数理解析研究所講究録
1512巻 2006年 134-147

Severi–Brauer 多様体上の Minkowski 第2定理

渡部 隆夫 (Watanabe Takao)
阪大・理 (Osaka University・Graduate School of Science)

1 Minkowski の第2定理と代数体への一般化

1.1 超楕円体における Minkowski の第2定理

Minkowski の第2定理は, n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の中の原点対称な凸体 Ω が与えられたとき, その逐次最小 (successive minima) の積の評価を与える不等式である. いま g を $n \times n$ 正則実行列として, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_g$ を正定値対称行列 ${}^t g \cdot g$ から従う $\mathbf{R}^n$ 上の2次形式とする. 即ち

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x} \cdot ({}^t g \cdot g) \cdot \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$$

である. ここで $\boldsymbol{x}$ は列ベクトルと見なしており, また ${}^t g$ は g の転置行列を表す. Ω が $\boldsymbol{q}$ から定義される超楕円体 $\Omega_g = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \leqq 1\}$ の場合には, Minkowski の第2定理は次のようになる (cf. [5, Theorem 2.6.8]). 実数 $\lambda > 0$ に対し, Ω_g を λ 倍に拡大した凸体を $\Omega_g(\lambda)$ とする. よって $\Omega_g(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \leqq \lambda^2\}$ である. $\Omega_g(\lambda)$ の中の整数点 $\Omega_g(\lambda) \cap \mathbf{Z}^n$ によって張られる $\mathbf{R}^n$ の部分空間を $\mathrm{Span}(\Omega_g(\lambda) \cap \mathbf{Z}^n)$ と表す. このとき, 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$\lambda_i(g) = \min\{\lambda > 0 \mid \dim \mathrm{Span}(\Omega_g(\lambda) \cap \mathbf{Z}^n) \geqq i\}$$

により定義される値を i 番目の逐次最小という. 明らかに不等式

$$\lambda_1(g) \leqq \lambda_2(g) \leqq \cdots \leqq \lambda_n(g)$$

が成り立ち, とくに $\lambda_1(g)$ は

$$\lambda_1(g) = \min_{0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})^{1/2}$$

で与えられる. この逐次最小について次の評価が成り立つ.

定理 1 (Minkowski) 任意の $g \in GL_n(\mathbf{R})$ に対し, 不等式

$$\lambda_1(g)\lambda_2(g)\cdots\lambda_n(g) \leqq \gamma_n^{n/2}|\det g| \tag{1}$$

が成り立つ. ここで, γ_n は g には依存しない定数で

$$\gamma_n = \max_{g\in GL_n(\mathbf{R})} \Gamma_n(g) \qquad \text{ただし } \Gamma_n(g) = \lambda_1(g)^2|\det g|^{-2/n}$$

により定義される.

値 $\Gamma_n(g)$ を g の Hermite 不変量といい, 定数 γ_n を Hermite 定数という. Γ_n は $GL_n(\mathbf{R})/GL_n(\mathbf{Z})$ 上の連続関数を与え, 実際に最大値をもつことが証明できる. 不等式 (1) の評価が最良であることは, 定数 γ_n の定義から容易にわかる. 実際, g_0 を $\Gamma_n(g_0) = \gamma_n$ となるような $GL_n(\mathbf{R})$ の要素とすれば, 対応する正定値2次形式 $\boldsymbol{q}_{g_0}$ に関する $\mathbf{Z}^n$ の最小ベクトル集合は, $\mathbf{R}^n$ の基底を含む. 即ち $\mathrm{Span}(\Omega_{g_0}(\lambda_1(g_0)) \cap \mathbf{Z}^n) = \mathbf{R}^n$ が成り立つことが知られている (cf. [5, Theorem 3.5.2]). これから $\lambda_1(g_0) = \lambda_2(g_0) = \cdots = \lambda_n(g_0)$ となり, この場合の (1) は

$$\lambda_1(g_0) \leqq \gamma_n^{1/2}|\det g_0|^{1/n} = \Gamma_n(g_0)^{1/2}|\det g_0|^{1/n} = \lambda_1(g_0)$$

となり等号が成り立つ. **定理 1** を 2 次形式の言葉で言い換えれば,

系 1 $\mathbf{R}^n$ 上の正定値 2 次形式 $\boldsymbol{q}$ に対し, $\mathbf{Z}^n$ の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ で, 不等式

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_2)\cdots\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_n) \leqq \gamma_n^n \mathrm{disc}(\boldsymbol{q})$$

を満たすものが存在する. ここで $\mathrm{disc}(\boldsymbol{q})$ は $\boldsymbol{q}$ の判別式を表す.

注 1 $n \geqq 4$ ならば, **系 1** のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は, 一般には $\mathbf{Z}^n$ の基底にはならない (cf. [5, p.51]). 他方, 次の Hermite の定理がある (cf. [5, Theorem 2.2.8]).

定理 (Hermite) $\mathbf{R}^n$ 上の正定値 2 次形式 $\boldsymbol{q}$ に対し, $\mathbf{Z}^n$ の基底 $\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \cdots, \boldsymbol{x}'_n$ で, 不等式

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}'_1)\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}'_2)\cdots\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}'_n) \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/2} \mathrm{disc}(\boldsymbol{q})$$

を満たすものが存在する.

注 2 正定数 γ_n については, 次のようなことが知られている (cf. [5, Corollary 3.4.7]).

定理 (Korkine–Zolotareff) γ_n^n は有理数である．

正確な値がわかっているのは

$$\gamma_2 = \tfrac{2}{\sqrt{3}},\quad \gamma_3 = \sqrt[3]{2},\quad \gamma_4 = \sqrt{2},\quad \gamma_5 = \sqrt[5]{8},\quad \gamma_6 = \sqrt[6]{\tfrac{64}{3}},\quad \gamma_7 = \sqrt[7]{64},\quad \gamma_8 = 2,$$
$$\gamma_{24} = 4.$$

である (cf. [5, 14.4])．γ_{24} の値は, Cohn と Kumar により求められた．

1.2 代数体への一般化

定理 1 は, Vaaler により, 代数体上の射影空間の捻れ高さから定義される逐次最小の積の評価として次のように拡張された．有限次代数体を k とし, そのアデール環を $\mathbf{A}$ とする．k の各素点 v に対し, k の v での完備化を k_v, 正規化された乗法付値を $|\cdot|_v$, また, イデール群 $\mathbf{A}^\times$ のイデールノルムを $|\cdot|_{\mathbf{A}}$ と表す．このとき n 次元ベクトル空間 k_v^n 上の局所的な高さ $H_v : k_v^n \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqq 0}$ を

$$H_v\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} (x_1\overline{x_1} + \cdots + x_n\overline{x_n})^{[k_v:\mathbf{R}]/2} & (v \mid \infty) \\ \sup(|x_1|_v, \cdots, |x_n|_v) & (v \nmid \infty) \end{cases}$$

により定義する．アデール群 $GL_n(\mathbf{A})$ の要素 $g = (g_v)_v$ を固定して, ベクトル空間 k^n 上の捻れ高さ $H_g : k^n \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqq 0}$ を

$$H_g(\boldsymbol{x}) = \prod_v H_v(g_v\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x} \in k^n)$$

と定義する．ここで右辺の積の v は k のすべての素点を渡る．イデールノルムの積公式から, H_g の $k^n - \{0\}$ への制限は, $n-1$ 次元射影空間 $\mathbf{P}^{n-1}(k)$ 上の高さを引き起こす．さて, 正の実数 λ に対し,

$$\Omega_g(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in k^n - \{0\} \mid H_g(\boldsymbol{x}) \leqq \lambda\}$$

とおき, この集合により張られる k^n の部分空間を $\mathrm{Span}(\Omega_g(\lambda))$ と表す．このとき, 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し, i 番目の逐次最小が

$$\lambda_i(g) = \min\{\lambda > 0 \mid \dim \mathrm{Span}(\Omega_g(\lambda)) \geqq i\}$$

により定義される．とくに $\lambda_1(g)$ は

$$\lambda_1(g) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{P}^{n-1}(k)} H_g(\boldsymbol{x})$$

と表せる．ここで, Northcott の定理により, $\Omega_g(\lambda)/k^\times$ は $\mathbf{P}^{n-1}(k)$ の有限部分集合となるから, 右辺の最小値が存在する．次の定理は Vaaler による (cf. [9])．

定理 2 (Vaaler) 任意の $g \in GL_n(\mathbf{A})$ に対し

$$\lambda_1(g)\lambda_2(g)\cdots\lambda_n(g) \leqq \gamma_n(k)^{n/2}|\det g|_{\mathbf{A}} \tag{2}$$

が成り立つ. ここで, 定数 $\gamma_n(k)$ は

$$\gamma_n(k) = \max_{g \in GL_n(\mathbf{A})} \lambda_1(g)^2|\det g|_{\mathbf{A}}^{-2/n}$$

により定義される.

不等式 (2) の評価が最良であることは, $\gamma_n(k)$ の定義から容易に従う. **定理 2** は次のように言い換えてもよい.

系 2 任意の $g \in GL_n(\mathbf{A})$ に対し, k^n の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ で, 不等式

$$H_g(\boldsymbol{x}_1)H_g(\boldsymbol{x}_2)\cdots H_g(\boldsymbol{x}_n) \leqq \gamma_n(k)^{n/2}|\det g|_{\mathbf{A}}$$

を満たすものが存在する.

注 3 **定理 2** が**定理 1** の一般化であることは, 次のようにわかる. $k = \mathbf{Q}$ を有理数体として, $g = (g_\infty, g_2, g_3, g_5, \cdots)$ を, 任意の素数 p に対し $g_p \in GL_n(\mathbf{Z}_p)$ であるような $GL_n(\mathbf{A})$ の要素とする. このとき, 定義から, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n$ が原始的 (成分の最大公約数が 1) ならば

$$H_g(\boldsymbol{x})^2 = H_\infty(g_\infty \boldsymbol{x})^2 = \boldsymbol{q}_{g_\infty}(\boldsymbol{x})$$

となることがわかる. この関係は各 i に対し $\lambda_i(g) = \lambda_i(g_\infty)$ となることを導く. また $\mathbf{Q}$ の類数が 1 であること, 即ち,

$$GL_n(\mathbf{A}) = \left(GL_n(\mathbf{R})\prod_p GL_n(\mathbf{Z}_p)\right)GL_n(\mathbf{Q})$$

であることに注意すると, $\gamma_n = \gamma_n(\mathbf{Q})$ も容易に従う. 従って, $k = \mathbf{Q}$ の場合に, このような g については, 不等式 (2) は不等式 (1) と一致する.

注 4 定数 $\gamma_n(k)$ は k の一般 Hermite 定数といわれる. k の類数が 1 ならば, $\gamma_n(k)$ は代数的数になることが証明されている (Coulangeon). また, 幾つかの類数 1 の 2 次体と 3 次体について, $\gamma_2(k)$ の値が決定されている.

2 Severi–Brauer 多様体上への拡張

2.1 Hermite–Rankin 定数

結果を解説する前に, このような研究に思い至った動機を述べたい. Hermite 定数を一般化したものとして, Hermite–Rankin 定数といわれるものがある. これは, 一般の代数体 k 上では次のように定義される. $1 \leqq \ell \leqq n-1$ であるような自然数 ℓ を固定する. n 次元ベクトル空間の ℓ 次の外積を $\mathrm{E}_{n,\ell}(k)$ と表す. 即ち

$$\mathrm{E}_{n,\ell}(k) = \bigwedge^{\ell} k^n$$

である. 完備体 k_v についても同様に $\mathrm{E}_{n,\ell}(k_v)$ が定義される. k^n の標準的な基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ とすれば, $\mathrm{E}_{n,\ell}(k)$ 及び $\mathrm{E}_{n,\ell}(k_v)$ の基底は

$$\{\boldsymbol{e}_I = \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_\ell}\}_I \qquad \text{ただし } I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$$

により与えられる. この基底に関して, **1.2** と同様の方法で, $\mathrm{E}_{n,\ell}(k_v)$ 上の高さ $H_v : \mathrm{E}_{n,\ell}(k_v) \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqq 0}$ が定義される. 更に, アデール群の要素 $g = (g_v)_v \in GL_n(\mathbf{A})$ に対して, $\mathrm{E}_{n,\ell}(k)$ 上の捻れ高さ H_g を

$$H_g(X) = \prod_v H_v(\rho_\ell(g_v)X), \qquad (X \in \mathrm{E}_{n,\ell}(k))$$

により定義する. ここで ρ_ℓ は GL_n の ℓ 次外積表現である. この H_g の $\mathrm{E}_{n,\ell}(k) - \{0\}$ への制限は, 射影空間 $\mathrm{PE}_{n,\ell}(k)$ 上の高さを引き起こす. さて, $\mathrm{Gr}_{n,\ell}(k)$ を k^n の中の ℓ 次元部分空間の全体からなる Grassmann 多様体とする. Plücker 埋め込みにより, $\mathrm{Gr}_{n,\ell}(k)$ は $\mathrm{PE}_{n,\ell}(k)$ の部分多様体と見なせるので, H_g は $\mathrm{Gr}_{n,\ell}(k)$ 上の高さを与える. もし $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_\ell$ が部分空間 $X \in \mathrm{Gr}_{n,\ell}(k)$ の基底ならば

$$H_g(X) = \prod_v H_v(g_v\boldsymbol{x}_1 \wedge g_v\boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge g_v\boldsymbol{x}_\ell)$$

である. これから

$$\gamma_{n,\ell}(k) = \max_{g \in GL_n(\mathbf{A})} \min_{X \in \mathrm{Gr}_{n,\ell}(k)} \frac{H_g(X)^2}{|\det g|_{\mathbf{A}}^{2\ell/n}}$$

により定義される定数を k の一般 Hermite–Rankin 定数という. 明らかに $\gamma_{n,1}(k) = \gamma_n(k)$ である. $k = \mathbf{Q}$ の場合には, $\gamma_{n,\ell}(\mathbf{Q})$ を簡単に $\gamma_{n,\ell}$ と表し, Rankin 定数という. 通常は, ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の格子を使って $\gamma_{n,\ell}$ の定義を与える (cf. [5, Definition 2.8.3]). Rankin 定数については, Hermite 定数ほど多くのことはわかっていない. 唯一知られている確定値は $\gamma_{4,2} = 3/2$ で

ある. $\gamma_{n,\ell}$ が代数的数であることはBavardにより１９９７年に証明された. しかし, 数の幾何における $\gamma_{n,\ell}$ の意味は未だ明らかにはなっていないように思える. Rankin 定数, またはより一般の $\gamma_{n,\ell}(k)$ について, (2) のような不等式の類似が存在するのではないかと考えたのが, 以下の研究の一つの動機である.

2.2 Severi–Brauer 多様体

以下では, D を代数体 k 上有限次元の中心的斜体とし, その次数を $[D:k]=d^2$ とする. また $\mathfrak{A}=M_m(D)$ を D に成分をもつ m 次の全行列環とする. $\mathfrak{A}$ の単数群は $\mathfrak{A}^\times=GL_m(D)$ である. $\mathfrak{A}$ 上の $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を基底にもつ右自由 $\mathfrak{A}$ 加群を V とする. V の要素と $\mathfrak{A}$ に成分をもつ列ベクトルとを同一視することにより, V は $mn\times m$ 行列の空間 $M_{mn,m}(D)$ と同一視できる. 即ち

$$V=e_1\mathfrak{A}+\cdots+e_n\mathfrak{A}\cong M_{mn,m}(D)$$

である. 通常と同様に, V の i 個の要素 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_i$ は, 「$\boldsymbol{x}_1a_1+\boldsymbol{x}_2a_2+\cdots+\boldsymbol{x}_ia_i=0$ $(a_1,a_2,\cdots,a_i\in\mathfrak{A})$ ならば $a_1=a_2=\cdots=a_i=0$ である」を満たすならば $\mathfrak{A}$ 上一次独立であるということにする. 一般に $\mathfrak{A}$ は零因子をもつので, 一つの要素 $\boldsymbol{x}\in V$ が $\mathfrak{A}$ 上一次独立であることと $\boldsymbol{x}\neq 0$ であることとは同値にはならない. そこで $\mathfrak{A}$ 上一次独立であるような $\boldsymbol{x}\in V$ の全体を Ω と表す. さて, G を k 上定義された代数群で, その k 有理点の成す群が $\mathfrak{A}$ 加群としての V の自己同型全体に一致するようなものとする. 即ち $G(k)=\mathrm{Aut}_{\mathfrak{A}}(V)\cong GL_{mn}(D)$ である. $G(k)$ は左から V に作用する. 容易にわかるように, Ω は左からの $G(k)$ の作用と右からの $\mathfrak{A}^\times$ の作用とで不変である. とくに Ω は $G(k)$ の等質空間となり, $\Omega=G(k)\boldsymbol{e}_1$ と表せる. $\boldsymbol{e}_1$ で生成された $\mathfrak{A}$ 部分加群 $\boldsymbol{e}_1\mathfrak{A}$ の $G(k)$ における固定化部分群を $Q(k)$ とすれば, 代数群として Q は G の k 上定義された極大放物的部分群になる, k 上の代数的等質空間 G/Q を $\mathfrak{X}$ と表せば, $\mathfrak{X}(k)=\Omega/\mathfrak{A}^\times$ が成り立つ. $\mathfrak{X}$ は代数的閉体 $\overline{k}$ 上ではGrassmann 多様体と同型になる. 即ち

$$\mathfrak{X}(\overline{k})=\mathrm{Gr}_{dmn,dm}(\overline{k})$$

が成り立つ. 言い換えれば, $\mathfrak{X}$ は $\mathrm{Gr}_{dmn,dm}$ の k-form である. 一般に, Grassmann 多様体の k-form であるような射影多様体はSeveri–Brauer 多様体といわれる.

2.3 $\mathfrak{X}(k)$ 上の捻れ高さ

k の各素点 v に対し, $D_v=D\otimes_k k_v$, $\mathfrak{A}_v=\mathfrak{A}\otimes_k k_v$ とおく. D_v は k_v 上の中心的単純多元環であるから, k_v 上の或る中心的斜体 $D(v)$ と Brauer 同値

である. $D(v)$ の次数を $[D(v):k_v]=d_v^2$ とすれば, $D_v \cong M_{d/d_v}(D(v))$ となる. 従って $\mathfrak{A}_v \cong M_{m_v}(D(v)), m_v = md/d_v$ である. 以下では, 各 v について, 同型写像 $\iota_v : \mathfrak{A}_v \longrightarrow M_{m_v}(D(v))$ を一つ固定し, $\mathfrak{A}_v$ と $M_{m_v}(D(v))$ とを同一視することにする. これにより, $V \otimes_k k_v$ は $M_{m_v n, m_v}(D(v))$ と同一視され, G の k_v 有理点からなる局所コンパクト群 $G(k_v)$ は $GL_{m_v n}(D(v))$ と同一視される. 局所的な高さ

$$H_v : V \otimes_k k_v = M_{m_v n, m_v}(D(v)) \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqq 0}$$

を次のように定義する.

- $v \mid \infty$ の場合. $D(v)$ は Hamilton の四元数体 $\mathbf{H}$, 複素数体 $\mathbf{C}$, 実数体 $\mathbf{R}$ のどれかである. $x \in D(v)$ に対し, x の共役を $\overline{x}$ で表す. また $\boldsymbol{x} = (x_{ij}) \in M_{m_v n, m_v}(D(v))$ に対し, $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}_{ij})$ とおく. このとき ${}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} \in M_{m_v}(D(v))$ であるから, その被約ノルムを $\mathrm{Nr}({}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}) \in k_v$ とする. これから
$$H_v(\boldsymbol{x}) = |\mathrm{Nr}({}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x})|_v^{1/2}$$
と定義する.

- $v \nmid \infty$ の場合. I を集合 $\{1, 2, \cdots, m_v n\}$ の部分集合で, その要素の個数が $|I| = m_v$ であるものとする. $\boldsymbol{x} = (x_{ij}) \in M_{m_v n, m_v}(D(v))$ に対し, ${}_I\boldsymbol{x} = (x_{ij})_{i \in I, 1 \leqq j \leqq m_v}$ とおく. これは $m_v \times m_v$ 行列だから, その被約ノルム $\mathrm{Nr}({}_I\boldsymbol{x}) \in k_v$ がとれる. そこで
$$H_v(\boldsymbol{x}) = \sup_I (|\mathrm{Nr}({}_I\boldsymbol{x})|_v)$$
と定義する.

G のアデール群を $G(\mathbf{A})$ とする. $g = (g_v)_v \in G(\mathbf{A})$ から, 捻れ高さ $H_g : V \longrightarrow \mathbf{R}_{\geqq 0}$ を

$$H_g(\boldsymbol{x}) = \prod_v H_v(g_v \boldsymbol{x})^{1/(dm)}, \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

により定義する. 任意の $a \in \mathfrak{A}^\times$ について

$$H_g(\boldsymbol{x}a) = |\mathrm{Nr}(a)|_{\mathbf{A}}^{1/(dm)} H_g(\boldsymbol{x}) = H_g(\boldsymbol{x})$$

となることが定義から容易に確認できる. 従って, H_g の Ω への制限は, $\Omega/\mathfrak{A}^\times = \mathfrak{X}(k)$ 上の高さを引き起こす.

2.4 逐次最小

$g \in G(\mathbf{A})$ と正の実数 λ が与えられたとき, Ω の部分集合 $\Omega_g(\lambda)$ を

$$\Omega_g(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \Omega \mid H_g(\boldsymbol{x}) \leqq \lambda\}$$

と定義する. $\Omega_g(\lambda)$ は右からの $\mathfrak{A}^\times$ の作用で不変であり, $\Omega_g(\lambda)/\mathfrak{A}^\times$ は $\mathfrak{X}(k)$ の有限部分集合となる. そこで, 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し, i 番目の逐次最小 $\lambda_i(g)$ を

$$\lambda_i(g) = \min\{\lambda > 0 \mid \Omega_g(\lambda) \text{ は } \mathfrak{A} \text{ 上一次独立な } i \text{ 個の点を含む}\}$$

と定義する. とくに

$$\lambda_1(g) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathfrak{X}(k)} H_g(\boldsymbol{x})$$

である. 更に $\mathfrak{A}$ の Hermite 定数を

$$\gamma_n(\mathfrak{A}) = \max_{g \in G(\mathbf{A})} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathfrak{X}(k)} \frac{H_g(\boldsymbol{x})^{dmn}}{|\mathrm{Nr}(g)|_{\mathbf{A}}}$$

により定義する. 逐次最小のこの定義は, もちろん捻れ高さ H_g の定義に依存しており, よって同型 $\iota_v : \mathfrak{A}_v \longrightarrow M_{m_v}(D(v))$ の族の取り方に依存している. しかし, $\gamma_n(\mathfrak{A})$ に関しては, $\mathfrak{A}$ や $\mathfrak{A}_v$ の行列表示に依らない内在的な定義が存在するので, $\{\iota_v\}_v$ には依存しない. 実際, [10] の記号では, $\gamma_n(\mathfrak{A}) = \gamma(G, Q, k)$ と表せる. また $\mathfrak{A}$ が行列環 $M_m(k)$ の場合には, $\gamma_n(M_m(k)) = \gamma_{mn,m}(k)$ となり, 一般 Hermite–Rankin 定数が現れる.

2.5 主定理

n 個の点 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in \Omega$ が $\mathfrak{A}$ 上一次独立になることと, $\boldsymbol{x}_i$ を第 i 列にもつ行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ が $G(k)$ の要素になることとは同値である. 与えられた $g \in G(\mathbf{A})$ に対し, $X \in G(k)$ が次の関係をすべての $i = 1, 2, \cdots, n$ で満たすときに, この X を g-chain ということにする.

$$\begin{cases} H_g(\boldsymbol{x}_1) = \lambda_1(g) \\ H_g(\boldsymbol{x}_i) = \min\{H_g(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \Omega \text{ かつ } \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{y} \text{ は } \mathfrak{A} \text{ 上一次独立}\} \end{cases}$$

g-chain の全体を $\mathcal{X}_g$ と表す. $X \in \mathcal{X}_g$ ならば

$$\lambda_i(g, X) = H_g(\boldsymbol{x}_i)$$

とおく. 更に

$$\mu_i(g, X) = \min\{H_g(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \Omega \text{ かつ } \boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{x}_1\mathfrak{A} + \cdots + \boldsymbol{x}_{i-1}\mathfrak{A}\}$$

と定義する. 明らかに $\boldsymbol{y} \in \Omega$ に対し

$$「\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{y} \text{ は } \mathfrak{A} \text{ 上一次独立}」 \Longrightarrow 「\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{x}_1\mathfrak{A} + \cdots + \boldsymbol{x}_{i-1}\mathfrak{A}」 \tag{3}$$

が成り立つが, この逆は一般には成り立たない. 従って

$$\mu_i(g, X) \leqq \lambda_i(g, X)$$

である. そこで

$$c(g, X) = \max_i \left\{ \frac{\lambda_i(g, X)}{\mu_i(g, X)} \right\} \geqq 1$$

とおく. もし $m = 1$, 即ち $\mathfrak{A}$ が斜体 D ならば, $\lambda_i(g) = \lambda_i(g, X) = \mu_i(g, X)$, よって $c(g, X) = 1$ が任意の $X \in \mathcal{X}_g$ で成り立つ.

定理 3 任意の $g \in G(\mathbf{A})$ と任意の $X \in \mathcal{X}_g$ について, 不等式

$$\lambda_1(g, X)\lambda_2(g, X) \cdots \lambda_n(g, X) \leqq c(g, X)^n \gamma_n(\mathfrak{A})^{1/(dm)} |\mathrm{Nr}(g)|_{\mathbf{A}}^{1/(dm)} \tag{4}$$

が成り立つ.

証明は捻れ高さの技術的な評価によるもので, [9] と本質的に同じである. ただ, (3) の違いに注意する必要があり, (3) の非同値性が不等式の $c(g, X)$ の項として現れる. 次に, (4) から X への依存性を取り除くことを考える. $\mathfrak{A}^\times$ の要素を対角成分にもつ $G(k)$ の中の対角行列全体の成す部分群を $M_P(k)$ とおく. M_P は G の k 上定義された極小放物的部分群の Levi 部分群である. $M_P(k)$ は行列の積により $\mathcal{X}_g$ に右から自然に作用する. この作用に関して $\mathcal{X}_g/M_P(k)$ は有限集合になることが示せる. また, $\lambda_i(g, X)$ と $\mu_i(g, X)$ は共に, 変数 X に関して $M_P(k)$ の軌道上では定値になることもわかる. 従って

$$c(g) = \min_{X \in \mathcal{X}_g} c(g, X)$$

が存在する. 定義から $\lambda_i(g) \leqq \lambda_i(g, X)$ なので, 次の系が従う.

系 3 任意の $g \in G(\mathbf{A})$ について, 不等式

$$\lambda_1(g)\lambda_2(g) \cdots \lambda_n(g) \leqq c(g)^n \gamma_n(\mathfrak{A})^{1/(dm)} |\mathrm{Nr}(g)|_{\mathbf{A}}^{1/(dm)} \tag{5}$$

が成り立つ. ここで $\mathfrak{A} = D$ の場合は $c(g)$ は恒等的に 1 である.

$\mathfrak{A} = D = k$ ならば, 不等式 (5) は, Vaaler の**定理 2** の不等式 (2) と一致する.

2.6 $\gamma_n(\mathfrak{A})$ の評価

$\gamma_n(\mathfrak{A})$ の評価について，これまでに得られた結果を紹介する．まず下からの評価は [10] の一般論と [6] の計算から次を得る．

$$\left\{\frac{dmn}{\rho_D^{m^2(n-1)+1}}\cdot\frac{\prod_{i=mn-m+1}^{mn} Z_D(id)}{\prod_{i=2}^{m} Z_D(id)}\right\}^{1/(dm)} \leqq \gamma_n(\mathfrak{A}) \qquad (6)$$

ここで，Δ_k を k の絶対判別式，$\mathrm{N}\mathfrak{d}_{D/k}$ を D の判別式の絶対ノルムとするとき

$$\rho_D = |\Delta_k|^{-d^2/2}\mathrm{N}\mathfrak{d}_{D/k}^{-1/2}$$

である．また $Z_D(s)$ は D のゼータ関数で，k の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_k(s)$ により

$$\begin{aligned} Z_D(s) &= C\prod_{0\leqq i\leqq d-1}\zeta_k(s-i)\left\{\pi^{-(s-i)/2}\Gamma((s-i)/2)\right\}^{r_1+r_3}\left\{(2\pi)^{1-(s-i)}\Gamma(s-i)\right\}^{r_2}\\ &\quad\times\prod_{w}\prod_{\substack{1\leqq i\leqq d-1\\ i\not\equiv 0(d_w)}}(1-q_w^{-(s-i)})\times\prod_{\substack{1\leqq i\leqq d-1\\ i\not\equiv 0(2)}}(s-i)^{r_3}\end{aligned}$$

で与えられる．ここで，定数 C は，$Z_D(s)$ の $s=d$ での留数が ρ_D となるように与えられる．また w は $D(w)\neq k_w$ となるような有限素点全体を動き，r_1, r_2, r_3 はそれぞれ，$D(v)=\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{H}$ となるような無限素点の個数を表す．その他の記号は通常使用されている意味のものである．

例 $k=\mathbf{Q}$ で，$\mathfrak{A}=D$ が四元数体の場合を考える．素数 p で，$D\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p\neq M_2(\mathbf{Q}_p)$ となるようなものすべての積を N とおく．このとき $\mathrm{N}\mathfrak{d}_{D/\mathbf{Q}}^{1/2}=N$ であり，この D を D_N と表す．N の素因数の個数が奇数ならば，D_N は定符号で $r_1=r_2=0, r_3=1$ となり，素因数の個数が偶数ならば，D_N は不定符号で $r_1=1, r_2=r_3=0$ となる．(6) の評価は

$$\left\{\frac{12n(2n-1)^{r_3}}{\pi^{2n+1/2}}\zeta_{\mathbf{Q}}(2n)\zeta_{\mathbf{Q}}(2n-1)\Gamma(n)\Gamma(n-\frac{1}{2})\prod_{p|N}p^{n-1}\left(\frac{1-p^{-(2n-1)}}{1-p^{-1}}\right)\right\}^{1/2}\leqq\gamma_n(D_N)$$

となる．これから

$$1.29\leqq\gamma_2(D_2),\quad 1.44\leqq\gamma_2(D_3),\quad 1.72\leqq\gamma_2(D_5),\quad 1.55\leqq\gamma_2(D_6)$$

等がわかる．D_2, D_3, D_5 の場合は正確な値が求まっており (cf. [3])，$\gamma_2(D_2)=2, \gamma_2(D_3)=3, \gamma_2(D_5)=5$ となる．これらの値が丁度 $\mathrm{N}\mathfrak{d}_{D/\mathbf{Q}}^{1/2}$ と一致している

のは偶然である．値の決定には，これらの場合の極大整環が Euclid 環になるという事実を使う．

次に上からの評価については，$\mathfrak{A} = D$ が四元数体の場合は [3] の中で与えられているが，一般の $\mathfrak{A}$ の場合には未だ知られていない．そこで，以下 D は k 上の四元数体とする．L/k は 2 次拡大で D の分解体，即ち $L \subset D$ となるものとし，D を巡回多元体 $D = [L/k, u]$ $(u \in k^\times)$ として実現しておく．このとき

$$\gamma_n(D) \leqq \left\{ \prod_v \max(|u|_v, |u|_v^{-1}) \right\}^{n/2} \frac{|\Delta_L|^{n/2} 2^{n[L:\mathbf{Q}]}}{\left\{\frac{\pi^n}{\Gamma(1+n)}\right\}^{s/2} \left\{\frac{(2\pi)^{2n}}{\Gamma(1+2n)}\right\}^{t/2}} \tag{7}$$

が成り立つ．ここで s, t はそれぞれ L の実および複素素点の個数である．(7) の証明には，捻れ高さの別の定義を用いる．即ち，D の n 次元右ベクトル空間 V を L ベクトル空間と見なし，その 2 次の外積 $\mathrm{E}_{2n,2}(L) = V \wedge V$ を考える．$\mathrm{E}_{2n,2}(L)$ 上では，**2.1** の方法で $GL_{2n}(\mathbf{A}_L)$ の要素に対し $\mathbf{PE}_{2n,2}(L)$ 上の捻れ高さが定義される．$\mathfrak{X}(k)$ は $\mathbf{PE}_{2n,2}(L)$ の部分多様体と見なすことができ，$\mathbf{PE}_{2n,2}(L)$ 上のある特定の捻れ高さの $\mathfrak{X}(k)$ への制限が **2.3** で与えた捻れ高さと一致する．他方，$\mathrm{E}_{2n,2}(L)$ 上で数の幾何の議論を適用することにより，捻れ高さの上からの評価を得ることができ，(7) の不等式が求まる．

2.7 一般 Hermite–Rankin 定数の一つの特徴付け

関連する話題として，**2.1** で定義した一般 Hermite–Rankin 定数 $\gamma_{n,m}(k)$ の数の幾何的な観点からの特徴付けが最近得られたので，付け加えておく (cf. [12])．自然数 m, n, N を $0 < m < n < N$ であるようなものとする．k 上の N 次元ベクトル空間 k^N を考え，その n 次元部分空間全体からなる Grassmann 多様体を $\mathrm{Gr}_{N,n}(k)$ とおく．同様に m 次元部分空間全体からなる Grassmann 多様体を $\mathrm{Gr}_{N,m}(k)$ とする．$X \in \mathrm{Gr}_{N,n}(k)$ に対し，X の中の m 次元部分空間の全体を $\mathrm{Gr}_m(X)$ と表す．即ち

$$\mathrm{Gr}_m(X) = \{Y \in \mathrm{Gr}_{N,m}(k) \mid Y \subset X\}$$

である．**2.1** で説明したように，各 $g \in GL_N(\mathbf{A})$ に対し，$\mathrm{Gr}_{N,n}(k)$ および $\mathrm{Gr}_{N,m}(k)$ 上の捻れ高さ H_g が定義される．そこで

$$\Gamma_k^{(n,m)}(g) = \sup_{X \in \mathrm{Gr}_{N,n}(k)} \min_{Y \in \mathrm{Gr}_m(X)} \frac{H_g(Y)}{H_g(X)^{m/n}}$$

とおく．このとき次が証明できる．

定理 4 $\gamma_{n,m}^{1/2}(k) = \sup_{g \in GL_N(\mathbf{A})} \Gamma_k^{(n,m)}(g)$ が成り立つ.

定理 4 は次のように言ってもよい. 即ち, 任意の $g \in GL_N(\mathbf{A})$ と任意の $X \in \mathrm{Gr}_{N,m}(k)$ が与えられたとき, X の n 次元部分空間 Y で不等式

$$H_g(Y) \leqq \gamma_{n,m}(k)^{1/2} H_g(X)^{m/n}$$

を満たすものが存在する. ここで定数 $\gamma_{n,m}(k)^{1/2}$ は次の意味で最良である. 任意に $\epsilon > 0$ を与えたとき, 或る $g_\epsilon \in GL_N(\mathbf{A})$ と或る $X_\epsilon \in \mathrm{Gr}_{N,m}(k)$ が存在して, X_ϵ の任意の n 次元部分空間 Y について

$$H_{g_\epsilon}(Y) > (1-\epsilon)\gamma_{n,m}(k)^{1/2} H_{g_\epsilon}(X_\epsilon)^{m/n}$$

が成り立つ. 以上の結果は, Siegel の補題のある種の拡張と見ることもできる. 証明には, 代数群の整数論, とくに強近似定理を使用する.

注 5 筆者は, $\Gamma_k^{(n,m)}$ は g の関数として定数関数で $\Gamma_k^{(n,m)}(g) = \gamma_{n,m}(k)^{1/2}$ が成り立つのではないかと考えている. しかしこれは未だ証明されていない. 部分的な結果として, $k = \mathbf{Q}$ で g が単位元 e の場合には $\Gamma_{\mathbf{Q}}^{(n,m)}(e) = \gamma_{n,m}^{1/2}$ が Aliev, Schinzel と Schmidt([1]) により示されている. また Vaaler([9]) は, 任意の k について, $m = 1$ ならば $\Gamma_k^{(n,1)}(e) = \gamma_n(k)^{1/2}$ を示している.

2.8 結語

最後に幾つかコメントを述べて終わることにする.

- **2.5** で述べた結果を証明するにあたって, 筆者にとって困難であったのは, Severi–Brauer 多様体 $\mathfrak{X}(k)$ 上の捻れ高さをどのように定義するか, ということであった. 筆者が最初に試みたものは, **2.1** に述べたような外積を使うものである. 非可換体上の外積は定義できないので, 非可換体の分解体で係数拡大したところで外積を取り, そこで定義した高さを $\mathfrak{X}(k)$ に制限するというものである. 実際にこの構成は [3] の中で使用された. しかし, この構成は D が四元数体の場合でも計算が面倒である. そこで, 外積を使わないで, 行列式の類似だけを使って定義したものが **2.3** で与えた高さである. また, これとは別に, 代数群の等質空間の観点からより標準的な方法で $\mathfrak{X}(k)$ 上の高さを定義することもできる.

- **2.3** で与えられた捻れ高さの定義は $V = M_{mn,m}(D)$ に限らず, 一般の行列空間 $M_{n,m}(D)$ $(m < n)$ でも同様に適用できる. これから D についても一般 Hermite–Rankin 定数 $\gamma_{n,m}(D)$ を定義することができ, この記号を使えば $\gamma_n(\mathfrak{A}) = \gamma_{mn,m}(D)$ となる. 下からの評価は, $\gamma_{n,m}(D)$ でも (6) と同様の形で与えられている (cf. [6]).

- 一般 Hermite–Rankin 定数 $\gamma_{n,m}(D)$ が, ここで扱ったような中心的単純多元環上の自由加群における Minkowski の第 2 定理と結びつくのは, $m \mid n$ の場合に限る. $m \nmid n$ の場合にも定理 3 のような不等式が構成できるのかどうかは, 未だ不明である. この場合, V に対応するものは存在しないが, Severi–Brauer 多様体 $\mathfrak{X}(k)$ は, Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_{nd,md}(\bar{k})$ の k-form として存在し, 先のコメントで述べたように $\mathfrak{X}(k)$ 上の捻れ高さもある. 「一次独立な点」を $\mathfrak{X}(k)$ 上でどのように解釈するかが問題である.

- **2.7** の**定理 4** は, 斜体 D 上のベクトル空間でも同様に成り立つ. また, これまでに述べたこと, とくに**定理 3** とその系は, k が正標数の大域体, 即ち有限体上の一変数代数関数体の場合でも同様に成り立つ.

References

[1] Aliev I, Schinzel A, Schmidt W M (2005) On vectors whose span contains a given linear subspace, Monatsh. Math. **144**: 177-191.

[2] Bombieri E, Vaaler J (1983) On Siegel's lemma, Invent. Math. **73**: 11 - 32.

[3] Coulangeon R, Watanabe T (2004) Hermite constant and Voronoï theory over a quaternion skew field, preprint.

[4] Gruber P, Lekkerkerker C (1987) Geometry of Numbers, 2nd edn. Amsterdam New York Oxford Tokyo: North-Holland

[5] Martinet J (2003) Perfect Lattices in Euclidean Spaces, Berlin Heidelberg New York: Springer

[6] Nakamura Y, Watanabe T (2004) The normalization constant of a certain invariant measure on $GL_n(D_{\mathbf{A}})$, Manuscripta Math. **115**: 259 - 280.

[7] Platonov V, Rapinchuk R (1994) Algebraic Groups and Number Theory, Boston: Academic Press

[8] Reiner I (1975) Maximal Orders, London New York San Francisco: Academic Press

[9] Vaaler J (2003) The best constant in Siegel's lemma, Monatsh. Math. **140**: 71 - 89.

[10] Watanabe T (2003) Fundamental Hermite constants of linear algebraic groups, J. Math. Soc. Japan **55**: 1061 - 1080.

[11] Watanabe T (2005) Minkowski's second theorem over a simple algebra, to appear in Monatsh. Math.

[12] Watanabe T (2005) On the best bound of the minimal twisted height of linear subspaces, to appear in Archiv. Math.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan
watanabe@math.wani.osaka-u.ac.jp