれ $(x_0^d - x_1^d), (x_1^d - x_2^d), (x_2^d - x_0^d)$ で与えられているとすると、各 D_i は d 本の直線となる. これは、加法群 $\mathbb{Z}_d$ から得られるラテン方陣の構造を持つ. さらに、各 D_i に属する d 本の直線はそれぞれ 1 点で交わるので、$d>2$ なら、その 3 つの交点は余分な退化した点である. つまり、ラテン方陣で得られる退化のデータ以上に退化している.

5.3 高次元化

非消滅を持つ直線配置とラテン方陣の関係は、一般次元 n に拡張できる. すなわち、非消滅を持つ超平面配置とラテン超方格 (Latin hypercube) とが同じような関連をもつ.

例 8. $\mathbb{P}^3$ の $d=2$ 次の $m=4$ つの因子を $D_1 : x_0(x_1+x_2+x_3)$, $D_2 : x_1(-x_0+x_2-x_3)$, $D_3 : x_2(-x_0-x_1+x_3)$, $D_4 : x_3(-x_0-x_1-x_2)$ とするとこれはラテン超方格



が対応する．このとき、非消滅 ($H^2 \neq 0$) となる重みを持つ．この 8 枚の平面配置は、4 枚の平面が 1 点で交わる交点が $2^3 = 8$ 個あり、それぞれが、ラテン超方格の成分に対応している．それ以外では、交わった直線も交点も退化していない (それ以外の交点では、4 枚以上の平面で交わらず、3 枚以上の平面が同一直線で交わらない)．

例 9. より退化したものとして、例 7 を拡張した

$$(x_0^d - x_1^d)(x_1^d - x_2^d) \cdots (x_{n-1}^d - x_n^d)(x_n^d - x_0^d)$$

で定義される超平面配置 (monomial 配置と呼ばれる) は、$(\mathbb{Z}_d)^n$ のラテン超方格の構造を持ち、非消滅 ($H^{n-1} \neq 0$) をもつ．

n 次元では、ラテン超方格から d^n 個の退化のデータが得られるが、次元が高くなる程、ラテン超方格の構造をもつ超平面配置は、より退化してしまうと考えられる．そこで、ラテン超方格から得られる d^n 個の退化した交点以外は正規交差となっているとき、非消滅のための最小の退化と呼ぶこととすると、次を確かめることができる．

命題 10. $n > 3$, $d = 2$, $m = n + 1$ とするとき、非消滅 ($H^{n-1} \neq 0$) となる最小の退化をもつものは存在しない．

d が大きくなれば、なお、非消滅のための最小の退化をもつ超平面配置は期待できそうもない．したがって、$n > 2$ で最小の退化をもつものは、例 8 しかないのではないかと思われる．

参考文献

[Ch] K. Cho, A generalization of Kita and Noumi's vanishing theorems of cohomology groups of local system, Nagoya Math. J. 147 (1997), 63–69.

[CDO] D. C. Cohen, A. Dimca, and P. Orlik, Nonresonance conditions for arrangements, Ann. Inst. Fourier 53 (2003), no.6, 1883–1896.

[De] P. Deligne, Équations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. **163** (1970).

[Di] A. Dimca, Sheaves in topology, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+236 pp.

[ESV] H. Esnault, V. Schechtman and E. Viehweg, Cohomology of local systems on the complement of hyperplanes, Invent. Math. **109** (1992), 557–561; Erratum **112** (1993), 447.

[Fa] M. Falk, Arrangements and Cohomology, Annals of Comb. 1 (1997), 135–157.

[Ka] Y. Kawahara, The twisted De Rham cohomology for Basic Constructions of Hyperplane arrangements and its applications, Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 34, No.2 (2005), 489–505.

[Ka2] Y. Kawahara, Vanishing and Bases for cohomology of partially trivial local systems on hyperplane arrangements, Proceedings of the American Mathematical Society 133 (2005), 1907–1915.

[Ka3] Y. Kawahara, The non-vanishing cohomology of Orlik-Solomon algebras, MSRI Preprint 2005-004, math.CO/0506421.

[LY] A. Libgober and S. Yuzvinsky, Cohomology of the Orlik-Solomon algebras and local systems, Compositio Math. 121 (2000), no.3, 337–361.

[OT] P. Orlik, and H. Terao, Arrangements of Hyperplanes, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, 1992.

[OT2] P. Orlik, and H. Terao, Arrangements and Hypergeometric integrals, MSJ, Mem. vol.9, Math. Soc. Japan, (2001).

[STV] V. Schechtman, H. Terao and A. Varchenko, Local systems over complements of hyperplanes and the Kac-Kazhdan conditions for singular vectors, J. Pure Appl. Algebra **100** (1995), 93–102.

[Yu] S. Yuzvinsky, Cohomology of the Brieskorn-Orlik-Solomon algebras, Comm. Algebra **23** (1995), 5339–5354.

[Yu2] S. Yuzvinsky, Realization of finite abelian groups by nets in $\mathbb{P}^2$. Compositio Math. 140 (2004), no. 6, 1614–1624.