数理解析研究所講究録
1512 巻 2006 年 124-133

Ramanujan のデルタ関数に付随する Rankin-Selberg L 函数の零点について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1. 前置き

講演では当初表題の内容について話をさせて頂く予定であったが, その後の研究の進展により更に一般的な結果について話をさせて頂いた. ではあるが, ここでは当初講演で話す予定であった内容に限定して述べる事としたい. 動機から結果, 証明に至る流れを説明するにはその方がよいと思ったからである. より一般の結果については [5], または [6] を参照して頂きたい.

2. 背景

表題にある Rankin-Selberg L 函数と切っても切れぬ関係にあるのが Rankin-Selberg 法である. Rankin-Selberg 法とは所謂 unfolding trick を用いて保型形式の基本領域上のある種の積分 (平均) を計算する手法であると言える. 今回の話は Rankin-Selberg 法と Fourier 解析の間の類似を考察するという観点がベースにある. きっかけは著者と Lagarias による [2] の結果 (後述) である. この観点からすれば得られた結果は最初の一歩とも言えないが, 結果だけ見ればそれなりに面白いのではないかと思う. 結果については次節で述べるので著者の妄想につき合わされたくない場合は次節から読んで頂きたい. この節では著者の期待する Rankin-Selberg 法と Fourier 解析の類似とはいかなるものであるかを説明したい.

まず Rankin-Selberg 法を最も簡単な場合で復習する. 上半平面 $\mathfrak{H}$ の変数を $z=x+iy$, $s=\sigma+it$ を $\sigma>1$ なる複素数とする. $\Gamma=PSL_2(\mathbf{Z})$ 上の実解析的 Eisenstein 級数 $E^*(z,s)$ とは級数

$$E^*(z,s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}\,\gamma z)^s$$

で定義される関数である. ここで $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ函数, $\Gamma_\infty=\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1&n\\ &1\end{smallmatrix}\right)\mid n\in\mathbf{Z}\}$. 定義から $E^*(z,s)$ は z の関数として Γ の作用に関して不変である. 即ち $E^*(\gamma z,s)=E^*(z,s)$. また s の函数として全平面に有理型に解析接続され $s=0,1$ を除いて正則で関数等式 $E^*(z,s)=E^*(z,1-s)$ を持つことが知られている.

いま $\phi(z)$ を $\mathfrak{H}$ 上の関数で Γ の作用に関して不変なものとする. また $y\to\infty$ のとき $\phi(x+iy)=O(y^{-N})\ \forall N>0$ であると仮定する. $\phi(z)$ の Γ 不変性から特に $\phi(z+1)=\phi(z)$.

従って $\phi(z)$ は Fourier 展開される．それを $\phi(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi_n(y)e^{2\pi inx}$ とする．$\phi_0(y)$ を $\phi(z)$ の定数項と呼ぶ．ここで $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上の積分

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\phi(z)E^*(z,s)\frac{dxdy}{y^2} \tag{2.1}$$

を考える．$\sigma>1$ と仮定すると $E^*(z,s)$ の定義と $\phi(z)$ の Γ 不変性から

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\phi(z)E^*(z,s)\frac{dxdy}{y^2}&=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\phi(\gamma z)(\operatorname{Im}\gamma z)^s\frac{dxdy}{y^2}\\&=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}}\phi(z)(\operatorname{Im}z)^s\frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}$$

ここで Γ_∞ の基本領域を $0<x<1,\ y>0$ と選べば

$$\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}}\phi(z)(\operatorname{Im}z)^s\frac{dxdy}{y^2}=\int_0^\infty\Big(\int_0^1\phi(z)dx\Big)y^s\frac{dy}{y^2}=\int_0^\infty\phi_0(y)\,y^{s-1}\frac{dy}{y}.$$

以上より

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\phi(z)E^*(z,s)\frac{dxdy}{y^2}=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\int_0^\infty\phi_0(y)\,y^{s-1}\frac{dy}{y}. \tag{2.2}$$

$\phi(z)$ の増大度に関する仮定から左辺は勝手な s について意味を持ち，右辺の解析接続を与える．しかも $E^*(z,s)$ の関数等式から右辺を解析接続した関数の関数等式が従う．以上が Rankin-Selberg 法の概略である．右辺が興味ある対象であるときその解析的性質を導くのに用いられる事が多い．

次に筆者と Lagarias が [2] で得た結果を簡単に述べる．$\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}=\{x+iy;\,|x|\leq\frac{1}{2},\,x^2+y^2\geq1\}$ で定義される Γ の基本領域の一つとする．また $\mathcal{F}_T:=\{z\in\mathcal{F};\,y\leq T\}$ とする．このとき任意に固定された $T\geq1$ について

$$Z_T(s):=\int_{\mathcal{F}_T}E^*(x+iy,s)\frac{dxdy}{y^2} \tag{2.3}$$

と定義する．$E^*(z,s)$ の性質から $Z_T(s)$ は $\mathbf{C}$ 上 $s=0,\ 1$ を除いて正則で，関数等式 $Z_T(s)=Z_T(1-s)$ を持つことが分かる．筆者と Lagarias は [2] において $Z_T(s)$ が Riemann 予想の類似を満たす事を示した．即ち $Z_T(s)$ の零点は全て関数等式の折り返し線 $\sigma=1/2$ 上にある．ここで $0<\sigma<1$ において

$$\lim_{T\to+\infty}Z_T(s)\equiv0 \tag{2.4}$$

であることに注意しておく．

最後に Fourier 解析で知られている以下の事実を紹介する．

命題 1. ある $\delta>0$ に対して $|f(t)|\ll e^{-|t|^{2+\delta}}$ を満たす $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(t)$ について考える．これらについて $f(t)$ の Fourier 変換

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{izt}dt \tag{2.5}$$

は z の整関数となる．$F(z)$ の全ての零点は実軸上にあると仮定する．このとき実軸上で実数値をとる genus 0 または 1 の整関数 $\phi(t)$ について

$$F_\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(it) f(t) e^{izt} dt \tag{2.6}$$

で定まる (整) 関数の零点も全て実軸上にある．

ここで $\phi(z)$ を Γ 不変な $\mathfrak{H}$ 上の関数とし

$$Z_{T,\phi}(s) := \int_{\mathcal{F}} \phi(z) \chi_T(z) E^*(x+iy, s) \frac{dxdy}{y^2} \quad (T \geq 1) \tag{2.7}$$

を考える．ここで $\chi_T(z)$ は $\mathcal{F}_T$ の特性関数[1]．定義から $\phi(z) \equiv 1$ のとき $Z_{T,\phi}(s) = Z_T(s)$.

(2.6) と (2.7) の右辺は何となく似ている．そして筆者と Lagarias の結果から (2.6) に関する (2.5) の対応物と考えられる (2.3) に対して (2.5) に関する仮定と同様の仮定は満たされている．従って $\phi(z)$ に関する適当な条件のもとで命題 1 の類似が成り立たないだろうかという期待が沸く．また $\phi(z)$ に適当な増大度条件を仮定すれば (2.7) で $T \to +\infty$ とした

$$Z_\phi(s) = \int_{\mathcal{F}} \phi(z) E^*(x+iy, s) \frac{dxdy}{y^2} \tag{2.8}$$

も定義されるから，[2] の結果から適当な $Z_\phi(s)$ の零点について何か言えないだろうかという疑問も沸く[2]．明らかに (2.8) は (2.1) そのものであり，$Z_\phi(s)$ について命題 1 の類似を考える事は Rankin-Selberg 法と Fourier 解析の類似を考える事であると言えるだろう．この観点から以下のような問題を設定してみる．

問題 1 $T \geq 1$ を一つ固定する．また $\int_0^1 \phi(x+iy)dx \not\equiv 0$ を仮定する．$Z_{T,\phi}(s)$ の零点が全て $\sigma = 1/2$ 上にあるために ϕ が満たすべき条件は何か？

問題 2 問題 1 と同様に $\int_0^1 \phi(x+iy)dx \not\equiv 0$ を仮定する．$Z_\phi(s)$ の零点が全て $\sigma = 1/2$ 上にあるために ϕ が満たすべき条件は何か？

注 1. $\int_0^1 \phi(x+iy)dx \not\equiv 0$ という制限は $Z_\phi(s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) \int_0^\infty \left(\int_0^1 \phi(z)dx\right) y^{s-2}\, dy$ による $Z_\phi(s) \not\equiv 0$ という要請である．

注 2. $\phi(z) \equiv 1$ のとき $Z_{T,\phi}(s)$ の零点は全て $\sigma = 1/2$ 上にあるから問題 1 は無意味な問いではない．また問題 2 については ϕ の範囲を $\mathcal{F}$ 上の関数から複素数値測度まで広げて考えれば零点が全て $\sigma = 1/2$ 上にある例を挙げることができる．即ち，$\mathcal{F}$ 上の複素数値測度 $d\mu$ に対し $Z_\mu(s) = \int_{\mathcal{F}} E^*(z,s) d\mu(z)$ と定めると特別な $d\mu$ に関して $Z_\mu(s)$ の零点は全て $\sigma = 1/2$ 上にある事がいえる (cf. [2]).

---

[1] $z \notin \mathcal{F}$ の時は $\gamma z \in \mathcal{F}$ となるような $\gamma \in \Gamma$ を選んで $\chi_T(z) = \chi_T(\gamma z)$ と定義する．

[2] $Z_\phi(s)$ の零点については [2] でも問題提起している．

問題を設定してみたものの, これらに解答を与えることは非常に困難な事が予想される. 何故ならばある $\phi(z)$ に対しては $Z_\phi(s)$ の零点は Riemann ゼータ函数の零点と直接関係しているからである.

次節から述べる結果は上記の問題を頭の片隅におきつつ, まずは $Z_\phi(s)$ の典型例である Rankin-Selberg L 函数の零点を調べて得られたものである. 上記の問題に対するヒントが得られる所までは至っていないが, 解析的な議論だけで広い非零領域が得られる手法は面白いと思う.

3. 結果

S_{12} を $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$ 上の重さ 12 の正則 cusp form の成すベクトル空間とする. S_{12} は一次元で Ramanujan デルタ関数 $\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$, $q = e^{2\pi iz}$ で生成される事はよく知られている. Δ に付随する Rankin-Selberg$L$ 函数 $L(s, \Delta\times\Delta)$ とは次の Dirichlet 級数で定義される関数である:

$$L(s,\Delta\times\Delta) = \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)^2}{n^{s+11}}. \tag{3.1}$$

ここで $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ函数. 以下では特に断わらない限り $\phi(z)=y^{12}|\Delta(z)|^2$ とする. Δ が重さ 12 の cusp form であることから $\phi(z)$ は Γ-不変で $y\to\infty$ のとき急減少. また

$$|\Delta(z)|^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+m)e^{-2\pi(2n+m)y}\Big)e^{2\pi imx}$$

であるから $\phi(z)$ の定数項 $\phi_0(y)$ は

$$\phi_0(y) = y^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)^2e^{-4\pi ny}. \tag{3.2}$$

故に (2.2), (2.8) から $\sigma > 1$ のとき

$$Z_\phi(s) = \pi^{-s}(4\pi)^{-s-11}\Gamma(s)\Gamma(s+11)\,L(s,\Delta\times\Delta). \tag{3.3}$$

以上の議論は他の正則 cusp form に対しても同様であり, $Z_\phi(s)$ はそれぞれの正則 cusp form に付随する Rankin-Selberg L 函数に他ならない. 従って前節の問題に対してはまず Rankin-Selberg L 函数を調べる事が重要である. 今回の結果は Rankin-Selberg$L$ 函数のある近似関数については広い非零領域を持つことが証明できるというものである. 証明には [2] の $Z_T(s)$ の Riemann 予想の証明に用いた結果を用いるが, $Z_T(s)$ の零点の性質を直接使用ものにはなっていない.

結果を $L(s,\Delta\times\Delta)$ に限定して述べる. S_{12} が一次元という特殊事情から主張が幾分簡単に述べられる. より一般の場合に関しては [5], または [6] を参照して欲しい.

定理 1. $\tau(m)\neq 0$ である任意の自然数 m について等式

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(11)}{(\Delta,\Delta)}Z_\phi(s) &= \frac{\Gamma(11)}{(\Delta,\Delta)}\pi^{-s}(4\pi)^{-s-11}\Gamma(s)\Gamma(s+11)\,L(s,\Delta\times\Delta)\\ &= (4\pi)^{-s}\Gamma(s+11)\,\zeta^*(2s)\,m^{-s} + (4\pi)^{s-1}\Gamma(12-s)\,\zeta^*(2s-1)\,m^{s-1}\\ &\quad + \Gamma(s+11)\Gamma(12-s)\,\{W_m^+(s)+W_m^-(s)\},\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$W_m^+(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(m+n)}{\tau(m)}\Big(\frac{m}{m+n}\Big)^{\frac{11}{2}}n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)P_{s-1}^{-11}\Big(\frac{2m+n}{n}\Big),$$
$$W_m^-(s)=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\tau(m-n)}{\tau(m)}\Big(\frac{m}{m-n}\Big)^{\frac{11}{2}}n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)P_{s-1}^{-11}\Big(\frac{2m-n}{n}\Big), \tag{3.5}$$

が垂直帯領域

$$|\,\mathrm{Re}(s)-1/2\,|<5 \tag{3.6}$$

内で成り立つ．但し $s=1/2$ では極限 $s\to 1/2$ の意味で考える．ここで (,) は S_{12} の Petersson 内積，$\zeta^*(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$，$\sigma_\nu(n)=\sum_{d|n}d^\nu$，また $P_\nu^\mu(z)$ は第一種 Legendre 陪関数．無限級数 $W_m^+(s)$ は (3.6) のコンパクトな部分集合で

$$W_m^+(s)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\tau(m+n)}{\tau(m)}\Big(\frac{m}{m+n}\Big)^{\frac{11}{2}}n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)P_{s-1}^{-11}\Big(\frac{2m+n}{n}\Big)+O(N^{|\sigma-1/2|-5+\varepsilon}) \tag{3.7}$$

と評価され (3.6) 内で広義一様収束する．

注 3. Lemher 予想によれば全ての自然数 m について $\tau(m)\neq 0$.

定理 1 を用いて $Z_\phi(s)$ の近似関数 $L_m(s,N)$ を定義する．まず自然数 N について

$$W_m^+(s,N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\tau(m+n)}{\tau(m)}\Big(\frac{m}{m+n}\Big)^{\frac{11}{2}}n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)P_{s-1}^{-11}\Big(\frac{2m+n}{n}\Big) \tag{3.8}$$

とおく．また $W_m^+(s,0)\equiv 0$ と約束する．これを用いて $L_m(s,N)$ を

$$\frac{\Gamma(11)}{(\Delta,\Delta)}L_m(s,N)=(4\pi)^{-s}\Gamma(s+11)\,\zeta^*(2s)\,m^{-s}+(4\pi)^{s-1}\Gamma(12-s)\,\zeta^*(2s-1)\,m^{s-1}$$
$$+\Gamma(s+11)\Gamma(12-s)\,\{W_m^+(s,N)+W_m^-(s)\}, \tag{3.9}$$

で定義する．固定された m について (3.6) 内で広義一様に $\lim_{N\to\infty}L_m(s,N)=Z_\phi(s)$ となるから $L_m(s,N)$ は $Z_\phi(s)$ をこの意味で近似する関数である．$n^{s-\frac12}\sigma_{1-2s}(n)$ と $P_{s-1}^\mu(z)$ が $s\mapsto 1-s$ で不変である事から $W_m^+(s,N)=W_m^+(1-s,N)$ であり，これから $L_m(s,N)$ も関数等式

$$L_m(s,N)=L_m(1-s,N) \tag{3.10}$$

を持つ．この $L_m(s,N)$ の非零領域に関して次が示される．

定理 2. m を $\tau(m)\neq 0$ である自然数とする．任意に与えられた整数 $N\geq 0$ と実数 $a>0$ に対して定数 $C=C_{m,N,a}>0$ が存在して $L_m(s,N)$ は領域

$$\frac{\log\{C\log^{\frac12}(|t|+1)\}}{\log(|t|+1)}<\Big|\,\sigma-\frac12\,\Big|<a, \tag{3.11}$$

内に零点を持たない．特に任意の $0<\sigma_1<\sigma_2$ について

$$N(T,\sigma_1,\sigma_2)=O_{\sigma_1,\sigma_2}(1). \tag{3.12}$$

ここで $N(T,\sigma_1,\sigma_2)$ は $L_m(s,N)$ の $\sigma_1\leq\mathrm{Re}(s)-1/2\leq\sigma_2$, $|t|\leq T$ 内の零点の個数.

注 4. Selberg は彼の軟化子を用いた方法により，$\zeta(s)$ の $\sigma \geq a,\ |t| \leq T$ 内の零点の個数を $N(T,a)$ としたとき，$N(T,1/2+4\delta) \ll T^{1-\delta}\log T$ と $\delta \geq 0$ について一様に評価できる事を示している．これから殆ど全ての $\zeta(s)$ の零点は

$$\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\eta(t)}{\log(|t|+3)}$$

内にある事が従う．ここで $\eta(t)$ は無限大まで増加する任意の正値関数．定理2は $Z_\phi(s) = (\Gamma\text{因子}) \times L(s,\Delta\times\Delta) = (\Gamma\text{因子}) \times \zeta(s)L(s,\mathrm{sym}^2\Delta)$ の近似関数 $L_m(s,N)$ の零点が全てこの様な領域にある事を示している．

4. 定理 1 の証明

以下では $E^*_s(z) = E^*(z,s)$ とも記すこととする．定理 1 は Petersson 内積 $(\Delta E^*_s, P_m)$ を二通りに計算する事で得られる (Petersson 内積の定義は [4, p.330] 等を参照のこと)．Noda は [3] で定理 1 と本質的に同様の結果を [4] の C^∞ modular form の holomorphic projection の性質を用いて示している．しかし S_k の次元が一般の場合に拡張する事を視野にいれると直接 Petersson 内積を扱う方が都合がよい．

m を自然数とする．P_m を Γ 上の重さ 12 の Poincaré 級数とする．$\Delta, P_m \in S_{12}$ である事と S_{12} が一次元である事から P_m は Δ により

$$P_m(z) = \frac{\Gamma(11)}{(\Delta,\Delta)}(4\pi m)^{-11}\tau(m)\,\Delta(z) \tag{4.1}$$

と表示される．従って

$$\begin{aligned}(\Delta E^*_s, P_m) =& \frac{\Gamma(11)}{(\Delta,\Delta)}(4\pi m)^{-11}\tau(m)\,(\Delta E^*_s,\Delta)\\ =& \frac{\Gamma(11)}{(\Delta,\Delta)}(4\pi m)^{-11}\tau(m)\,\pi^{-s}(4\pi)^{-s-11}\Gamma(s)\Gamma(s+11)L(s,\Delta\times\Delta).\end{aligned} \tag{4.2}$$

$\Delta(z)$ が cusp form である事から (4.2) は全ての $s \in \mathbf{C}$ について成り立つ．

一方, [3] の Lemma 1 により $0 < \sigma < 1$ の範囲で $\Delta(z)E(z,s)$ は bounded growth な C^∞ modular form である (bounded growth の定義は [4, p.330, (6)] を参照のこと)．従って [4, Prop.1,(B)] から

$$(\Delta E^*_s, P_m) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \tau(n)\,a_{m-n}(y,s)e^{-2\pi ny}\right)e^{-2\pi my}y^{10}dy \quad (0 < \mathrm{Re}(s) < 1). \tag{4.3}$$

ここで $a_n(y,s)$ は $E^*(z,s)$ の Fourier 係数で

$$a_n(y,s) = \begin{cases}\zeta^*(2s)y^s + \zeta^*(2s-1)y^{1-s} & n=0,\ s \neq 1/2,\\ 2|n|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(|n|)\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|n|y) & n \neq 0.\end{cases} \tag{4.4}$$

形式的に計算すれば (4.3) の右辺は

$$\sum_{n=0}^{m-1}\tau(m-n)\int_0^\infty a_n(y,s)e^{-2\pi(2m-n)y}y^{10}dy \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\tau(m+n)\int_0^\infty a_n(y,s)e^{-2\pi(2m+n)y}y^{10}dy. \tag{4.5}$$

で, この順序交換は正当化される. $n=0$ のとき

$$\int_0^\infty a_0(y,s)e^{-4\pi my}y^{10}dy \\ =(4\pi m)^{-s-11}\Gamma(s+11)\,\zeta^*(2s)+(4\pi m)^{s-12}\Gamma(12-s)\,\zeta^*(2s-1). \tag{4.6}$$

また $n\geq 1$ のとき

$$\int_0^\infty K_\nu(x)e^{-ax}x^{\mu-1}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{(a^2-1)^{\mu/2-1/4}}P_{\nu-1/2}^{-\mu+1/2}(a) \tag{4.7}$$

を用いて

$$\int_0^\infty a_n(y,s)e^{-2\pi(2m\pm n)y}y^{10}dy \\ =(4\pi m)^{-11}\Gamma(s+11)\Gamma(12-s)\left(\frac{m}{m\pm n}\right)^{\frac{11}{2}}n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)\,P_{s-1}^{-11}\left(\frac{2m\pm n}{n}\right). \tag{4.8}$$

以上により

$$\begin{aligned}(\Delta E_s^*,P_m)=\;&(4\pi m)^{-11}\tau(m)\Big[(4\pi)^{-s}\Gamma(s+11)\,\zeta^*(2s)\,m^{-s}\\ &\qquad+(4\pi)^{s-1}\Gamma(12-s)\,\zeta^*(2s-1)\,m^{s-1}\Big]\\ &+(4\pi m)^{-11}\Gamma(s+11)\Gamma(12-s)\\ &\times\sum_{n=1}^{m-1}\tau(m-n)\left(\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{11}{2}}n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)P_{s-1}^{-11}\left(\frac{2m-n}{n}\right)\\ &+(4\pi m)^{-11}\Gamma(s+11)\Gamma(12-s)\\ &\times\sum_{n=1}^{\infty}\tau(m+n)\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{11}{2}}n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)P_{s-1}^{-11}\left(\frac{2m+n}{n}\right).\end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.3) と (4.9) から $0<\sigma<1$ において (3.4) を得る. 領域 (3.6) で (3.4) が成り立っている事を言うためには (3.4) の左辺は $s=0,1$ を除いて $\mathbf{C}$ 全体で正則であることから, 右辺の無限級数が (3.6) で広義一様収束する事を確かめればよい. これは容易に確かめられるが詳細は割愛する. □

5. 定理 2 の証明

関数等式 (3.10) から右半平面 $\sigma\geq 1/2$ において調べれば十分である. 定義より

$$L_m(s,N)=(4\pi)^{-s-11}\Gamma(s+11)\,\zeta^*(2s)\,m^{-s}\left\{1+R_m(s,N)\right\} \tag{5.1}$$

と書ける．ここで

$$
\begin{aligned}
R_m(s,N) &= (4\pi m)^{2s-1}\frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s+11)}\frac{\zeta^*(2s-1)}{\zeta^*(2s)} \\
&\quad + (4\pi m)^s\frac{\Gamma(12-s)\{W_m^+(s,N)+W_m^-(s)\}}{\zeta^*(2s)}.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

(5.1) において因子 $(4\pi)^{-s-11}\Gamma(s+11)\zeta^*(2s)$ は $\sigma \geq 1/2$ において零点を持たないから，ある $\sigma \geq 1/2$ 内の集合 A において

$$
|R_m(s,N)| < 1 \quad \forall s \in A \tag{5.3}
$$

が示されれば $L_m(s,N)$ は A に零点を持たない事が結論される．以下，帯領域 $1/2 \leq \sigma \leq a$ において $|t| \to \infty$ である時

$$
|R_m(s,N)| = O(\,|t|^{1-2\sigma}\log|t|\,) \tag{5.4}
$$

と評価される事を示す．ここで O-定数は m, N, a に依存する．これにより (3.11) の如き領域で $1+R_m(s,N) \neq 0$ である事が結論される．従って同じ領域で $L_m(s,N) \neq 0$ である．いま

$$
I_m(s) = (4\pi m)^{2s-1}\frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s+11)}\frac{\zeta^*(2s-1)}{\zeta^*(2s)}, \tag{5.5}
$$

$$
J_m(s,N) = (4\pi m)^s\frac{\Gamma(12-s)\{W_m^+(s,N)+W_m^-(s)\}}{\zeta^*(2s)}, \tag{5.6}
$$

とおく．これらは $1/2 \leq \sigma \leq a$ において $|t| \to \infty$ のとき

$$
|I_m(s)| = O(\,|t|^{1-2\sigma}\,) \tag{5.7}
$$

$$
|J_m(s,N)| = O(\,|t|^{1-2\sigma}\log|t|\,). \tag{5.8}
$$

と評価され，これから評価 (5.4) が従う．従って (5.7) と (5.8) を示せばよい．

(5.7) の証明. $\xi(s) = s(s-1)\zeta^*(s)$ とおく．まず Stirling の公式により $1/2 \leq \sigma \leq a$ において $|t| \to \infty$ のとき

$$
\left|(4\pi m)^{2s-1}\frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s+11)}\frac{\zeta^*(2s-1)}{\zeta^*(2s)}\right| = O\Big(\,|t|^{1-2\sigma}\Big|\frac{\xi(2s-1)}{\xi(2s)}\Big|\,\Big).
$$

ここで [2, Proof of Th. 2] から $\sigma \geq 1/2$ において

$$
\left|\frac{\xi(2s-1)}{\xi(2s)}\right| \leq 1 \tag{5.9}
$$

が成り立つ [3] ので (5.7) が従う． □

(5.8) の証明. $J_m(s,N)$ の定義と (3.5) から

$$
(4\pi m)^s\frac{\Gamma(12-s)}{\zeta^*(2s)}P_{s-1}^{-11}(\cosh\zeta) \quad (\zeta > 0)
$$

[3] この不等式を示す事が [2] における $Z_T(s)$ の Riemann 予想の証明の鍵.

を評価すればよい. [8] の $P_\nu^\mu(z)$ の漸近式から $1/2 \leq \sigma < a$ において $|t| \to \infty$ のとき

$$P_{s-1}^{-11}(\cosh\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+11)} \frac{1}{(s-1)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\zeta/2}}{\sqrt{1-e^{-2\zeta}}} \times \left[e^{(s-\frac{1}{2})\zeta} + e^{\pm\frac{3}{2}\pi i} e^{-(s-\frac{1}{2})\zeta} + O(|s-1|^{-1}) \right]. \tag{5.10}$$

ここで O-定数は $\zeta > 0$ に依存する. これより

$$\left| (4\pi m)^s \frac{\Gamma(12-s)}{\zeta^*(2s)} P_{s-1}^{-11}(\cosh\zeta) \right| \leq \frac{(4\pi^2 m)^\sigma}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s+11)} \right| \frac{1}{|\zeta(2s)|} \frac{1}{\sqrt{|s-1|}} \times \frac{e^{-\zeta/2}}{\sqrt{1-e^{-2\zeta}}} \left[e^{(\sigma-1/2)\zeta} + e^{-(\sigma-1/2)\zeta} + O(|s-1|^{-1}) \right].$$

再び Stirling の公式より $\left|\frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s+11)}\right| = O(|t|^{1-2\sigma})$. また, ある定数 $A > 0$ が存在して $\sigma \geq 1/2 - A/\log(|t|+2)$ において

$$|\zeta(2s)|^{-1} = O(\log(|t|+2)) \tag{5.11}$$

が知られているので ([7, p.60]), $1/2 \leq \sigma < a$ において $|t| \to \infty$ のとき

$$\left| (4\pi m)^s \frac{\Gamma(12-s)}{\zeta^*(2s)} P_{s-1}^{-11}(\cosh\zeta) \right| = O(|t|^{1-2\sigma} \log|t|). \tag{5.12}$$

固定された m について

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{m-1} &< \frac{2m-n}{n} < 2m-1 \quad (1 \leq n \leq m-1) \\ 1 + \frac{2m}{N} &< \frac{2m+n}{n} < 2m+1 \quad (1 \leq n \leq N) \end{aligned} \tag{5.13}$$

だから (3.5) と (5.12) により (5.8) が成り立つ. □

6. 結び

定理 2 のより望ましい形は, ある自然数 m について十分大きな全ての N に対して $L_m(s, N)$ の全ての零点が $\sigma = 1/2$ 上にある事が示される事である. もしこれが示されれば $L(s, \Delta \times \Delta)$, 更には $\zeta(s)$ の Riemann 予想が示される! しかしその様な事が示せるとしても, それには全く新しいアイディアが必要になると思われる. 何故ならば定理 2 の証明を概観すれば分かる様に, 定理 2 の証明には Fourier 係数 $\tau(n)$ の性質は代数的な性質はおろか評価さえ用いていない. これは [5] で扱っているより一般の場合でも同様である. $Z_\phi(s)$ が Hecke eigen でない cusp form の Rankin-Selberg L 函数である場合, $Z_\phi(s)$ の Riemann 予想は一般には成り立たない. 従って Fourier 係数の乗法性を用いないで示せる事は定理 2 程度に限定されると思われるのである. より詳細な解析を行う事により $\tau(n)$ の乗法性を用いずに $L_m(s, N)$ の $1/2 \leq \sigma \leq 1$ における零点の個数を $O(1)$ (但し m, N に依存する) と評価する事は可能かもしれない (cf. [1]). しかしそれ以上の事を言うためには $\tau(n)$ の乗法性が本質的な役割を果たす議論が必要となるであろう. 手掛かりは今のところ無く, その様な事が可能かさえ明らかではないのだが.

References

[1] H. Ki, *All but finitely many zeros of the approximations of the Epstein zeta function are simple and lie on the critical line*, Proc. London Math. Soc., **90** (2005), 321–344.

[2] J.C. Lagarias, M. Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series*, to appear in J.Number Theory.

[3] T. Noda, *An application of the projections of C^∞ automorphic forms*, Acta Arith. **72** (1995), 229–234.

[4] J. Strum, *The critical values of zeta functions associated to the symplectic group*, Duke Math. J. **48** No.2 (1981), 327–350.

[5] M. Suzuki, *On the zeros of the approximate function of the Rankin-Selberg L-functions* , preprint.

[6] ———, *Rankin-Selberg L 関数, 及び symmetric square L 関数の零点について* 数理研講究録「保型表現・L 函数・周期の研究」, 掲載予定.

[7] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986.

[8] G.N. Watson, *Asymptotic expansions of hypergeometric functions*, Trans. Cambridge Phi-los. Soc. **22** (1918), 277–308.

Masatoshi Suzuki,
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602,
Japan
e-mail address:m99009t@math.nagoya-u.ac.jp