数理解析研究所講究録
1512巻 2006年 1-18

多重三角関数とゼータ関数
(Multiple sine functions and zeta functions)

黒川信重
(Nobushige Kurokawa)
東京工業大学理学部
(Tokyo Inst. of Tech.)

0 はじめに (Introduction)

多重三角関数については，1980年代に研究に着手し，一応の成果が挙ってきた1990年頃から何度か講演をし，数理研講究録にもいくつか報告があります。その当時の公式の発表論文には

[1] N. Kurokawa "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 67A (1991) 61-64.

[2] N. Kurokawa "Gamma factors and Plancherel measures" Proc. Japan Acad. 68A (1992) 256-260.

[3] N. Kurokawa "Multiple sine functions: an example" Adv. Stud. in Pure Math. 21 (1992) 219-226.

があります。また，日本語による解説がいくつかあるうち

[4] 黒川信重「三角関数の一般化をめぐって」『津田塾大学数学・計算機科学研究所報』4 (1992) 1−25.（『近現代数学史シンポジウム4』1991年11月・報告集.）

は詳しい方です。これらの内容の詳細にわたる証明はすべて

[5] 黒川信重『多重三角関数講義』(Lectures on Multiple Sine Functions) 東京大学 1991年4月−7月（小山信也氏による 119ページのノート).

において述べてありました。この [5] は人づてに多方面に配られ，たとえば

[6] Yu. I. Manin "Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa)" Asterisque 228 (1995) 121−163.

は [5] に基づいて解説しています。また，

[7] M. Jimbo and T. Miwa "Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime" J. Phys. A 29 (1996) 2923−2958.

のように [4] 等を利用した論文も出て行きました。

さらに，

[8] 神保道夫『複素関数入門』岩波書店.

には多重三角関数が筆者の論文に基づいて演習問題として使用されるまでになって行きました。

ただし、申し訳ないことながら、日本語以外の論文として発表することは、その後年月を経てしまい、多重三角関数については

[9] N. Kurokawa and S. Koyama "Multiple sine functions" Forum Math. 15 (2003) 839–876.

[10] S. Koyama and N. Kurokawa "Kummer's formula for multiple gamma functions" J. Ramanujan Math. Soc. 18 (2003) 87–107.

[11] N. Kurokawa, H. Ochiai and M. Wakayama "Multiple trigonometry and zeta functions" J. Ramanujan Math. Soc. 17 (2002) 101–113.

[12] N. Kurokawa, Eva-Marie Müller-Stüler, H. Ochiai and M. Wakayama "Kronecker's Jugendtraum and ring sine functions" J. Ramanujan Math. Soc. 17 (2002) 211–220.

[13] S. Koyama and N. Kurokawa "Zeta functions and normalized multiple sine functions" Kodai Math. J. 28 (2005) 534–550.

多重ゼータ関数（絶対テンソル積）については

[14] S. Koyama and N. Kurokawa "Multiple zeta functions:

the double sine function and the signed double Poisson summation formula" Compositio Math. 140 (2004) 1176-1190.

[15] S. Koyama and N. Kurokawa "Multiple Euler products" Proc. St. Petersburg Math. Soc. 11 (2005) 123-166 [in Russian].

[16] N. Kurokawa and M. Wakayama "Absolute tensor products" Intern. Math. Res. Notices 2004-5 (2004) 249-260.

などからになってしまいました。このうち [9] は講義録 [5] の一部を英訳したものであり，ロシア語論文 [15] は [3] の話を拡充したものです。(後者はAMSから英訳出版予定。)

今回は，1990年頃の数理研講究録からすると15年振りの多重三角関数と多重ゼータ関数についての解説であり，その後の進展や問題について簡単に触れたいと思います。詳細は文献を参照してください。

この機会を与えて下さった研究集会主催者の桂田昌紀氏に深く感謝いたします。

1 素朴な多重三角関数 (Primitive multiple sine functions)

素朴な多重三角関数 $\mathcal{S}_r(x)$ は $r=1,2,3,\cdots$ に対して次のように定義される：

$$\mathcal{S}_1(x) = 2\sin(\pi x) = 2\pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

$r \geqq 2$ のとき

$$\mathcal{S}_r(x) = e^{\frac{x^{r-1}}{r-1}} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}}.$$

ただし，

$$P_r(u) = (1-u)\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^r}{r}\right).$$

たとえば

$$\mathcal{S}_2(x) = e^{x} \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n} e^{2x}\right\},$$

$$\mathcal{S}_3(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} e^{x^2}\right\}$$

である。このうち，二重三角関数 $\mathcal{S}_2(x)$ はヘルダー

[17] O. Hölder "Ueber eine transcendente Function" Göttingen Nachrichten 1886 Nr. 16 (1886) 514–522.

が研究した。これが多重三角関数の起源である。三重三角関数 $\mathcal{S}_3(x)$ 以降は黒川[1]に初登場した。$\mathcal{S}_r(x)$ ($r \geqq 2$ とする) についての話の要約は[1]，詳しい証明は[9]を見ていただくことにして，主な性質を列挙するにとどめたい．

1) 積分表示

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1} \cot(\pi t)\, dt\right)$$

をもつ．ここで積分路は $\mathbb{C} - \{\pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 内にとる。

2) 微分方程式

$$\frac{\mathcal{S}_r'(x)}{\mathcal{S}_r(x)} = \pi x^{r-1} \cot(\pi x)$$

をみたす。したがって，$\mathcal{S}_r(x)$ は２階の代数的微分方程式をみたす。

3) $\mathcal{S}_r(x) = \exp(\text{poly-log})$ 型の表示を持つ。
たとえば，$\mathrm{Im}(x) > 0$ に対しては

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(-2\pi i)^{r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-2\pi i x)^k}{k!} Li_{r-k}(e^{2\pi i x}) - \frac{\pi i}{r} x^r + \frac{(r-1)!}{(-2\pi i)^{r-1}} \zeta(r) \right).$$

ここで，

$$Li_r(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n^r}$$

は多重対数 (poly-log).

4) $x \to x+1$ に対する周期性をもつ。

5) 特殊値の表示をもつ（とくに $x \in \mathbb{Q}$ に対して）。
ここに，ゼータ関数や L-関数の難しい値（"algebraic" にわからないところ）との関係が現れる。たとえば

$$\mathcal{S}_3\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\right).$$

これは

$$\zeta(3) = \frac{8\pi^2}{7} \log\left(\mathcal{S}_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} 2^{\frac{1}{4}}\right)$$

という表示に他ならない。また，$\mathcal{S}_2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$

となるが，こちらは 1) と

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \pi t \cot(\pi t)\,dt = -\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin(\pi t)\,dt$$

とからわかるように，オイラーの有名な定積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin(\pi t)\,dt = -\frac{1}{2}\log 2$$

と同値である。

6) 自然数 N に対して N 倍角の公式がある。

2 正規多重三角関数 (Normalized multiple sine functions)

素朴な多重三角関数は親しみやすいものであるが，精密な性質を研究するためには正規化した多重三角関数を用いるのが便利である。いま，$\omega_1,\cdots,\omega_r > 0$ に対して（ただし，複素数へと拡張するのは簡単である），正規多重三角を

$$S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = \prod_{n_1,\cdots,n_r \geq 0}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x)\left(\prod_{m_1,\cdots,m_r \geq 1}(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r-x)\right)^{(-1)^{r-1}}$$

と定義する。ここで，正規積記号 $\prod$ は デニンガー

[18] Ch. Deninger "Local L-factors of motives and regularized determinants" Inv. Math. 107 (1992) 135–150.

によるものであり，

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp\left(- \frac{d}{ds}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} \right)\Big|_{s=0} \right)$$

と定義される。ただし、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}$ は $s=0$ を含む領域に解析接続されているものとする。 $r=1$ のときは

$$S_1(x, \omega) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)$$

と通常の三角関数になっている。また、$r=2$ のときは新谷卓郎が実2次体のクロネッカー青春の夢を研究する論文

[19] T. Shintani "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24 (1977) 167-199.

において はじめて使われた。新谷は $\varepsilon = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ のときに、$S_2(x, (1, \varepsilon))$ の3分値の積の値

$$S_2\left(\frac{1}{3}, (1,\varepsilon)\right) S_2\left(1+\frac{\varepsilon}{3}, (1,\varepsilon)\right) S_2\left(\frac{2+2\varepsilon}{3}, (1,\varepsilon)\right) = \sqrt{\frac{\frac{1+\sqrt{21}}{2} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}}{2}}$$

を求め、実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ の類体の構成問題への確実な手がかりを与えた。新谷の研究については解説

[20] 黒川信重「新谷卓郎の二重三角関数」『数学のたのしみ』2005年冬号(2005年1月), 76-89.

を参照されたい。

$r \geqq 3$ に対する $S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ は黒川[2]にはじまる。多重三角関数はバーンズ

[21] E. W. Barnes "On the theory of the multiple gamma function" Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904) 374-425.

による多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ を2個

$$S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = \Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))^{-1}\,\Gamma_r(\omega_1+\cdots+\omega_r-x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))^{(-1)^r}$$

のように組み合わせたものである。ここで

$$\Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = \Big(\prod_{n_1,\cdots,n_r\geqq 0}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x)\Big)^{-1}.$$

この関係式は，$r=1$ のときは

$$S_1(x,\omega) = \Gamma_1(x,\omega)^{-1}\,\Gamma_1(\omega-x,\omega)^{-1}$$

となるが，これはレルヒ（Lerch）の公式

$$\Gamma_1(x,\omega) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}$$

により

$$2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{\omega}\right)}$$

と書き換えられ，通常の"reflection formula"

$$\sin(\pi x) = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$$

と同値であることがわかる。多重ガンマ関数が"超越的"

であるのに対して，単純な構成であるが多重三角関数は"代数的"であることが特長である。$\mathcal{S}_r(x,(\omega_1,\ldots,\omega_r))$ の性質の主な点は次の通りである．

1) 周期性をもつ：

$$\mathcal{S}_r(x+\omega_i,(\omega_1,\ldots,\omega_r))=\mathcal{S}_r(x,(\omega_1,\ldots,\omega_r))\,\mathcal{S}_{r-1}(x,(\omega_1,\ldots\overset{i}{\vee}\ldots,\omega_r))^{-1}.$$

ただし，$\overset{i}{\vee}$ は ω_i を除くことを意味する。また，$r=1$ のときに必要になるので $\mathcal{S}_0(x,\phi)=-1$ と定義する．（$\Gamma_0(x,\phi)=x^{-1}$ とすると良い．）

2) N 倍角の公式をもつ：

$$\mathcal{S}_r(Nx,(\omega_1,\ldots,\omega_r))=\prod_{k_1,\ldots,k_r=0,\ldots,N-1}\mathcal{S}_r\left(x+\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},(\omega_1,\ldots,\omega_r)\right).$$

3) N 分値の積公式をもつ：

$$\prod_{\substack{k_1,\ldots,k_r=0,\ldots,N-1\\(k_1,\ldots,k_r)\neq(0,\ldots,0)}}\mathcal{S}_r\left(\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},(\omega_1,\ldots,\omega_r)\right)=N.$$

4) 斉次性をもつ：

$$\mathcal{S}_r(cx,(c\omega_1,\ldots,c\omega_r))=\mathcal{S}_r(x,(\omega_1,\ldots,\omega_r)).$$

5) $(\omega_1,\ldots,\omega_r)\in\mathbb{Q}^r$ のとき，$\mathcal{S}_r(x)$ との関係を持ち（とくに $\mathcal{S}_r(x)$ と $\mathcal{S}_r(x,(1,\ldots,1))$ の関係が基本的），代数的微分方程式をみたす。これによって，セルバーグゼータ関数の関数等式に現れるガンマ因子が多重ガンマ

関数によって明確に表示される。

6) 特殊値がゼータ関数やL-関数の特殊値との関係をもつ。たとえば、

$$S_3\left(\frac{3}{2}, (1,1,1)\right) = 2^{-\frac{1}{8}} \exp\left(-\frac{3\,\zeta(3)}{16\pi^2}\right)$$

すなわち

$$\zeta(3) = \frac{16\pi^2}{3} \log\left(S_3\left(\frac{3}{2}, (1,1,1)\right)^{-1} 2^{-\frac{1}{8}}\right).$$

また、

$$S_2\left(\frac{\omega_i}{2}, (\omega_1, \omega_2)\right) = \sqrt{2},$$

$$S_2(\omega_1, (\omega_1, \omega_2)) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}},$$

$$S_2(\omega_2, (\omega_1, \omega_2)) = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

のように簡明な表示を持つ場合がある。

7) $S_r(x, (\omega_1, \ldots, \omega_r))$ に対する"オイラー積(因子)表示"(あるいは"フーリエ級数表示")がある。[これは 1 の 3) にあたるものであるが、よりデリケートなものとなる。]

これらの性質の証明については既に挙げた文献[9]等を参照していただきたい。また 7) については後の 3 と本講究録所収の赤塚氏の報告を見られたい。さらに、多重三角関数の高階微分,グラフの挙動,オイラーの定積分との関係,マーラー測度との関係等については次を見られたい:

[22] N. Kurokawa "Derivatives of multiple sine functions" Proc. Japan Acad. 80 A (2004) 65–69.

[23] N. Kurokawa and M. Wakayama "Extremal values of double and triple trigonometric functions" Kyushu J. Math. 58 (2004) 141–166.

[24] S. Koyama and N. Kurokawa "Certain series related to the triple sine function" J. Ramanujan Math. Soc. 19 (2004) 161–166.

[25] S. Koyama and N. Kurokawa "Euler's integrals and multiple sine functions" Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005) 1257–1265.

[26] N. Kurokawa and M. Wakayama "Zeta regularized product expressions for multiple trigonometric functions" Tokyo J. Math. 27 (2004) 459–480.

[27] N. Kurokawa and M. Wakayama "Zeta regularizations" Acta Applicandae Math. 81 (2004) 147–166.

[28] N. Kurokawa and M. Wakayama "Differential algebraicity of multiple sine functions" Lett. Math. Phys. 71 (2005) 75–82.

[29] N. Kurokawa and M. Wakayama "Generalized zeta regularizations, quantum class number formula, and Appell's

Θ-functions" The Ramanujan J. 10 (2005) 291–303.

[30] N. Kurokawa and M. Wakayama "Regularizations and finite ladders in multiple trigonometry" J. Math. Soc. Japan 57 (2005) 1197–1216.

[31] N. Kurokawa "A q-Mahler measure" Proc. Japan Acad. 80 A (2004) 70–73.

[32] N. Kurokawa and H. Ochiai "Mahler measures via the crystalization" Commentari. Math. St. Pauli 54 (2005) 121–137.

[33] N. Kurokawa and M. Wakayama "Gamma functions and sine functions for Lie groups and period integrals" Indag. Math. 16 (2005) 585–607.

[34] N. Kurokawa and M. Wakayama "A q-logarithmic analogue of Euler's logarithmic sine integral" Rendiconti. Sem. Mat. Univ. Padova 114 (2005) 51–62.

[35] N. Kurokawa "Shintani's prehomogeneous zeta functions and multiple sine functions" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 54 (2005) 303–311.

$\boxed{3}$ 絶対テンソル積・多重ゼータ関数 (Absolute tensor prod.)

絶対テンソル積・多重ゼータ関数は，いくつかのゼータ関数

$$Z_j(s) = \prod_{\rho\in\mathbb{C}} (\rho - s)^{m_j(\rho)}$$

から

$$Z_1(s)\otimes\cdots\otimes Z_r(s) = \prod_{(\rho_1,\ldots,\rho_r)\in\mathbb{C}^r} (\rho_1+\cdots+\rho_r - s)^{m(\rho_1,\ldots,\rho_r)},$$

$$m(\rho_1,\ldots,\rho_r) = m_1(\rho_1)\cdots m_r(\rho_r) \times \begin{cases} 1 & \cdots\ \mathrm{Im}(\rho_1),\ldots,\mathrm{Im}(\rho_r)\geqq 0 \\ (-1)^{r-1} & \cdots\ \mathrm{Im}(\rho_1),\ldots,\mathrm{Im}(\rho_r)<0 \\ 0 & \cdots\ \text{その他} \end{cases}$$

と定義したものである。はじまりは黒川[3]。これは、通常の双曲三角関数

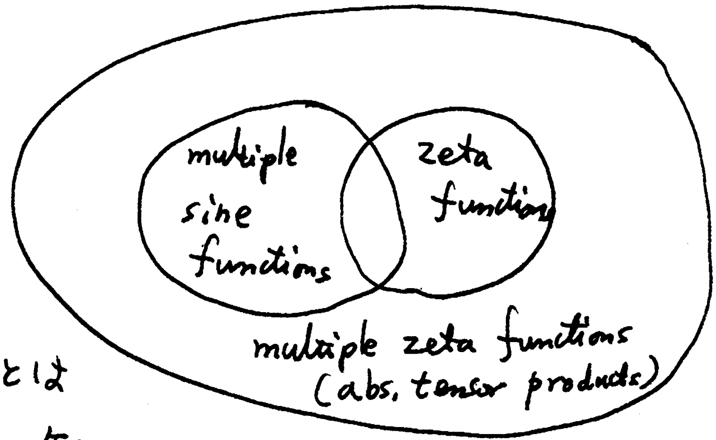
$$Z_j(s) = \sinh\left(\frac{\pi s}{\omega_j}\right) \cong 1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega_j}}$$

のときに用いれば多重(双曲)三角関数

$$Z_1(s)\otimes\cdots\otimes Z_r(s) \cong S_r(\sqrt{-1}\,s, (\omega_1,\ldots,\omega_r))$$

を与えることから、①②で述べた多重三角関数論を含む理論となる。

とくに、有限体 $\mathbb{F}_p$ のハッセゼータ関数 $\zeta(s,\mathbb{F}_p) = (1-p^{-s})^{-1}$ の場合に絶対テンソル積(ATP)を構成することは



多重三角関数論を別の観点から見ていることになり、$\zeta(s,\mathbb{F}_{p_1})\otimes\cdots\otimes\zeta(s,\mathbb{F}_{p_r})$ に対する"オイラー積(因子)表示"

は ② で 7) として挙げた項にあたる。詳しくは [14] [15] 等を見られたいが、簡明な結果を一つだけ書いておこう。

定理 p, q を相異なる素数とするとき，$\mathrm{Re}(s)>0$ に対して

$$\zeta_{p,q}(s) = \exp\left(-\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot\left(\pi n \frac{\log p}{\log q}\right)}{n} p^{-ns} - \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot\left(\pi n \frac{\log q}{\log p}\right)}{n} q^{-ns} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q^{-ns} \right)$$

とおくと次が成り立つ。

1) $\mathrm{Re}(s)>0$ で絶対収束する。

2) すべての $s\in\mathbb{C}$ に有理型関数（位数 2）として解析接続できる。

3) 零点を $s \in \frac{2\pi i}{\log p}\mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{2\pi i}{\log q}\mathbb{Z}_{\geq 0}$，

極を $s \in \frac{2\pi i}{\log p}\mathbb{Z}_{<0} + \frac{2\pi i}{\log q}\mathbb{Z}_{<0}$

においてもち，すべて 1 位。とくに，$\zeta_{p,q}(s)$ は $\zeta(s, \mathbb{F}_p) \otimes \zeta(s, \mathbb{F}_q)$ と $e^{Q(s)}$（$Q(s)$ は高々 2 次の多項式）倍を除いて一致する。

4) 関数等式

$$\zeta_{p,q}(-s) = \zeta_{p,q}(s)^{-1} (pq)^{\frac{s}{2}} (1-p^{-s})(1-q^{-s}) \times \times \exp\left(\frac{i\log p \log q}{4\pi} s^2 - \frac{\pi i}{6}\left(\frac{\log q}{\log p} + \frac{\log p}{\log q} + 3 \right) \right)$$

をみたす。

これらは $\zeta_p(s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns} \right)$ のときと比較するとわかりやすいであろう：1) $\zeta_p(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で絶対収束，2) すべての $s\in\mathbb{C}$ に有理型関数（位数 1）として解析接続できる，

3) 零点はなく，極は $s\in\frac{2\pi i}{\log p}\mathbb{Z}$ にありすべて1位。さらに $\zeta_p(s)=\zeta(s,\mathbb{F}_p)$，4) 関数等式 $\zeta_p(-s)=\zeta_p(s)(-p^{-s})$ をもつ。もちろん，$\zeta_p(s)$ のときには表示 $\zeta_p(s)=(1-p^{-s})^{-1}$ があるので簡単であるが，$\zeta_{p,q}(s)$ の場合は事情が異なり簡単ではない。本講究録の赤塚報告は $\zeta(s,\mathbb{F}_{p_1})\otimes\cdots\otimes\zeta(s,\mathbb{F}_{p_r})$ を詳しく扱っているので参照されたい。さらに，二重リーマンゼータ関数 $\zeta(s)\otimes\zeta(s)$ の二重オイラー積表示は[15]を見ていただきたい。絶対テンソル積については次も参照されたい：

[36] N. Kurokawa "Values of absolute tensor products" Proc. Japan Acad. 81A (2005) 185-190.

[37] M. Hirano, N. Kurokawa and M. Wakayama "Half zeta functions" J. Ramanujan Math. Soc. 18 (2003) 195-209.

[38] N. Kurokawa and M. Wakayama "Analyticity of polylogarithmic Euler products" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 52 (2003) 382-388.

[39] N. Kurokawa "Zeta functions over $\mathbb{F}_1$" Proc. Japan Acad. 81A (2005) 180-184.

なお，数学における最近の慣例により以上の文献は（印刷中や投稿中等のプレプリントは省略し）出版済のもののみ挙げた。

④ 未来への問題 (Problems)

紙数が規定をオーバーしてきたため，二つだけあげよう．

1) 多重三角関数の加法公式 (Addition relations)

$$S_r(x+y,\underline{\omega}) = S_r(x,\underline{\omega})+S_r(y,\underline{\omega}) + c_{11}(\underline{\omega})S_r(x,\underline{\omega})S_r(y,\underline{\omega}) + \sum_{\substack{i,j\geq 1\\ i+j\geq 2}} c_{ij}(\underline{\omega})S_r(x,\underline{\omega})^i S_r(y,\underline{\omega})^j$$

が 0の近傍の x, y に対して成立する．つまり，

$$F(X,Y) = X+Y+c_{11}(\underline{\omega})XY + \sum_{\substack{i,j\geq 1\\ i+j\geq 2}} c_{ij}(\underline{\omega})X^iY^j$$

(よって，$F(X,0)=X, F(0,Y)=Y, F(F(X,Y),Z)=F(X,F(Y,Z))$)

とおくと

$$S_r(x+y,\underline{\omega}) = F(S_r(x,\underline{\omega}), S_r(y,\underline{\omega}))$$

となる。たとえば，$r=1$ のとき $F(X,Y)=X\sqrt{1-\frac{Y^2}{4}}+Y\sqrt{1-\frac{X^2}{4}}$

である。一般的に係数 $c_{ij}(\underline{\omega})$ は

$$c_{11}(\underline{\omega}) = \frac{S_r''(0,\underline{\omega})}{S_r'(0,\underline{\omega})^2}, \quad c_{12}(\underline{\omega}) = c_{21}(\underline{\omega}) = \frac{S_r'''(0,\underline{\omega})S_r'(0,\underline{\omega})-S_r''(0,\underline{\omega})^2}{2S_r'(0,\underline{\omega})^4}$$

のように書くことができる。これらの係数を研究することによって Stirling modular functions (SMF) の性質が一層良く見えてくるであろう。これは通常の modular functions や modular forms への応用を持っている。慣例を破って，この方面のまだ出版されていない論文を一つだけあげておこう：

[40] N. Kurokawa "Cuspidal values of the principal Eisenstein series of weight 1 (I): an application of the double sine

function and the Stirling modular function" preprint.

2) 多重ゼータ関数からの零点情報 (Zeta zeros)

$\zeta(s)\otimes\zeta(s)$ の本質的零点が $\mathrm{Re}(s)>\frac{3}{2}$ にないことが二重オイラー積表示から得られたとしよう。すると，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>\frac{3}{4}$ に零点を持たないことがわかる。さらに $\zeta(s)^{\otimes r}$ の本質的零点が $\mathrm{Re}(s)>\frac{r+1}{2}$ にないことが r 重オイラー積表示から得られたとすると，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>\frac{r+1}{2r}$ に零点を持たないことがわかる。したがって，$r\to\infty$ とすることにより $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ に零点を持たないことがわかり，リーマン予想 (Riemann hypothesis) が示されることになる。この意味で絶対テンソル積の計算は興味深い問題を豊富に持っている。それは，$\zeta(s,\mathbb{F}_p)\otimes\zeta(s,\mathbb{F}_q)$ の場合にも弱い形で現れているが，たとえば，ディオファンティン型の問題，とくに，ベイカー (A. Baker) による abc 予想 (abc conjecture) 型の問題と関連している。

多重三角関数や絶対テンソル積（多重ゼータ関数）の研究は日々進歩している。この新分野への読者の参加を待ちたい。