

# ある代数体の非可換 $p$ -類体塔について

## On non-abelian $p$ -class field towers over certain algebraic number fields

早稲田大学 理工 岡野 恵司 (Keiji OKANO)

Department of Mathematical Sciences, Waseda Univ.

### 1. 序

奇素数  $p$  を固定する. 有限次代数体  $F$  に対し, その最大不分岐 pro- $p$ -拡大を  $\tilde{L}(F)/F$  と記し, その Galois 群  $\tilde{G}(F) := \text{Gal}(\tilde{L}(F)/F)$  を考える. 拡大  $\tilde{L}(F)/F$  は,  $F$  の Hilbert  $p$ -類体, その Hilbert  $p$ -類体, さらにその Hilbert  $p$ -類体  $\dots$  と積み重ねて得られることから  $F$  の  $p$ -類体塔とも呼ばれる. Galois 群  $\tilde{G}(F)$  は  $F$  に付随する基本群とみることができ, その最大 Abel 商  $\tilde{G}(F)^{\text{ab}}$  は類体論によって  $F$  のイデアル類群の  $p$ -Sylow 部分群と同型であることから, 数論的情報を多く含むことが予想される. このような理由から,  $p$ -類体塔は古くから研究されている. Golod-Šhafarevič による重要な結果 —  $\tilde{G}(F)$  は位数が無限になり得るという事実 — はその中のよく知られた事実であろう. 一方  $\tilde{G}(F)$  の群構造の特徴付けや普遍的性質については殆ど分かっていない. 一般に  $\tilde{G}(F)$  の構造を調べることは難しい問題であるが, その一つの方法として, 尾崎氏や Wingberg 氏は岩澤理論を使ったアプローチを試みている. この方法には, 岩澤理論でみられたのと同様に, 個々の  $p$ -類体塔を個別に扱うのではなく  $\mathbb{Z}_p$ -拡大体上で統一的に扱うことにより Galois 群を深く調べることができるのではないかという期待がある. そのような  $p$ -類体塔への岩澤理論の応用の問題の一つとして, 上記  $\tilde{G}(F)$  の構造に関連した問題「 $F$  の円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大  $F_\infty/F$  の  $p$ -類体塔  $\tilde{L}(F_\infty)/F_\infty$  がどのような条件の場合に Abel 拡大となるか」を考える. ここで  $\mathbb{Z}_p$ -拡大上の  $p$ -類体塔が Abel であることと,  $\mathbb{Z}_p$ -拡大のすべての中間体について, その  $p$ -類体塔が Abel であることは同値であることに注意する. 水澤-尾崎 [3] は  $p = 2$  の場合に虚二次体の円分的  $\mathbb{Z}_2$ -拡大の 2-類体塔が Abel となる場合を決定している.

本稿ではこの分類を  $p$  が奇素数で  $F$  が虚二次体の場合に決定したのち, さらに拡大次数を上げた場合を考察する. 本稿の主結果は Theorem 2.1, 2.2 である. この稿の目的の一つは,  $\tilde{G}(F)$  の Abel 性にはどのような対象が関係しているか (何が Galois 群の構造決定に寄与しているか) を探る試みに岩澤理論が有効であることの紹介である.

### 以下で使われる記号

$A(F)$ :  $F$  のイデアル類群の  $p$ -Sylow 部分群

$\tilde{L}(F)$ :  $F$  の最大不分岐 pro- $p$ -拡大,  $\tilde{G}(F) := \text{Gal}(\tilde{L}(F)/F)$

$L(F)$ :  $F$  の最大不分岐 Abel pro- $p$ -拡大,  $X(F) := \text{Gal}(L(F)/F)$

$F_\infty/F$ : 円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大

$\lambda_F := \text{rank}_{\mathbb{Z}_p} X(F_\infty)$ : 岩澤  $\lambda$ -不変量

## 2. 主結果

$p$  を奇素数とする. 一般の代数体  $F$  に対し, その最大不分岐 pro- $p$ -拡大  $\tilde{L}(F)/F$ , 最大不分岐 Abel pro- $p$ -拡大  $L(F)/F$  の Galois 群を各々  $\tilde{G}(F)$ ,  $X(F)$  と記す. また  $F$  が有限次のときは  $F_\infty/F$  は円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大を表すものとし,  $A(F)$  でもって  $F$  のイデアル類群の  $p$ -Sylow 部分群を表す. 虚二次体  $k$  に対し,  $k_\infty/k$  の Galois 群を  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$  とおくと, 次数  $p^n$  の唯一つの中間体  $k_n$  について  $X(k_n)$  には同型  $X(k_n) \simeq A(k_n)$  を通して  $\Gamma/\Gamma^{p^n}$  が内部自己共役で作用する. この作用によって  $X(k_\infty)$  には完備群環  $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma^{p^n}]$  が作用する.  $\Gamma$  の位相的生成元をひとつ固定して  $1+T$  に対応させることにより,  $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma^{p^n}]$  は一変数形式的冪級数環  $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$  と同型となるから,  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$ -加群とみなせる. 一方, Ferrero-Washington の定理により  $X(k_\infty)$  は  $\mathbb{Z}_p$  上有限生成となることが知られており, さらに今の場合, 有限位数の元をもたない. 即ち

$$X(k_\infty) \simeq \mathbb{Z}_p^{\oplus \lambda_k}, \quad \lambda_k := \text{rank}_{\mathbb{Z}_p} X(k_\infty)$$

と表せる. 従って  $k_\infty$  の  $p$ -類体塔の Galois 群  $\tilde{G}(k_\infty)$  は  $\lambda_k$  個の元で生成される. これより,  $\lambda_k \leq 1$  であれば  $\tilde{G}(k_\infty)$  は Abel となる. 虚二次体の円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大が Abel  $p$ -類体塔を持つための条件は次のようになる:

**Theorem 2.1.**  $p$  を奇素数,  $k$  を虚二次体とする.  $k$  の円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大  $k_\infty$  の  $p$ -類体塔が Abel となる為には, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことが必要十分である:

- (i)  $\lambda_k \leq 1$ ,
- (ii)  $\lambda_k = 2$  かつ  $A(k) = D(k)$ . ここで  $D(k)$  は  $p$  の上の素イデアルの冪の類で生成される  $A(k)$  の部分群である.

上記 Theorem 2.1 の条件 (ii) が成り立つのは  $p$  が  $k$  で分解するときだから, 特に  $p$  が  $k$  で不分解の場合には,  $k_\infty$  の  $p$ -類体塔が Abel となるのは  $\lambda_k \leq 1$  のときに限られる.

次に, 虚二次体  $k$  のある  $p$  次巡回拡大を考え, その円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大の  $p$ -類体塔が Abel か否かについて考える. この場合, 岩澤理論における木田の公式に見られるように,  $p$ -類体塔の構造もある程度の制限を受けることが予想される. 今回は次の結果が得られた:

**Theorem 2.2.**  $p, l$  を  $p \parallel l-1$  を満たす奇素数とし,  $k, \mathbb{Q}(l)$  は各々虚二次体,  $l$  分体の唯一つの  $p$  次部分体とする.  $K := k\mathbb{Q}(l)$  とすると,  $p, l$  が共に  $K/\mathbb{Q}$  で不分解であれば,  $K$  の円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大  $K_\infty$  の  $p$ -類体塔が Abel となるのは  $A(k) = 0$  のときに限られ, このとき  $\tilde{G}(K_\infty)$  は自明なものとなる.

Theorem 2.2 において各岩澤  $\lambda$ -不変量  $\lambda_k, \lambda_K$  は, 木田の公式により  $\lambda_K = p\lambda_k$  を満たしている. 以下で Theorem 2.1, 2.2 の証明の概略を述べるが, いずれの場合も適当な中心  $p$ -類体が自明となっているかどうかの判定に持ち込むことにより示す (§3 参照). その判定には, ある適当な Galois 群や分解群の完全な記述を行なうことが必要になる. 今回, Theorem 2.2 が特殊な仮定を必要とするのは, そのような群の記述が他の場合にはできていないためである.

### 3. 証明の方針 (中心 $p$ -類体論)

ここでは [3] でも用いられた, 今回の証明の道具となる中心  $p$ -類体論を紹介する. 中心  $p$ -類体そのものの性質については用いないので, ここでは簡単に述べるが, 詳しい性質については [2] を参照されたい. 一般に  $F/k$  を有限次代数体の Abel  $p$ -拡大とし,  $G := \text{Gal}(L(F)/k)$  とする. このとき [2, Theorem 3.11, (3.24), Proposition 3.6] により次の完全列が存在する:

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \frac{E(k) \cap N_{L(F)/k} J_{L(F)}}{E(k) \cap N_{L(F)/k} L(F)^\times} \longrightarrow \mathcal{K}(L(F)/k) \longrightarrow \text{Gal}(C_{L(F)/k}/L(F)) \longrightarrow 0,$$

ここで  $C_{L(F)/k}$  は  $L(F)/k$  に関する中心  $p$ -類体 ( $L(F)$  上の不分岐  $p$ -拡大で, その Galois 群が  $k$  からの Galois 群の中心となる拡大のうち, 最大のもの) である. また  $E(k)$  は  $k$  の単数群,  $J_{L(F)}$  は  $L(F)$  のイデール群であり, 中央の項  $\mathcal{K}(L(F)/k)$  は,  $k$  の各素点  $\mathfrak{p}$  の上の素点の分解群のひとつ  $Z_{\mathfrak{p}} \subset G$  を固定して自然な準同型写像

$$\Phi: \prod_{\mathfrak{p}} H_2(Z_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H_2(G, \mathbb{Z}_p)$$

の余核で定義される (積の  $\mathfrak{p}$  は  $F/k$  で分岐する  $k$  の素点を走る). 無限次の場合も中間体に関して逆極限をとれば, 同様の完全列が得られる.  $F$  の  $p$ -類体塔が Abel であることは, この完全列の右側が消えていることと同値である. 従ってこの完全列から分かることは,  $F$  の  $p$ -類体塔が Abel か否かは単数が大きく影響するが, 基礎体  $k$  をうまくとれば, 拡大が大きくなる代わりに単数の影響をその中に押し込むことができるということである.

$k$  を虚二次体とし,  $p=3$  のときは  $k \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  とする. このとき, 完全列 (1) の左側は消えている. そこでさらに  $F$  として  $k$  の円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大  $k_\infty$  をとれば, Theorem 2.1 の証明は, 完全列 (1) の中央が消えているか否かの判定, 即ち  $\Phi$  の全射性の判定に帰着する. 一方で  $k$  を 1 の原始  $p$  乗根を含まない虚二次体,  $F$  を Theorem 2.2 の  $p$  次拡大  $K$  の円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大  $K_\infty$  として上の完全列に当てはめる. この場合, 群  $G$  が多少複雑になるものの, やはり Theorem 2.2 の証明は  $\Phi$  の全射性の判定に帰着することができる.

$\Phi$  の全射性を判定するには,  $G, Z_p$  の自由 pro- $p$ -群による最小表現を考える:  $F, F_p$  を各々  $G, Z_p$  の最小生成系上の自由 pro- $p$ -群とし, 完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \longrightarrow & R_p & \longrightarrow & F_p & \longrightarrow & Z_p \longrightarrow 1 \end{array}$$

を考える. Hochschild-Serre 完全列によって  $H_2(G, Z_p) \simeq R \cap [F, F]/[R, F]$ ,  $H_2(Z_p, Z_p) \simeq R_p \cap [F_p, F_p]/[R_p, F_p]$  が得られるから, 以上により問題は  $G, Z_p$  の群構造の完全なる記述と

$$(2) \quad \Phi: \prod_p \frac{R_p \cap [F_p, F_p]}{(R_p \cap [F_p, F_p])^p [R_p, F_p]} \longrightarrow \frac{R \cap [F, F]}{(R \cap [F, F])^p [R, F]}$$

の全射性を調べればよいことになる.

#### 4. THEOREM 2.1 の証明の概略

**Step 1.**  $k$  を虚二次体とし,  $k_n$  を円分的  $Z_p$ -拡大  $k_\infty/k$  の次数  $p^n$  の中間体とする.  $p=3$  で  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  のときは  $k_\infty$  の 3-類体塔は自明だから, この場合は考察の対象から外す.  $E(k_n)$  を  $k_n$  の単数群として

$$\mathcal{H}_n := E(k_n)/E(k_n) \cap N_{L(k_n)/k_n} L(k_n)^\times, \quad \mathcal{H} := \varprojlim \mathcal{H}_n,$$

とおく. ここで逆極限はノルム写像に関してとる.  $\mathcal{H}_n$  には  $E(k_n) \otimes_{\mathbb{Z}} Z_p$  からの全射が存在して,  $E(k_n)$  は  $\mathbb{Q}_n$  の円単数と  $p$ -primary part が一致しているから, これより  $\mathcal{H}$  は  $\Lambda$  上巡回的であることがわかる. そこで §3 の完全列 (1) を不分岐拡大  $L(k_n)/k_n$  に適用する (拡大  $L(F)/k$  として  $L(k_n)/k_n$  をとる) と,  $E(k_n) \subset N_{L(k_n)/k_n} J_{L(k_n)}$  に注意すれば完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow H_2(X(k_\infty), Z_p) \longrightarrow \text{Gal}(C_{L(k_\infty)/k_\infty}/L(k_\infty)) \longrightarrow 0$$

が導かれる.  $k_\infty$  の  $p$ -類体塔が Abel なら, 上記と合わせて  $H_2(X(k_\infty), Z_p) \simeq X(k_\infty) \wedge_{Z_p} X(k_\infty)$  が  $\Lambda$  上巡回的となるから, その条件を調べることにより次の命題を得る:

**Proposition 4.1.**  $\tilde{G}(k_\infty)$  が Abel (従って  $\tilde{G}(k_\infty) = X(k_\infty)$ ) とすると, 次のいずれかが成立する:

- (i)  $\lambda_k \leq 1$ ,
- (ii)  $2 \leq \lambda_k \leq 3$  かつ  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的,
- (iii)  $\lambda_k = 2$  かつ  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上 2 元生成.

$X(k) \simeq A(k)$  に対しても、同様の手法によって、 $\tilde{G}(k)$  が Abel ならば  $A(k) = 0$  または  $A(k)$  は巡回群であることが示される。次に  $p$  が  $k/\mathbb{Q}$  で不分解であれば、容易に  $\tilde{G}(k_\infty)$  は  $\lambda_k \leq 1$  のとき以外は Abel とはならないことが示される。実際、 $\text{pro-}p$ -群の分解完全列

$$1 \longrightarrow X(k_\infty) \longrightarrow \text{Gal}(L(k_\infty)/k) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1,$$

より [1] によって

$$H_2(\text{Gal}(L(k_\infty)/k), \mathbb{Z}_p) \simeq H_2(\Gamma, \mathbb{Z}_p) \oplus H_1(\Gamma, X(k_\infty)) \oplus H_2(X(k_\infty), \mathbb{Z}_p)_\Gamma.$$

が得られるから、簡単な計算によって  $H_2(\text{Gal}(L(k_\infty)/k), \mathbb{Z}_p) = 0$  となるのは  $\lambda_k \leq 1$  のときに限られることがわかる。一方で  $\text{Gal}(L(k_\infty)/k)$  内の  $p$  の上の素点の分解群  $Z_p$  について常に  $H_2(Z_p, \mathbb{Z}_p) = 0$  なることがわかるから、§3 の判定法より、 $H_2(\text{Gal}(L(k_\infty)/k), \mathbb{Z}_p) = 0$  という条件は  $\tilde{G}(k_\infty)$  が Abel となるための必要十分条件だからである。結局調べるべきは、 $p$  が  $k/\mathbb{Q}$  で分解している場合で Proposition 4.1 の条件が成り立っているときに限定されることになる。

**Step 2.**  $p$  が  $k/\mathbb{Q}$  で分解している場合に、 $\tilde{G}(k_\infty)$  が Abel であったとして、Proposition 4.1 よりもさらに強い条件が成り立つことを示す。この考察は §3 の終わりで述べた  $\text{Gal}(L(k_\infty)/k) = X(k_\infty) \rtimes \Gamma$  の群構造の完全なる記述のために必要な部分であり、Theorem 2.1 の証明の核心部分である。

$p$  は  $k$  において分解するとする。 $D(k_n)$  を  $A(k_n)$  の部分群で、 $p$  の上の素イデアルの冪の類で生成されるものとする。 $A(\mathbb{Q}_n) = 0$  より  $D(k_n)$  は巡回群を成している。さらに今の場合  $\varprojlim D(k_n) \simeq X(k_\infty)^\Gamma$  が成り立つ。 $M(k)/k$  を  $p$  の外で不分解な最大 Abel  $\text{pro-}p$ -拡大とすると、 $p$  が  $k/\mathbb{Q}$  で完全分解していることから、類体論によって  $M(k) \subset L(k_\infty)$  及び完全列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow X(k_\infty)/TX(k_\infty) \longrightarrow \text{Gal}(M(k)/k) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathbb{Z}_p^{\oplus 2} \longrightarrow \text{Gal}(M(k)/k) \longrightarrow A(k) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

が導かれる。

**Proposition 4.2.**  $p$  が  $k/\mathbb{Q}$  で完全分解しているとし、さらに  $\tilde{G}(k_\infty)$  が Abel と仮定する。(Proposition 4.1 参照) このとき  $A(k) = D(k)$  が成立し、

- (i)  $\lambda_k \geq 2$  かつ  $A(k) = 0$  であれば、 $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的、
- (ii)  $\lambda_k \geq 2$  かつ  $A(k) = D(k) \neq 0$  であれば、 $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上 2 元生成となる。

この証明の概略を述べる。 $\tilde{G}(k_\infty)$  が Abel とする。前半は  $A(k) \neq D(k)$  であるとして矛盾を導けばよい。 $L(k)/k$  を  $p$  上の素点で完全分解する最大の不分解 Abel  $p$ -拡大と

すれば、このとき  $L'(k) \neq k$  である。  $L'(k)/\mathbb{Q}$  においても  $p$  が完全分解しているから、  $L'(k)$  の  $p$  の外不岐な最大 Abel pro- $p$ -拡大を  $M(L'(k))$  とすると、関係  $M(L'(k)) \subset L(L'(k)_\infty) = L(k_\infty)$  が成り立つ ( $\tilde{G}(k_\infty)$  は Abel に注意)。ところがこの関係から矛盾が生じる。実際、  $L'(k)$  は総虚であって Leopoldt 予想が成り立っていることに注意すれば、

$$3 \geq \lambda_k \geq \text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \text{Gal}(M(L'(k))/L'(k)_\infty) = [L'(k) : \mathbb{Q}]/2 + 1 - 1 \geq p$$

を得るのであるが、これが成り立つのは  $p = 3, \lambda_k = 3, [A(k) : D(k)] = [L'(k) : k] = 3$  のときだけである。しかしこの場合も Galois 群を見れば矛盾が生じる。以上により  $A(k) = D(k)$  である。次に  $A(k) = 0$  とすると、上で挙げた二つの完全列から  $X(k_\infty)/TX(k_\infty) \simeq \mathbb{Z}_p$  が導かれる。よって中山の補題より  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的となる。今度は  $A(k) = D(k) \neq 0$  かつ  $X(k_\infty)$  は  $\lambda_k \geq 2$  で  $\Lambda$  上巡回的と仮定する。このとき  $X(k_\infty) \simeq \Lambda/(P(T))$  ( $P(T)$  は次数  $\lambda_k$  の distinguished 多項式) と書けるから、

$$X(k_\infty)/(X(k_\infty)^\Gamma + TX(k_\infty)) \simeq \Lambda/(\frac{P(T)}{T}, T) \neq 0$$

となる。これは  $M(k)/k_\infty$  内の  $p$  上の素点が完全分解する最大の拡大  $M'(k)$  が、  $k_\infty$  とは異なることを示している。ところが  $\text{Gal}(M(k)/k_\infty) = X(k_\infty)/TX(k_\infty) \simeq \mathbb{Z}_p$  の閉部分群の集合には包含関係によって全順序が入っているから、  $M'(k) \subset L(k)_\infty$  もしくはその逆が成り立つ。いずれの場合も  $p$  の分解状況から矛盾が生じる。

**注意.** この証明より、「 $\tilde{G}(k_\infty)$  が Abel」という仮定なしに次が成り立つことがわかる:

- (i)  $\lambda_k \geq 2$  かつ  $A(k) = 0$  であれば  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的,
- (ii)  $\lambda_k \geq 2$  かつ  $A(k) = D(k) \neq 0$  であれば  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的でない。

以上をまとめると下のようになり、残った場合 ( $\Rightarrow$ ) についても Galois 群の構造がはっきりしたから、後は分解群の構造も調べて §3 の判定法を使って判定すればよい。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k \leq 1 \Rightarrow \text{abelian} \\ \lambda_k \geq 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p : \text{non-split} \Rightarrow \text{non-abelian} \\ p : \text{split} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_k = 2, A(k) = 0 & \xRightarrow{*} \text{abelian} \\ \lambda_k = 3, A(k) = 0 & \xRightarrow{*} \text{non-abelian} \\ \lambda_k = 2, A(k) = D(k) \neq 0 & \xRightarrow{*} \text{abelian} \\ \text{otherwise} & \Rightarrow \text{non-abelian} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(例えば  $p$  が分解していて  $\lambda_k = 3, A(k) = D(k) \neq 0$  なら、上の注意より  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的でないから、 Proposition 4.1 より非可換であることがわかる。)

## 5. THEOREM 2.2 の証明の概略

奇素数  $p, l$  と  $p$  次巡回拡大  $K/k$  は Theorem 2.2 の仮定を満たしているものとする.  $\text{Gal}(K_\infty/K)$  を  $\Gamma = \text{Gal}(k_\infty/k)$  と同一視し, さらに  $\Delta := \text{Gal}(K/k)$  と  $\text{Gal}(K_\infty/k_\infty)$  を同一視する. このとき,  $X(K_\infty)$  は  $\Lambda[\Delta]$ -加群となる. まず条件  $A(k) = 0$  は  $\lambda_k = \lambda_K = 0$  と同値であるから, このときは示すことはない. 特に  $p = 3$  かつ  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  の場合は除外できる. さらに, Theorem 2.1 より  $\lambda_k \geq 2$  のときは  $k_\infty$  の  $p$ -類体塔が非可換であり,  $A(K)$  が 2 元以上で生成されていれば  $L(K)/k$  に関する中心  $p$ -類体論より  $K$  の  $p$ -類体塔が非可換になるから, 示すべきは次の命題となる:

**Proposition 5.1.** 奇素数  $p, l$  と  $p$  次巡回拡大  $K/k$  は Theorem 2.2 のものとする.  $p, l$  が  $K/\mathbb{Q}$  で不分解であるとし, さらに  $\lambda_k = 1$  かつ  $A(K)$  は自明でない巡回群とする. このとき  $K_\infty$  の  $p$ -類体塔は非可換となる.

この Proposition 5.1 の条件のもとでは,  $X(K_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的で  $X(K_\infty) \simeq \Lambda/(P(T))$  と表せる. ここで  $P(T)$  は木田の公式より次数  $\lambda_K = p$  の distinguished 多項式である.  $X(K_\infty)$  の  $\Lambda$  上の生成元を  $\varepsilon$  と表す. §3 によれば, 考察すべき群は  $G := \text{Gal}(L(K_\infty)/k) = (X(k_\infty) \rtimes \Delta) \rtimes \Gamma$  であるから,  $X(k_\infty)$  への  $\Delta$  の作用など各作用を調べる. まず  $X(K_\infty)$  への  $\Delta$  の作用をみる.  $\Delta$  の生成元  $\delta$  は  $\varepsilon$  へ内部自己共役で作用している. この作用を多項式  $Q(T) \in \Lambda$  を使って

$$\varepsilon^\delta = (1 + Q(T))\varepsilon$$

( $Q(T)$  は  $P(T)$  の倍数分の不定性をもつ) と表すと次がわかる:

**Lemma 5.2.**  $X(k_\infty) \simeq \Lambda/(Q(T))$  であり, さらに  $P(T)$  と  $Q(T)$  の間に関係式

$$P(T) = (\text{unit}) \times ((Q(T) + 1)^p - 1)$$

が成り立つ.

特に  $Q(0) \equiv 0 \pmod{p}$  である. ここでは述べないが, このことは最後の群論的計算 ((2) が全射とはならないことの証明) の中で最終的に必要な情報となる. 次に他の作用について調べるため,  $p, l$  の上の素点についての分解群を見る.  $p$  の上の  $L(K_\infty)$  の素点をひとつ固定して, その惰性群  $I_p \subset G$  の生成元を  $\gamma$  とする. このとき自然な同型  $I_p \simeq \Gamma$  が成り立つ.  $l$  の上の  $L(K_\infty)$  の素点を同様にひとつ固定して, その惰性群  $I_l \subset G$  の生成元を  $\delta$  とすると, 自然な同型  $I_l \simeq \Delta$  が成り立つ. これらを用いて  $G$  内の  $p, l$  の上の固定した素点の分解群  $Z_p, Z_l$  を求めると, 次の補題が導かれる. この補題の証明に, Theorem 2.2 の  $p, l$  についての分解条件の仮定を必要とする. 特にどちらも  $K/\mathbb{Q}$  で不分解なることより複素共役が分解群に作用していることがポイントである.

**Lemma 5.3.**  $Z_p, Z_l$  は各々次のような 2 つの元で生成される Abel 群である:

$$Z_p = \langle \gamma \rangle \times \langle \delta \rangle, \quad Z_l = \langle \gamma\eta \rangle \times \langle \delta \rangle.$$

ここで  $\eta$  はある定数  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$  を用いて  $\eta = N_\Delta(\varepsilon^\alpha)$  で定義される.

Lemma 5.3 の証明の概略を述べる.  $Z_p, Z_l$  を  $G^{\text{ab}}$  内へ射影した群の構造を見ることにより,  $Z_p, Z_l$  はある多項式  $B(T), C(T)$  を使って  $Z_p = \langle \gamma \rangle \times \langle \delta\varepsilon^{B(T)} \rangle, Z_l = \langle \gamma\varepsilon^{C(T)} \rangle \times \langle \delta \rangle$  と書けることがわかる. 一方で  $\Gamma$  は  $I_l = \langle \delta \rangle$  にも内部自己共役で作用しているから, それを多項式  $A(T)$  を使って  $\delta\gamma\delta^{-1}\gamma^{-1} = \varepsilon^{A(T)} \in X(K_\infty)$  と表すと,  $Z_p, Z_l$  が Abel 群ということから  $B(T), C(T)$  は関係式

$$A(T) - T(1 + Q(T))B(T) \equiv 0 \pmod{P(T)},$$

$$A(T) + (1 + T)Q(T)C(T) \equiv 0 \pmod{P(T)}$$

を満たす. ここで複素共役が  $Z_p, Z_l$  へ作用しているから, その作用を見てもうひとつの関係式  $A(T) + T(1 + Q(T))B(T) \equiv 0 \pmod{P(T)}$  が得られる. これらから Lemma 5.3 が導かれる.

この結果から,  $G$  の群構造が  $G = X(K_\infty) \times (\Gamma \times \Delta)$  となる.  $\eta$  は  $Q(T)$  を使って表せるので, Lemma 5.2 と合わせて, 証明に必要な情報がすべて  $Q(T)$  を使った式で得られた事になる. 後は §3 の判定法を使って判定すれば, 面倒な計算ののちに Proposition 5.1 が導かれる.

**例.** Theorem 2.1 の例として, 虚二次体  $k$  で  $p = 3$  が分解し, かつ  $\lambda_k = 2$  の場合の例を挙げておく.  $k := \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$  とすれば,  $\lambda_k = 2, A(k) = D(k) = 0$ . 従って  $k_\infty$  は Abel 3-類体塔をもち  $\tilde{G}(k_\infty) = X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的.  $k := \mathbb{Q}(\sqrt{-107})$  とすれば,  $\lambda_k = 2, A(k) = D(k) \neq 0$ . 従って  $k_\infty$  は Abel 3-類体塔をもち  $\tilde{G}(k_\infty) = X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上 2 元生成となる. 一方,  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-461})$  (resp.  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-974})$ ) は  $\lambda_k = 2$  であるが,  $A(k) \neq D(k)$  だから  $k_\infty$  の 3-類体塔は非可換である. この場合は  $X(k_\infty)$  は  $\Lambda$  上巡回的 (resp.  $\Lambda$  上 2 元生成) である. Theorem 2.2 の例としては  $p = 3, l = 13, k = \mathbb{Q}(\sqrt{-31})$  とすると, これは Proposition 5.1 の条件を満たしている.

最後に残っている問題のいくつかについて触れておく.

(i) Theorem 2.1, 2.2 のいずれも, 岩澤加群  $X(k_\infty), X(K_\infty)$  の  $\Lambda$ -加群としての構造が完全に記述できていたことが証明がうまくいくための重要な点であった. Theorem 2.2 の仮定として  $l$  の  $k/\mathbb{Q}$  での分解条件を変えた場合にも似たような状況を作り出せる. この場合に  $K_\infty$  の  $p$ -類体塔の Abel 性を判定することは,  $\tilde{G}(K_\infty)$  の構造決定要因を探る研究の優先課題であろう.

- (ii)  $k_\infty$  の  $p$  上の素点が完全分解するような最大不分岐  $\text{pro-}p$ -拡大の Abel 性の判定.
- (iii) 円分体の円分的  $\mathbb{Z}_p$ -拡大についての同様の考察は, 岩澤理論の立場から見ても非常に価値のある研究と思われる.

## REFERENCES

- [1] L. Evens, The Schur multiplier of a semi-direct product. Illinois J. Math. 16 (1972), 166–181.
- [2] A. Fröhlich, Central extensions, Galois groups, and ideal class groups of number fields. Contemporary Mathematics, 24. American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.
- [3] Y. Mizusawa, M. Ozaki, Abelian 2-class field towers over the cyclotomic  $\mathbb{Z}_2$ -extensions of imaginary quadratic fields, 京都大学数理解析研究所講究録 1451 代数的整数論とその周辺, (2004), 225–233.

Keiji Okano  
Department of Mathematical Sciences  
School of Science and Engineering  
Waseda University  
Okubo, Shinjuku-ku  
Tokyo 169-8555  
Japan  
*E-mail address:* okano@suou.waseda.jp