

The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)
鈴木 正俊 (SUZUKI Masatosi)

Dept. of Mathematics, Michigan University
Jeffrey.C. Lagarias

1. 導入

あるゼータ関数に関して Riemann 予想が成立つという結果について述べる¹. あるゼータ関数とは近年 L. Weng により導入されたゼータ関数と Eisenstein 級数の定数項である.

Riemann 以後, ゼータ関数は様々な方向に一般化され, 多様な分野で研究されている. Riemann 予想は元々は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の零点に関する予想であるが, 同様の予想が一般化されたゼータ関数に対しても立てられ, それも Riemann 予想と呼ばれる事が多い. しかし Riemann 予想が証明されているゼータ関数は極めて稀である. その稀有な例として Selberg ゼータ関数, 合同ゼータ関数が挙げられる. この2つの例はその結果の重要性も去ることながら, Riemann 予想が成立すべき理由について明確な背景がある事が特筆される. 即ち, どちらの例もゼータ関数の零点がある作用素の固有値となっており, Riemann 予想に関する Hilbert-Pólya の示唆「ゼータ関数の零点はある自己共役作用素の固有値であろう」を支持するものとなっている².

とはいえ Hilbert-Pólya の示唆以来, Riemann ゼータ関数に関する Riemann 予想の同値条件は膨大な数であるにも関わらず, 彼らの示唆の外に Riemann 予想の研究に哲学的指針を与えるアイディアは殆ど無いと言ってよい. そして現在もっとも有望視されている Riemann 予想解決への道は彼らの指した方向である. その様に考えられている理由の一つは「オリジナルの Riemann 予想が解決されるとすれば, そのアイディアは他のゼータ関数に関しても適用可能な普遍性を備えたものであろう」という感覚が多く研究者の間にあるからであろう. また, 彼らの示唆以外の方針で Riemann 予想が証明された例がない事も H-P 支持の風潮に拍車をかけている.

現在このような状況であるから, もし Riemann 予想の成立つゼータ関数で(一見)Hilbert-Pólya の示唆の範疇に入らないものが見つければ興味深い. 拙論で扱うゼータ関数はその様なものになっていると思われる. これについてももう少し詳しく述べよう.

上記の例の零点の固有値解釈の理論的背景の一つは Selberg ゼータ関数なら Selberg 跡公式, 合同ゼータ関数なら Lefschetz 跡公式である. そしてこれらとゼータ関数が結びつくのはゼータ関数が Euler 積(と関数等式)を持っている事が本質的である. Euler 積を持たないゼータ関数の零点を固有値として解釈できるか否かは現在のところ全く手

¹拙論では既存の結果や関連する結果への言及は必要最小限に止めている. それらに関しては [4] に詳しく書いてあるのでそちらを参照のこと.

²有限グラフのゼータ関数についても同様な状況であったと思うが, うろ覚えなので割愛.

がかりが無いと言ってよい。我々が今回扱うゼータ函数は Euler 積を持たない。この意味で今回扱うゼータ函数は Hilbert-Pólya の示唆の範疇にない (正確にはそうであるか不明の) ものと言える。今回の結果がゼータ函数の零点の研究にどのような影響を及ぼすかは今後の経過次第であるが、面白い結果が得られたのではないかと思う。

2. 結果

2.1. Eisenstein 級数の定数項. 上半平面の元 $z = x + iy$ ($y > 0$) と複素数 $s = \sigma + it$ ($\sigma > 1$) に対し, $SL(2, \mathbb{Z})$ に関する完備な実解析的 Eisenstein 級数 $E^*(z, s)$ は次の級数で定義される.

$$E^*(z, s) = \frac{1}{2} \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) \sum_{(c,d)=1} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}}, \quad (2.1)$$

ここで $\Gamma(s)$ はガンマ函数, $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ函数, 和 $\sum_{(c,d)=1}$ は互いに素な整数の組 (c, d) 全体を渡る. $E^*(z, s)$ について次の事実はよく知られている.

- (1) $E^*(z, s)$ は全 s -平面に有理型に解析接続され, $s = 0, 1$ で一位の極を持つ他は正則.
- (2) $E^*(z, s)$ は次の函数等式を満たす,

$$E^*(z, s) = E^*(z, 1 - s). \quad (2.2)$$

- (3) $E^*(z, s)$ は変数 z に関する $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用に関して不変. 即ち

$$E^*\left(\frac{az + b}{cz + d}, s\right) = E^*(z, s), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (2.3)$$

特に (3) から $E^*(z + 1, s) = E^*(z, s)$. 従って $E^*(z, s)$ は Fourier 展開

$$E^*(z, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y, s) e^{2\pi i n x} \quad (2.4)$$

を持つ. ここで

$$a_n(y, s) = \int_0^1 E^*(x + iy, s) e^{-2\pi i n x} dx. \quad (2.5)$$

函数等式 (2.2) と (2.5) の表示から

$$a_n(y, s) = a_n(y, 1 - s) \quad (2.6)$$

が任意の整数 n について成立つ事が分る.

$n \neq 0$ であるとき $a_n(y, s)$ は

$$a_n(y, s) = |n|^{s-1/2} \sqrt{y} K_{s-1/2}(2\pi |n| y) \sum_{d|n} d^{1-2s} \quad (K_\nu(\cdot) \text{ は } K\text{-Bessel 函数}), \quad (2.7)$$

と表示される. そして K -Bessel 函数の零点に関する Pólya の結果

「任意に固定された $u > 0$ に対し $K_{s-1/2}(u)$ の零点は全て $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上にある」

と積表示

$$\sum_{d|n} d^{1-2s} = \prod_{p^e || n} \frac{1 - p^{(e+1)(1-2s)}}{1 - p^{1-2s}} \quad (2.8)$$

から, 任意に固定された $y > 0$ に対し, $a_n(y, s)$ の零点は函数等式 (2.6) の中心線 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ にあるという Riemann 予想の類似が成立つ [1]. 半整数ウェイトの Eisenstein 級数の場合にはその Fourier 係数に Dirichlet L -函数が含まれる事を考えるとこの結果は興味深い. 一方, 定数項 $a_0(y, s)$ は

$$a_0(y, s) = \zeta^*(2s)y^s + \zeta(2(1-s))y^{1-s} \quad (\zeta^*(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)), \quad (2.9)$$

という $n \neq 0$ の場合とはかなり違った表示をもつ. この場合にも Riemann 予想の類似が成立つだろうか? これに関しては Hejhal [2] により $y \geq 1$ ならば実の零点を除けば $a_0(y, s)$ の零点は $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上にある事が知られていた. その結果に実零点に関する主張を補ったのが次の結果である.

定理 1. ある $y \geq 1$ を固定したとき定数項 $a_0(y, s)$ の零点について次が成立つ.

$$y^* = 4\pi e^{-\gamma} = 7.055507 \dots \quad (\gamma \text{ は Euler 定数}), \quad (2.10)$$

とすると,

- (i) $1 \leq y \leq y^*$ ならば $a_0(y, s)$ の零点は全て $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上にある.
- (ii) $y > y^*$ ならばちょうど 2 つの実零点 $\rho_y, 1 - \rho_y$ ($1/2 < \rho_y < 1$) を除いて $a_0(y, s)$ の零点は全て $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上にある. 更に ρ_y は y に関する非減少関数であって

$$\rho_y \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow +\infty) \quad (2.11)$$

が成立つ.

注 1. 既に [2] で Hejhal により指摘されている様に, $0 < y < 1$ の場合には Riemann 予想の類似は成立たない.

2.2. Weng のゼータ函数. 近年 L. Weng は代数体 K 上のランク n の非可換ゼータ函数 $Z_{K,n}(s)$ というものを定義した. その定義は紙数の関係上割愛するが, 一言で言えば代数体 K の Dedekind ゼータ函数 $\zeta_K(s)$ の一般化で, Dedekind ゼータ函数の岩澤-Tate の方法による積分表示を Arakelov 幾何の観点から一般化する事により定義される. それゆえ定義から自然に $Z_{K,1}(s) = (\Gamma\text{-factor}) \times \zeta_K(s)$ となっており, しかも $Z_{K,n}(s)$ は全平面に有理型に解析接続され, $s = 0, 1$ を除いて正則で, 函数等式 $Z_{K,n}(s) = Z_{K,n}(1-s)$ を持つ. しかし一般に Euler 積は持たない ([6],[7],[8],[9]).

今回我々が扱うのは $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ である. いま $D_T = \{z = x + iy; |z| \geq 1, -1/2 \leq x \leq 1/2, y \leq T\}$ とすれば, $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ は前節の $E^*(z, s)$ を用いて

$$Z_{\mathbb{Q},2}(s) = \int_{D_1} E^*(x + iy, s) \frac{dx dy}{y^2} \quad (2.12)$$

と表示される³. この表示から直ちに

$$Z_{\mathbb{Q},2}(s) = -\frac{\zeta^*(2s)}{1-s} - \frac{\zeta^*(2(1-s))}{s} \quad (2.13)$$

が分る. 積分表示 (2.12) と (2.2) から函数等式

$$Z_{\mathbb{Q},2}(s) = Z_{\mathbb{Q},2}(1-s) \quad (2.14)$$

が導かれる. しかし (2.13) の表示から Euler 積は持たない. $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ を少し一般化して, $T \geq 1$ に対して

$$Z_{\mathbb{Q},2}^T(s) = \int_{D_T} E^*(x+iy, s) \frac{dx dy}{y^2} \quad (2.15)$$

を考える⁴. この場合も容易に

$$Z_{\mathbb{Q},2}^T(s) = -\frac{\zeta^*(2s)T^{s-1}}{1-s} - \frac{\zeta^*(2(1-s))T^{-s}}{s} \quad (2.16)$$

であることや, 函数等式

$$Z_{\mathbb{Q},2}^T(s) = Z_{\mathbb{Q},2}^T(1-s) \quad (2.17)$$

を持つ事が分る.

$Z_{\mathbb{Q},1}(s)$ が Riemann ゼータ函数である事を考えれば, その一般化である $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ に関して Riemann 予想の類似を示す事は非常に困難な事と思える. しかし驚くべき事に $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ の Riemann 予想は複雑な議論を経る事なく示されてしまうのである!

定理 2. 任意に固定された $T \geq 1$ に対し, $Z_{\mathbb{Q},2}^T(s)$ の零点は全て $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上にある.

注 2. $0 < T < 1$ に対しても (2.16) の表示を用いて $Z_{\mathbb{Q},2}^T(s)$ を定義する事ができるが, $a_0(y, s)$ の場合と同様に $0 < T < 1$ の場合には Riemann 予想の類似は成立たない.

更に $Z_{\mathbb{Q},2}^T(s)$ の零点の分布に関して次が言える.

定理 3. 任意に固定された $T \geq 1$ に対し $Z_{\mathbb{Q},2}^T(s)$ の零点は全て単根. また $N(f, U)$ で函数 $f(s)$ の $|\operatorname{Im}(s)| \leq U$ 内の重複度を込めた零点の個数を表すとすると,

$$N(Z_{\mathbb{Q},2}^T(s; U) = N(\xi(2s); U) + \frac{2}{\pi}(\log T)U + O(\log U) \quad (2.18)$$

が成立つ. ここで $\xi(s) = s(s-1)\zeta^*(s)$.

注 3. Riemann ゼータ函数に関する標準的な評価 ([5]) から

$$N(\xi(2s), U) = \frac{1}{2\pi}U \log U - \frac{1}{2\pi}(\log 4\pi + 1)U + O(\log U). \quad (2.19)$$

³更に一般的な Eisenstein 級数を用いれば $Z_{K,n}(s)$ を同様な積分表示で表す事が可能である.

⁴ D_1 を D_T に置き換える事にはちゃんと幾何的な意味があるのだが割愛する

3. 定理2の証明の概略

定理1はHejhalの方法を使えば実質的に実零点に関する議論のみの話になるし、定理3は単根であるという主張以外は特別な事をせずに示される。従ってここでは定理2の証明のみを取り上げる事とする。定理1が以下で述べる定理2の証明法に数値計算を援用する事で示されるというのも理由の一つである。[4]では定理1をHejhalの方法を用いて導いているのだが。

定理2の証明の鍵となるのが次の補題である。

補題 1. 位数0又は1の整函数 $F(s)$ について次を仮定する。

- (1) $F(s)$ は実軸上で実数値をとる。
- (2) 適当な符号に関して函数等式 $F(s) = \pm F(1-s)$ を満たす。
- (3) ある $a > 0$ が存在して、 $F(s)$ の全ての零点は帯領域

$$\left| \operatorname{Re}(s) - \frac{1}{2} \right| < a \quad (3.1)$$

内にある。

このとき任意に固定された $c \geq a$ に対して

$$\operatorname{Re}(s) > 1/2 \implies \left| \frac{F(s+c)}{F(s-c)} \right| > 1 \quad (3.2)$$

かつ

$$\operatorname{Re}(s) < 1/2 \implies \left| \frac{F(s+c)}{F(s-c)} \right| < 1 \quad (3.3)$$

が成立つ。特に任意の $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し

$$F(s+c) + e^{i\theta} F(s-c) \quad (3.4)$$

は $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ の外で零点を持たない。

(定理2の証明) 以下 $T \geq 1$ とし、

$$H^T(s) = \frac{1}{4} 2s(2s-1)(2s-2) Z_{\mathbb{Q},2}^T(s) \quad (3.5)$$

とおく。この定義と函数等式から、定理2を示すには $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ であるとき $H^T(s) \neq 0$ を言えば十分である。(2.16) から

$$H^T(s) = \xi(2s)T^{s-1} - \xi(2s-1)T^{-s}, \quad \xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\zeta^*(s) \quad (3.6)$$

と表示されるので、もし

$$\operatorname{Re}(s) > 1/2 \implies \left| \frac{\xi(2s)T^{s-1}}{\xi(2s-1)T^{-s}} \right| > 1 \quad (3.7)$$

が示されれば $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ であるとき $H^T(s) \neq 0$ が従う。

以下 (3.7) を示そう。 $F(s) = \xi(2s - 1/2)$ とおくと、 $F(s)$ は補題 1 の仮定 (1)(2)(3) を $a = 1/4$ として満たす。従って補題 1 を $c = 1/2 (> 1/4 = a)$ として適用すれば $\text{Re}(s) > 1/2$ のとき

$$1 < \left| \frac{F(s+1/2)}{F(s-1/2)} \right| = \left| \frac{\xi(2s)}{\xi(2s-1)} \right|.$$

故に $\text{Re}(s) > 1/2$ のとき

$$\left| \frac{\xi(2s)T^{s-1}}{\xi(2s-1)T^{-s}} \right| = \left| \frac{\xi(2s)}{\xi(2s-1)} \right| T^{2\text{Re}(s)-1} \geq \left| \frac{\xi(2s)}{\xi(2s-1)} \right| > 1.$$

これで (3.7) が示されたので定理 2 の証明は完了した。 \square

(補題 1 の証明) 簡単のため $F(s)$ は実零点を持たない事とする。整函数の一般論から $F(s)$ は積表示

$$F(s) = Ae^{Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \quad (3.8)$$

を持つ。仮定 (1),(2) から、もし ρ が $F(s)$ の零点ならば $1 - \rho$, $\bar{\rho}$, $1 - \bar{\rho}$ は全て $F(s)$ の零点である。従って積表示 (3.8) は

$$\begin{aligned} F(s) = A & \prod_{\substack{\text{Re}(\rho) > 1/2 \\ \text{Im}(\rho) > 0}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{\bar{\rho}}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\bar{\rho}}\right) \\ & \times \prod_{\substack{\rho = 1/2 + i\gamma \\ \gamma > 0}} \left(1 - \frac{s}{1/2 + i\gamma}\right) \left(1 - \frac{s}{1/2 - i\gamma}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

と書き換えられる⁵。(3.9) を用いると $F(s+c)/F(s-c)$ は

$$\begin{aligned} \frac{F(s+c)}{F(s-c)} &= \prod_{\substack{\text{Re}(\rho) > 1/2 \\ \text{Im}(\rho) > 0}} \frac{(s+c-\rho)(s+c-\bar{\rho})(s+c-(1-\rho))(s+c-(1-\bar{\rho}))}{(s-c-\rho)(s-c-\bar{\rho})(s-c-(1-\rho))(s-c-(1-\bar{\rho}))} \\ & \times \prod_{\substack{\rho = 1/2 + i\gamma \\ \gamma > 0}} \frac{(s+c-1/2-i\gamma)(s+c-1/2+i\gamma)}{(s-c-1/2-i\gamma)(s-c-1/2+i\gamma)} \end{aligned}$$

と表示される。ここで右辺は

$$\frac{s+c-w}{s-c-(1-\bar{w})}$$

の形の因子の積であることに注目すると、仮定 (3) により $|\text{Re}(w)-1/2| < c$ かつ $\text{Re}(s) > 1/2$ のとき

$$\left| \frac{s+c-w}{s-c-(1-\bar{w})} \right| > 1.$$

である事を示せばよい。この事は全く初等的な計算で確かめられる。この様にして補題 1 の証明が完了する。 \square

⁵正確には e^{Bs} の項が消える事を言うのに若干の議論が必要。

4. おわりに

ランク 2 のゼータ函数 $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ について Riemann 予想が成立つ事は分った. しかし証明は単にその事実を示しただけのものであって, Riemann 予想が成立すべき根拠については何も言ってない. $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ の具体形は (2.13) で見た様に二つのゼータ函数の線形和である. 通常この様な函数は関数等式は持つが Riemann 予想は満たさない例として挙げられる [3]. 従って $Z_{\mathbb{Q},2}(s)$ に関して Riemann 予想が成立しているという事実には, 何らかの明確な理由がなければならない. それが何なのかは現在全く不明であるが, その究明がゼータ函数の零点の研究に新たな光をあてるものである事を期待する.

REFERENCES

- [1] D. Bump, K.-K. Choi, P. Kurlberg and J. Vaaler, *A local Riemann hypothesis I*, Math. Z. **233**, 2000, 1–19.
- [2] D. Hejhal, *On a result of G. Pólya concerning the Riemann ξ -function*, J. d'Analyse Math. **55**, 1990, 59–95.
- [3] A.A. Karatsuba, *On zeros of the Davenport-Heilbronn function*, Proceedings of Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori 1989), 1992, 271–293.
- [4] J.C. Lagarias, M. Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series*, preprint.
- [5] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Second Edition, revised by D. R. Heath-Brown, Oxford, 1986.
- [6] L. Weng, *Stability and new non-abelian zeta functions*, Number-theoretic methods (Iizuka, 2001), pp. 405–419, Dev. Math. **8**, Kluwer: Dordrecht 2002.
- [7] L. Weng, *A program for geometric arithmetic*, arXiv:math.AG//0111241, 2001.
- [8] L. Weng, *Analytic truncation and Rankin-Selberg versus algebraic truncation and non-Abelian zeta*, RIMS Koukyuuroku, Kyoto University, Vol. 1324, 2003, 7–21.
- [9] L. Weng, *Non-abelian L-functions for number fields*, preprint.

Masatoshi Suzuki,
 Graduate School of Mathematics,
 Nagoya University,
 Chikusa-ku, Nagoya 464-8602,
 Japan
 e-mail address: m99009t@math.nagoya-u.ac.jp

Jeffrey C. Lagarias,
 Dept. of Mathematics,
 University of Michigan
 Ann Arbor, MI 48109-1109,
 USA
 e-mail address: lagarias@umich.edu