数理解析研究所講究録
1521巻 2006年 66-69

DRINFELD 加群のモジュライ上の K 群の元と L 関数の特殊値について (K-THEORETIC ELEMENTS ON DRINFELD MODULAR VARIETIES AND SPECIAL L-VALUES)

近藤　智 (SATOSHI KONDO) 京都大学数理解析研究所 (RIMS)
安田　正大 (SEIDAI YASUDA) 京都大学数理解析研究所 (RIMS)

1. はじめに

本稿では最近の研究結果について報告する。１２月に講演した内容、また、プレプリント ([Ko-Ya]) の内容よりもよい結果になっている。第２節で結果を述べ、第３節で証明の概略のうち特にプレプリントと異なる部分を述べる。最終節にこの研究の動機や問題点を書いた。

2. 結果

ドリンフェルト加群に関する記号を定める。定義などについては ([Dr],[De-Hu],[La]) を参照。正標数の大域体 F をとり、有限体上の射影非特異曲線であって関数体が F となるものを C とおく。閉点 $\infty \in C$ をひとつ固定し、A を $C \setminus \{\infty\}$ の座標環とする。$\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\infty$ を、それぞれ F のアデール、有限アデールのなす環とする。

2 つのゼロでないイデアル $I, J \subsetneq A$ と正整数 d に対し、階数 d レベル $(A/I)^{\oplus d-1} \oplus A/J$ のドリンフェルト加群のモジュライを $M^d_{I,J}$ で表す。これは $(d-1)$ 次元の非特異アフィン F-スキームである。

$\mathrm{PGL}_d(F_\infty)$ に付随するブリューア・ティッツ ビルディング ([Ko-Ya] 4.1.3) を $\mathcal{T}_\bullet$ で表す。$\mathbb{K}_{I,J} \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$ を [Ko-Ya, §5.1] で定めた開コンパクト部分群とする。

$$X_{I,J} = \mathrm{GL}_d(F)\backslash[\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)/\mathbb{K}_{I,J} \times |\mathcal{T}_\bullet|]$$

とおく。ここで $|\mathcal{T}_\bullet|$ は $\mathcal{T}_\bullet$ の幾何学的実現である。プレプリント ([Ko-Ya] 6.1) ではレギュレーター写像と呼ばれる、モジュライのキレン K 群 ([Qu]) から $X_{I,J}$ のボレル・ムーアホモロジー ([Iv] Ch IX) への写像

$$\mathrm{reg} : K_d(M^d_{I,J}) \to H^{\mathrm{BM}}_{d-1}(X_{I,J}, \mathbb{Q})$$

を定義した。行き先の記述が [Ko-Ya] と異なるが、この方がより conceptual であると思われる。

$\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ 上の $\mathbb{Q}$-値保型形式であって無限素点 ∞ において適当な条件をつけたものは、自然に $H^{d-1}_c(X_{I,J}, \mathbb{Q})$ の元とみなすことができる。そのうち尖点形式で生成される部分を $H^{d-1}_{\mathrm{cusp}}(X_{I,J}, \mathbb{Q})$ と書くことにする。

$H_{d-1}^{\mathrm{BM}}(X_{I,J},\mathbb{Q})$ と $H_c^{d-1}(X_{I,J},\mathbb{Q})$ は自然に双対であり、$H_{\mathrm{cusp}}^{d-1}(X_{I,J},\mathbb{Q})$ の双対を $H_{d-1}^{\mathrm{cusp}}(X_{I,J},\mathbb{Q})$ とおき、$\varphi: H_{d-1}^{\mathrm{BM}}(X_{I,J},\mathbb{Q}) \to H_{d-1}^{\mathrm{cusp}}(X_{I,J},\mathbb{Q})$ を標準的な全射とする。

拡張された命題は次の通り。

Theorem 2.1. 記号を上の通りとする。このとき

$$\varphi \circ \mathrm{reg}: K_{d-1}(M_{I,J}^d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} \to H_{d-1}^{\mathrm{cusp}}(X_{I,J},\mathbb{Q})$$

は全射。

ベイリンソン予想のより正確な類似は、上の定理よりも強く、$\mathrm{reg}(K_{d-1}(\mathcal{M}_{I,J}^d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q})$ からの写像が全射であることを主張する。ここに $\mathcal{M}_{I,J}^d$ は $C \setminus \{\infty\}$ 上のドリンフェルト加群のモジュライである。楕円曲線のモジュライの場合と同様に $d = 2$ の場合には示すことができるが、$d \geq 3$ の場合には、有限素点の還元における K 群の元のふるまいがわかっていないため示せていない。

3. 証明の概略

非常に大まかな方針はベイリンソンによる楕円曲線のモジュライの場合と大差ない。これについてはネコバーのサーベイ ([Ne]) の (7.4) を参照されたい。

発表の時点から変わったのは、特殊元の構成に関する部分である。シンボル写像による単数群のテンソル積の像をここではベイリンソン元と呼ぼう。加藤は具体的に特別なベイリンソン元を記述し（[Ka, Ch.1 §2]）、楕円曲線のモジュライのK群のにはそれらの元で全射性をいうのに十分であることを示した。高次元のドリンフェルト加群のモジュライのK群の場合に、われわれは加藤の与えた元の一部分しか一般化をしていなかったのだが、今回全てを一般化することで全射性を示すことができた。ポイントは難しくなく、これまでに得た元を群の作用で動かすことである。

3.1. [Ko-Ya] の記号を用いる。簡単のため、ドリンフェルト加群のモジュライは全て F 上で考える。

$I, J \subsetneq A$ を 2 つのゼロでないイデアルとする。モジュライの K 群の元 $\kappa_{I,J}^d \in K_d(M_{I,J}^d)$ が構成されていた。

レベルに関して極限を取った $K_d(M^d) = \varinjlim_{I,J} K_d(M_{I,J}^d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}$ を考える。$K_d(M^d)$ には群 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$ が左から作用し、$K_d(M_{I,J}^d) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} \cong K_d(M^d)^{\mathbb{K}_{I,J}}$ が成り立つ。

$V = \mathbb{A}^{\infty \oplus d}$ を横ベクトル全体とし、V 上の整数値シュワルツ・ブリューア関数全体のなす加群 $S(V)$ を考える。部分加群 $S'(V) \subset S(V)$ を、$0 \in V$ での値が 0 となる関数全体として定義する。[Ko-Ya] におけるジーゲル単数の類似の構成の、レベルに関する極限を考えて、

$\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$ 同変な準同型 $S'(V) \to \varinjlim_{I,J} \Gamma(M^d_{I,J}, \mathbb{G}_m)$ が得られる。この準同型と K 群のシンボル写像から、準同型 $\kappa : S'(V)^{\otimes d} \to K_d(M^d)$ が得られる。

$S'(V)^{\otimes d}$ を $S(V)^{\otimes d}$ の部分加群とみなし、さらに $S(V)^{\otimes d}$ を行列環 $\mathrm{Mat}_d(\mathbb{A}^\infty)$ 上の整数値シュワルツ・ブリューア関数全体のなす加群 $S(\mathrm{Mat}_d(\mathbb{A}^\infty))$ と同一視する。2 つのゼロでないイデアル $I, J \subsetneq A$ に対し、$\mathrm{Mat}_d(\mathbb{A}^\infty)$ のコンパクト開部分集合 $Y_{I,J}$ を

$$Y_{I,J} = \left\{ (y_{i,j})_{1\le i,j\le d} \in \mathrm{Mat}_d(\widehat{A}) \;\middle|\; \begin{array}{l} y_{i,j} \bmod I = \delta_{i,j} \text{ for } 1 \le i \le d-1, \\ y_{d,j} \bmod J = \delta_{d,j} \end{array} \right\}$$

で定める。ここで $\widehat{A} = \prod_{v\neq\infty} A_v$ は $\mathbb{A}^\infty$ の最大コンパクト部分環である。このとき、$Y_{I,J}$ の特性関数 $\mathrm{ch}_{Y_{I,J}} \in S(\mathrm{Mat}_d(\mathbb{A}^\infty))$ は $S'(V)^{\otimes d}$ に属し、κ による $\mathrm{ch}_{Y_{I,J}}$ の像が $K_d(M^d)$ における $\kappa^d_{I,J}$ の像に一致することが、$\kappa^d_{I,J} \in K_d(M^d_{I,J})$ の構成のしかたからわかる。

ここで、$\gamma \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$ に対し, $\kappa^d_{I,J,\gamma} = \kappa(\mathrm{ch}_{\gamma Y_{I,J}})$ とおく。これは、$K_d(M^d)^{\mathbb{K}_{I,J}} \cong K_d(M^d_{I,J}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元を定める。

3.2. 定理の証明は、$\varphi \circ \mathrm{reg}$ の $\langle \kappa_{I,J,\gamma} | \gamma \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)\rangle \otimes \mathbb{Q}$ への制限の全射性を示すことによってなされる。勝手なベイリンソン元についてはよくわからないが、上の形の元に関してはレギュレーター写像による像が、保型関数の L 関数の特殊値を用いて記述することができるので、定理が証明できることになる。

4. 動機、問題点、発展など

ベイリンソン予想 ([Be]、サーベイは [Ne]) は、レギュレーター写像が有理数体上の非特異射影スキームの K 群に実数体をテンソルしたものとドリーニュコホモロジーが同型であることを主張している。特に、その全射性から、ドリーニュコホモロジーの階数が K 群の有理階数の下限を与えていることがわかる。全射性のみを問題にするのは、ネコバーのサーベイ ([Ne]) の 8 節にまとめられているように、0 次元のスキーム（すなわち代数体のスペック）以外ではベイリンソン予想の単射性の部分は解けていないからである。単射性から従うことになる K 群の有限生成性は、バス予想と呼ばれる大予想である。

この関数体上における類似を問題にした。特に上の定理は K 群からとあるコホモロジー群への全射性に関する主張である。ドリーニュコホモロジーの代わりは、ドリンフェルト加群のモジュライの場合には、上に挙げたようにビルディングのボレル・ムーアホモロジーが適当であると今は考える。レギュレーターについてはより conceptual な定義を考えたいとまだ考えている。つまり、モチビックコホモロジーからのサイクル写像としての記述があればよいと考えるが、現時点ではよくわからない。

レギュレーター写像がＬ関数の微分の０での値を用いて記述されることから、保型関数が与えられた場合、Ｌ関数の特殊値の有理数の部分の分子を具体的な計算でおさえることが、原理的には可能であると思われる。しかしこれは今後の課題としたい。

References

[Be] A. A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, in Current problems in mathematics **24**, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 181–238 (1984)

[De-Hu] P. Deligne, D. Husemoller, *Survey of Drinfel'd modules*, in Current trends in arithmetical algebraic geometry, Proc. Summer Res. Conf., Arcata/Calif. 1985, Contemp. Math. **67** 25–91 (1987)

[Dr] V. G. Drinfeld, *Elliptic modules*, Math. USSR, Sb. **23**, 561–592 (1974); translation from Mat. Sb., n. Ser. 94(136), 594-627 (1974)

[Iv] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1986)

[Ka] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, in Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III), Astérisque **295**, 117–290 (2004)

[Ko-Ya] S. Kondo, S. Yasuda, *Euler systems on Drinfeld modular varieties and zeta values* Preprint, RIMS-1499 (2005)

[La] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. **41**, Cambridge: Cambridge University Press. (1996)

[Ne] J. Nekovář, *Beĭlinson's conjectures*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, 537–570 (1994)

[Qu] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory. I*, Algebr. K-Theory I, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972, Lect. Notes Math. 341, 85-147 (1973)