数理解析研究所講究録
1527巻 2007年 1-28

Deformations of holomorphic symplectic structures & generalized geometric structures

正則シンプレクティック構造と一般化された幾何構造の変型について

後藤竜司
Ryushi Goto

大阪大学大学院理学研究科
Osaka University

December 2006

目 次

第1章　序文

微分形式については、古くから幾何学で研究されているにもかかわらず、意外に知られていないことが数多く残されているように思われる．特に、実あるいは正則 symplectic 構造のような閉微分形式から定まる幾何構造の大域的な問題、変型やモジュライ空間の問題は数理物理のミラー対称性からの研究と深い関連を持ち、ますますその重要性が増している．この論文で問題とするのは、このような閉微分形式で定められた幾何構造の変型の問題である．多様体 X の接束 TX のゲージ群を $\mathrm{GL}(TX) := \cup_{x\in X}\mathrm{GL}(T_xX)$ とすると、各点 $x \in X$ ごとの線形表現により、ゲージ群 $\mathrm{GL}(TX)$ の微分形式 $\wedge^* T^* X$ への作用 ρ が得られる, symplectic 構造など、多くの幾何構造はこのゲージ群の一つの軌道に入っている．このことから、筆者はゲージ群の一つの軌道を定れば、その軌道の中にある閉微分形式として、一つの幾何構造が定まるという、アイデアを得た．これは、かなり原始的な考え方ではあるが、symplectic 構造を含み、更に幾何構造の変型やトレリ型定理を考える際に問題を直接的に捉えることを可能とし、ときとして、問題の困難さを緩和するのではないか、と思われる．実際論文 [7] において多様体上、これら幾何構造の変型理論を展開した．この応用として、特殊なホロノミー群を持つ幾何構造、Calabi-Yau, 超ケーラー、G_2 そして Spin(7) 構造変型やモジュライ空間を統一的に構成できるようになった．これらは、従来、リーマン計量、複素構造から捉えられていたが、ある軌道に入っている閉微分形式のシステムの定める幾何構造として見ることが適切であった．

さて、この幾何構造はかなり一般的なもので、適用範囲は特殊なホロノミー群を持つ幾何構造を遥かに超えていることが、期待される．

実効性のある具体的な幾何構造の例を挙げるためには幾何構造から定まる cohomology 群についての情報が必要で、困難があったのだが、正則 symplectic 構造について、変型の障害が消える判定条件、および局所トレリ型定理が成立するこ判定条件がかなり、明解になったので、これを報告したい．特に、複素冪零多様体上の正則 symplectic 構造の場合はこ

の判定条件を満たしている．冪零多様体とは複素冪零リー群を離散群で割ったcompact 多様体のことをいう．岩沢多様体などが典型的な例である．岩沢多様体と楕円曲線との直積には正則な symplectic 形式が存在する (d-colsed な非退化複素 2 次形式)．この場合、複素構造の変型は障害をもつが、正則な symplectic 構造の変型の障害が消えているという状況が起こっている．複素冪零多様体はケーラー多様体ならば、複素トーラスとなることが知られているため、これはnon-Kähler でありながら、変型のモジュライ空間が非特異になる興味深い対象である．さて、すると、一般にコンパクト正則 symplectic 多様体の変型の障害は消えているのか？

という問題が考えられるが、この反例を複素可解多様体を使って与えることができる．

この変型理論はまた、正則 symplectic 構造とそれについての 正則 Lagrangian 多様体のペアの変型に適用することが可能であり、相対 cohomology 群についての非障害性判定条件を与えることが、出来ることとなる．

1.1 正則 symplectic 構造

V を $4n$ 次元の実ベクトル空間とし、J_V を V 上の複素構造とすれば、V 上の複素形式 $\wedge^* V^* \otimes \mathbf{C}$ は (p,q) 型形式に分解する、

$$\wedge^* V^* \otimes \mathbf{C} = \oplus_{p,q} \wedge^{p,q}.$$

V 上の J_V についての正則 symplectic 構造 ϕ_V とは、非退化な複素 $(2,0)$ 形式であるとする．つまり、

$$\omega_V^{2n} = \overbrace{\omega_V \wedge \cdots \wedge \omega_V}^{2n} \neq 0.$$

$S(V, J_V)$ を V 上、J_V について正則 symplectic 構造全体の集合とする．$\mathcal{J}(V)$ を V 上の複素構造全体の集合とし、$\mathcal{P}(V)$ を V 上の正則 symplectic 構造と複素構造のペアの集合とする、すなわち、

$$\mathcal{P}(V) = \{ (\phi_V, J_V) \mid \phi_V \in S(V, J_V),\ J_V \in \mathcal{J}(V) \}.$$

$\mathcal{P}(V)$ の第一成分への射影を $p_1 \colon \mathcal{P}(V) \to \wedge^2 V^* \otimes \mathbf{C}$ とし、射影 p_1 の像 $p_1(\mathcal{P}(V))$ を $\mathcal{A}(V)$ とする,

$$\mathcal{A}(V) := p_1(\mathcal{P}(V)).$$

$\mathcal{A}(V)$ は複素 2 次形式で、ある複素構造 J_V について正則 symplectic 構造となるもの全体であるから、ϕ_V の標準形として、J_V について　(1,0) 型形式 $\wedge^{1,0}$ の基底 $\{\theta^i\}_{i=1}^{2n}$ が存在し、

$$\phi_V = \theta^1 \wedge \theta^2 + \cdots + \theta^{2n-1} \wedge \theta^{2n}, \tag{1.1}$$

と表現される. このことから、実線形群 $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(4n, \mathbf{R})$ は $\mathcal{A}(V)$ に推移的に作用し、isotorpy 群は $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{C})$ となるので、$\mathcal{A}(V)$ は等質空間 $\mathrm{GL}(4n, \mathbf{R})/\mathrm{Sp}(2n\mathbf{C})$ と同一視される.　また $\mathcal{A}(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の複素 2 次形式への作用の軌道となっている.

定義 1.1 軌道 $\mathcal{A}(V)$ を V 上の正則 *symplectic* 構造の軌道ということにする.

ここで、視点を変える、すなわち、微分形式 ϕ_V から、複素構造が "canonical" に決まってしまうことに着目する,

補題 1.2 ϕ_V を正則 *symplectic* 構造とする複素構造はただ一つ、である. つまり、微分形式 ϕ_V は複素構造を J_{ϕ_V} を定め、J_{ϕ_V} について、ϕ_V は正則 *symplectic* 構造となる.

証明 $v \in V$ の ϕ_V への内部積 $i_v\phi_V$ により、複素部分空間 $E^0_{\phi_V}$ を

$$E^0_{\phi_V} := \{\, i_v\phi_V \,|\, v \in V \,\}.$$

とする. ϕ_V の標準型 *(1-1)* を見れば、$V \otimes \mathbf{C}$ は $E^0_{\phi_V}$ とその複素共役 $\overline{E^0_{\phi_V}}$ の直和に分解していることが分かる,

$$V^* \otimes \mathbf{C} = E^0_{\phi_V} \oplus \overline{E^0_{\phi_V}}.$$

ゆえに、$E^0_{\phi_V}$ を $(1,0)$ 型形式、複素共役 $\overline{E^0_{\phi_V}}$ を $(0,1)$ 型形式とする V 上の複素構造 J_{ϕ_V} が唯一つ、定まり、ϕ_V は J_V について正則 *symplectic* 構造となる. *q.e.d.* これから、正則 symplectic 構造の軌道 $\mathcal{A}(V)$ から複素構造全体の集合 $\mathcal{J}(V)$ への写像が $\phi_V \mapsto J_{\phi_V}$ により、定まる、

$$\pi_V : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{J}(V).$$

この上への写像 π は fibre bundle を与えており、等質空間を使って書けば、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(V) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{J}(V) \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ \mathrm{GL}(V)/Sp(2n, \mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V)/\mathrm{GL}(2n, \mathbf{C}) \end{array}$$

次に多様体 X 上で考えることにする. 各接空間 T_xX 上で正則 symplectic 構造の軌道 $\mathcal{A}(T_xX)$ を考え、全ての $x \in X$ についての和をとれば、X 上の fibre 束 $\mathcal{A}(X) \to X$ が得られる、

$$\mathcal{A}(X) := \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}(T_xX) \to X.$$

ここで、$\mathcal{A}(X)$ は X 上の 2 次形式全体の空間の中の部分多様体として、位相が自然に入ることになる. $\mathcal{E}(X)$ を fibre 束 $\mathcal{A}(X)$ の C^∞-sections の全体の集合とする、

$$\mathcal{E}(X) = C^\infty(X, \mathcal{A}(X)).$$

一つ section $\phi \in \mathcal{E}(X)$ を取れば、これは複素 2 次形式で各接空間 T_xX ごとに補題 1-2 より、複素構造を定めるので、X 上の概複素構造 J_ϕ が決まる.

補題 1.3 もしも、$\phi \in \mathcal{E}(X)$ が閉微分形式ならば、対応して定める概複素構造 J_ϕ は積分可能であり、J_ϕ について、ϕ は正則な *d-closed symplectic form* となる.

証明 ϕ は $\mathcal{A}(X)$ の *section* であるから、J_ϕ について、$(1,0)$ 型形式の局所基底 $\{\theta^1, \cdots, \theta^{2n}\}$ があり、ϕ は

$$\phi = \theta^1 \wedge \theta^2 + \cdots + \theta^{2n-1} \wedge \theta^{2n},$$

で与えられる. $d\phi = 0$ なので、$d\theta^i \in \wedge^{2,0} \otimes \wedge^{1,1}$ となることが分かる. ゆえに、*Newlander-Nirenberg* の概複素構造の積分可能性に関する定理から、 J_ϕ は積分可能であることが分かる. *q.e.d.* これから、$\phi \in \widetilde{\mathcal{M}}(X)$ を X 正則 symplectic 構造ということにする. 次に $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ を d-closed な $\mathcal{E}(X)$ の section 全体の集合とする、

$$\widetilde{\mathcal{M}}(X) = \{\, \phi \in \mathcal{E}(X) \mid d\phi = 0 \,\}.$$

X の微分同相写像全体のなす群 $\mathrm{Diff}(X)$ は $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ に引き戻しにより作用している. $\mathrm{Diff}_0(X)$ を $\mathrm{Diff}(X)$ の単位元を含む連結成分とし、X 上の正則 symplectic 構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}(X)$ を $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ の $\mathrm{Diff}_0(X)$ による商空間として定義する,

$$\mathcal{M}(X) = \widetilde{\mathcal{M}}(X)/\mathrm{Diff}_0(X).$$

すると、正則 symplectic 構造 ϕ の de Rham cohomology class $[\phi] \in H^2(X, \mathbf{C})$ をとることにより、写像 $P\colon \mathcal{M}(X) \to H^2(X, \mathbf{C})$ が定まる,

$$P\colon \mathcal{M}(X) \to H^2(X, \mathbf{C}).$$

この写像 P を周期写像ということにする.

1.2 正則 symplectic 構造の変型理論

ϕ を X 上の正則 symplectic 構造とし、対応して決まる複素構造を J_ϕ とする. ϕ の $\widetilde{\mathcal{E}}(X)$ の中での変型は $a \in \mathrm{End}(TX)$ にたいして、ゲージ群 $e^a \in \mathrm{GL}(TX)$ の作用により、

$$\rho_{e^a}\phi,$$

で与えられる. (ここで、d-closedness はまだ仮定していないことに注意.) ゲージ群 $\mathrm{GL}(TX)$ のリー環は $\mathrm{End}(TX)$ であり、$\mathrm{End}(TX)$ の微分作用を $\hat{\rho}$ とすれば、$\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ の ϕ での接空間 $T_\phi\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ は

$$T_\phi\widetilde{\mathcal{M}}(X) = \{\, \hat{\rho}_a\phi \,|\, a \in \mathrm{End}(TX)\, \},$$

となる. さて、ϕ の変型にとって重要な変型複体を構成しよう. X 上のベクトル束 $E^0 (= E^0_\phi(X))$ を内部積を使って、

$$E^0 := \{\, i_v\phi \,|\, v \in TX\, \},$$

とする. E^0 から、$\wedge^* T^* X$ 上生成される次数つき加群 (graded module) を

$$E(X) = \oplus_{k=0}^{2n-1} E^k$$

とする. ここで、

$$E^1 = \mathrm{Span}\{\, \theta \wedge i_v\phi \,|\theta \in T^*X, v \in TX\, \} \tag{1.2}$$

$$= \mathrm{Span}\{\, \hat{\rho}_a\phi \,|\, a \in \mathrm{End}(TX)\, \}, \tag{1.3}$$

$$E^2 = \mathrm{Span}\{\, \alpha \wedge i_v\phi \,|\, \alpha \in \wedge^2 T^*X, v \in TX\, \}. \tag{1.4}$$

であり、$E^1 = T_\phi\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ となっている. また §1 で見たように $E^0 = \wedge^{1,0}$ であるので、E^k は

$$E^k = \bigoplus_{\substack{p\geq 1, q\geq 0 \\ p+q=k+1}} \wedge^{p,q}$$

となっている．このとき、$E(X)$ は外微分作用素 d により不変であり、微分複体 $\#_\phi$

$$(\#_\phi) \qquad 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d_0} E^1 \xrightarrow{d_1} E^2 \xrightarrow{d_2} \cdot$$

が得られる． 微分複体の cohomology 群を $H^k(\#_\phi)$ とする，

$$H^k(\#_\phi) := \frac{\{\, a \in \Gamma(E^k) \mid d_k a = 0 \,\}}{\{d_{k-1}b \mid b \in \Gamma(E^{k-1})\}}$$

さて、モジュライ空間 $\mathcal{M}(X)$ の形式的な接空間を考えよう．$\mathrm{Diff}_0(X)$ の $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ への作用の ϕ での接空間はリー微分をもちいて、$\mathcal{L}_v\phi$ $(v \in TX)$ の形の微分形式全体で与えられる．ϕ は d-closed なので、$\mathcal{L}_v\phi = di_v\phi$ となり、$E^0 = \{\, i_v\phi | v \in TX \,\}$ であるから、微分複体 $\#_\phi$ において、$d_0\Gamma(E^0)$ が $\mathrm{Diff}_0(X)$ の $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$ への作用の ϕ での接空間となる．このことから、

補題 1.4 *微分複体の 1 次の cohomology 群 $H^1(\#_\phi)$ は モジュライ空間 $\mathcal{M}(X)$ の ϕ での形式的な接空間となる．*

このとき、次の問題が自然に見えてくる：
問題 2-2 この形式的な接空間 $H^1(\#_\phi)$ の元は実際に 正則 symplectic 構造 ϕ の変型を与えるのであろうか？ 変形を与えるために、何か障害はあるのだろうか？
これが、変型の障害の問題である．つまり、

定義 1.5 もしも、 全ての $H^1(\#_\phi)$ の元にたいして、その代表元 a が 正則 *symplectic* 構造 ϕ の変型 $\{\phi_t\}$ を生成しているとき、ϕ の変型の障害は消えている（非障害的）という．すなわち、

$$a = \frac{d}{dt}\phi_t|_{t=0}, \quad (\phi = \phi_0).$$

ϕ の変型のためには次の非線形偏微分方程式を多様体 X 上解くことになる、

$$d\rho_{e^{a(t)}}\phi = 0, \tag{1.5}$$

ここで、$a(t)$ $\in$End(TX) であり、非線形方程式 (??) を線形化した方程式はリー環 End(TX) の作用により、

$$d\hat{\rho}_a\phi = 0 \tag{1.6}$$

ここで、a は

$$\frac{d}{dt}a(t)|_{t=0} = a$$

で与えれているとする. 線形化された方程式 (1.6) の解が形式的な接空間であり、ゆえに変型の障害の問題とは、線形化した方程式の解はいつ、もとの非線形方程式 (1.5) の解を生成するか、という問題となっている. これは、複素構造の変型理論（小平-Spencer 理論）における変型の障害の問題と同じように、一般にはとても難しい問題であるが、我々の場合は、微分形式を使うことにより、次のような効果的な障害の存在の判定条件が得られる.

ϕ の微分複体 $\#_\phi$ は de Rham 複体 (dR) の部分複体となっている、

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E^0 & \xrightarrow{d_0} & E^1 & \xrightarrow{d} & E^2 & \xrightarrow{d_2} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\wedge^0 & \xrightarrow{d} & \wedge^1 & \xrightarrow{d} & \wedge^2 & \xrightarrow{d} & \wedge^3 & \xrightarrow{d} & \cdots
\end{array}$$

ゆえに、$\#_\phi$ の cohomology 群 $H^k(\#_\phi)$ から、de Rham cohomology 群 $H^{k+1}(X, \mathbf{C})$ への写像

$$p_\phi^k \colon H^k(\#_\phi) \to H^{k+1}(X, \mathbf{C})$$

が得られる. このとき、

定理 1.6 写像 p_ϕ^2 が単射ならば、正則 *symplectic* 構造 ϕ の変型は非障害的である.

また、モジュライ空間の周期写像 $P \colon \mathcal{M}(X) \to H^2(X\,\mathbf{C})$ が局所的に単射であるとき、モジュライ空間は de Rham cohomology 群により、自然な座標を持つことになる. このことを、局所トレリ型定理が成立するということにする.

定理 1.7 写像 p_ϕ^1 と p_ϕ^2 が単射ならば、周期写像 P は ϕ の十分小さい近傍で単射となる.

定理 1.6 と 1.7 を合わせると、次が成立する、

定理 1.8 写像 p_ϕ^1, p_ϕ^2 が共に単射ならば、モジュライ空間 $\mathcal{M}(X)$ の ϕ の近傍は $H^1(\#_\phi)$ の開集合と同型となり、周期写像 P は ϕ の近傍で単射となる.

これらの Theorem 1.6, 1.7 はそれぞれ論文 [7] の Theorem 1.7, 1.10 を正則 symplectic 構造の場合に適用して得られる. ϕ の変型複体 $\#_\phi$ は de Rham 複体 (dR) の部分複体であり、商複体は ドルボー複体 $\wedge^{0,*} = (\wedge^{0,*}, \overline{\partial})$ となっているので、短完全列、

$$0 \longrightarrow \#_\phi \longrightarrow (dR) \longrightarrow \wedge^{0,*} \longrightarrow 0$$

が得られる. すると、長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^{0,k}_{\overline{\partial}}(X) \xrightarrow{\delta_k} H^k(\#_\phi) \xrightarrow{p^k_\phi} H^{k+1}(X, \mathbf{C}) \longrightarrow \cdots,$$

より、

補題 1.9 p^k_ϕ が単射であることは、*coboundary* 写像 δ_k が零写像であることと同値となる.

注意 1.10 正則 *symplectic* 構造の研究については、既にいくつかの結果が知られている. (X, J_ϕ) がケーラー多様体ならば、*Bogomorov-Tian - Todorov* の定理より、変型は非障害的であり、局所トレリ型定理が成立する. これについては *Twistor* 理論を使った証明もある. この結果は *Hodge to de Rham spectral sequence* が E_1*-term* で退化すれば、変型は非障害的であり、局所トレリ型定理が成立する、という形に一般化される.

注意 1.11 非ケーラーな正則 *symplectyic* 構造をもつ複素多様体の複素構造の変型については、*[11]* がある. しかし、正則 *symplectyic* 構造の変形とは一般に一致しない. また、*non-compact* な場合を含めて形式的な変形を取り扱ったものとして *[15]* がある.

定理 1.8 は Hodge to de Rham spectral sequence の言葉で表現することができる. $F^p \wedge^* (= F^p_\phi)$ を

$$F^p \wedge^* = \bigoplus_{r \geq p, s \geq 0} \wedge^{r,s},$$

とする. 外微分作用素 d により、$d : F^p \wedge^* \to F^p \wedge^{*+1}$ となることから、$F^p \wedge^*$ は de Rham 複体の部分複体 となり、filterd complex,

$$\wedge^* = F^0 \wedge^* \supset F^1 \wedge^* \supset F^2 \wedge^* \supset \cdots \supset F^{2n+1} W^* = \{0\},$$

が得られる．特に、$F^1\wedge^*$ が正則 symplectic 構造の変型の変型複体 $\#_\phi$ である．すると、filterd complex $\{F^p\wedge^*\}_{p=0}^{2n+1}$ から spectral sequence $\{E_r^{p,q}, d_{E_r^{p,q}}\}$ が得られる．この spectral sequence の E_0-term は

$$E_0^{p,q} = F^p \wedge^{p+q} / F^{p+1}\wedge^{p+q} \cong \wedge^{p,q}, \tag{1.7}$$

$$d_{E_0} \cong \overline{\partial} \colon \wedge^{p,q} \to \wedge^{p,q+1}, \tag{1.8}$$

ゆえに、E_1-term は ドルボー cohomology 群 で与えられる、

$$E_1^{p,q} \cong H_{\overline{\partial}}^{p,q}(X).$$

この spectral sequence は $E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}^p H^{p+q}(X, \mathbf{C})$ に退化しており、Hodge to de Rham spectral sequence という．さて、$E_1^{0,q}$ のところに注目しよう、

$$d_{E_1^{0,q}} \colon E_1^{0,q} \to E_1^{1,q}.$$

補題 1.12 写像 $p_\phi^k : H^k(\#_\phi) \to H^{k+1}(X, \mathbf{C})$ が零写像であることと $d_{E_r^{0,k}}$ $(\forall r \geq 1)$ が零写像であることは同値である．

証明 $d_{E_1^{0,k}} = 0$ であることは、$da \in F^1\wedge^{k+1}$ となる、全ての $a \in F^0\wedge^k$ にたいして、$b^{(1)} \in F^1\wedge^k$ が存在し、

$$da \equiv -db^{(1)} \pmod{F^2\wedge^{k+1}} \tag{1.9}$$

となることと、同値である．同様に、$d_{E_r^{0,k}} = 0$ は $da \in F^r\wedge^{k+1}$ となる全ての $a \in F^0\wedge^k$ にたいして、$b^{(r)} \in F^1\wedge^k$ が存在し、

$$da \equiv -db^{(r)} \pmod{F^{r+1}\wedge^{k+1}} \tag{1.10}$$

となることと同値である．$p_\phi^k = 0$ という条件は $a \in \wedge^k$ が $da \in F^1\wedge^{k+1}$ となるならば、$da = -db$ となる $b \in F^1\wedge^k$ が存在することと、同値である．ゆえに、*(1.9), (1.10)* から、$p_\phi^k = 0$ ならば、$d_{E_r^{0,k}} = 0$ となる．逆に、$d_{E_r^{0,k}} = 0$, $(\forall r \geq 1)$ とすると、$da \in F^1\wedge^{k+1}$ ならば、*(1.9)* から、$d(a + b^{(1)}) \equiv 0 \pmod{F^2\wedge^{k+1}}$ となる $b^{(1)}$ が存在する．*(1.10)* を繰り返し帰納的に使うと、$F^{k+2}\wedge^{k+1} = \{0\}$ であるから、

$$d(a + \sum_{i=1}^{k+2} b^{(i)}) = 0.$$

$b = -\sum_{i=1}^{k+2} b^{(i)}$ とすれば、$da = db$ *($b \in F^1\wedge^k$)* であり、$p_\phi^k = 0$ となる．*q.e.d.* この補題により、Hodge to de Rhan spectral sequence が E_1 項での退化していなくても、$E_r^{0,q}$ $(r \geq 1)$ で退化していれば、正則 symplectic 多様体の変形は非特異になり、局所トレリ型定理が成立することを示している．

1.3 複素冪零多様体上の正則 symplectic 構造の変型

複素冪零多様体 X とは、複素リー群 G を離散部分群 Γ で割って得られる複素多様体 G/Γ のこととする. $X = G/\Gamma$ に正則 stmplectic 構造 ϕ があるとき、ϕ の変型について、次の定理が成立する,

定理 1.13 コンパクト複素冪零多様体 $X = G/\Gamma$ 上の正則 *symplectic* 構造 ϕ の変型は常に非障害的であり、更に周期写像 $P\colon \mathcal{M}(X) \to H^2(X, \mathbf{C})$ は ϕ の近傍で単射となる *(*局所トレリ型定理が成立している*).*

この定理の証明には、次の坂根による、コンパクト複素冪零多様体 $X = G/\Gamma$ のドルボー cohomology 群の記述を用いる,

定理 1.14 (坂根) $\mathfrak{g}^{0,1}$ をリー群 G の左不変な反正則なベクトル場全体のなすリー環とし、リー環 $\mathfrak{g}^{0,1}$ のリー環の k 次の *cohomology* 群を $H^k(\mathfrak{g}^{0,1})$ とする. コンパクト複素冪零多様体 $X = G/\Gamma$ のドルボー *cohomology* 群を $H^{0,k}_{\overline{\partial}}(X)$ とすれば、$H^k(\mathfrak{g}^{0,1})$ から、$H^{0,k}_{\overline{\partial}}(X)$ への自然な写像は同型である. 更に、$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$ は

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \cong H^q(\mathfrak{g}^{0,1}) \otimes (\wedge^p \mathfrak{g}^{1,0})$$

により、与えられる.

証明 [定理 1.13 の証明] 定理 *1.6* および、補題 *1.9* より、*coboundary* 写像 $\delta_k\colon H^{0,k}_{\overline{\partial}}(X) \to H^k(\#_\phi)$ が 零写像であることを示せばよい. 定理 *1.14* から、$H^{0,k}_{\overline{\partial}}(X)$ の各クラスの代表元として、左不変な $(0,k)$ 型の形式 a がとれる. $\overline{\partial}a = 0$ であるが、複素共役 $\overline{a}$ は正則な微分形式であるから、$\partial a = 0,$ つまり　$da = 0$ となる. *coboundary map* δ_k は

$$\delta_k([a]) = [da] = 0 \in H^k(\#_\phi),$$

となり、零写像である. *q.e.d.* この証明方法は次のような、一般のコンパクト正則 symplectic 多様体にも、適用できる、

定理 1.15 X をコンパクトな多様体とし、ϕ を X 上の正則 *symplectic* 構造とする. 複素構造 J_ϕ に関して、$\dim H^{0,2}_{\overline{\partial}}(X) = 1$ ならば、ϕ の変型は非障害的である.

証明 定理 *1.6* および、補題 *1.9* から、δ_2 が零写像であることを示せばよい．$[\overline{\phi}] \neq 0$ より、$\mathrm{H}^{0,2}_{\overline{\partial}}(X)$ は $[\phi]$ によって生成されている．このとき、*coboundary map* δ_2 は

$$\delta_2[\overline{\phi}] = [d\overline{\phi}] = 0 \in H^2(\#_\phi),$$

より、零写像となる．*q.e.d.*

第2章　一般化された幾何構造と変型理論

2.1　一般化された幾何構造についての序文

$n(=2m)$ 次元の実多様体 X 上の概複素構造とは、自乗して -1 となる $\mathrm{End}(TX)$ の元のことであり、これらは線型群 $\mathrm{GL}(TX)$ の adjoint 作用に関する軌道をなしている。概複素構造に積分条件 (Nienhuis tensor =0) を課したものが、複素構造である。X 上の実 symplectic 構造とは、d-closed な非退化 2 次微分形式である。実 symplectic 構造も $\mathrm{GL}(TX)$ の 2 次微分形式への作用に関する軌道をなしており、d-closed 条件は積分条件とみなすことができる。複素構造, 実 symplectic 構造以外にも、多くの重要な幾何構造は $\mathrm{GL}(TX)$ のテンソル空間への作用に関する軌道から決まっている。特に微分形式への作用に関する軌道の定める幾何構造として、Calabi-Yau, hyperKähler, G_2 そして Spin(7) 構造などを捉えられ、この視点から、これらの幾何構造の変形や、moduli space の構成が可能となっている。
しかしながら、最近 Hitchin, Gualtieri など、により導入された generalized complex structure や geberalized Kähler 構造は $\mathrm{GL}(TX)$ を含むさらに大きな変換群を用いて幾何構造を再構成する可能性を示唆している [9],[10],[13] 。接束 $T := TX$ と余接束 $T^* := T^*X$ を対等に扱うという立場にたち、これらの直和 $T \oplus T^*$ を考える。$T \oplus T^*$ には符号数 (n, n) の内積 $\langle\, ,\, \rangle$ があり、直交群 $\mathrm{O}(T \oplus T^*)$, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(T \oplus T^*)$ が定義される。X 上の almost generalized complex structure $\mathcal{J}$ を自乗して -1 となる $\mathrm{SO}(T \oplus T^*)$ の元とし、$\mathcal{J}$ がある種の積分条件をみたすとき、generalized complex structure という。Generalized complex structures 全体は群 $\mathrm{O}(T \oplus T^*)$ の $\mathrm{End}(T \oplus T^*)$ への作用に関する 軌道となっている。J を通常の X 上の複素構造とし、J^* を T^* 上の複素構造とすると、generalized

complex structure $\mathcal{J}_J$ が次の行列により定まる：

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}$$

また、ω を X 上の symplectic 構造とすると、generalized complex structure $\mathcal{J}_\omega$ が

$$\mathcal{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

により、定まる。(ここで $\omega : T \to T^*$, $\omega^{-1} : T^* \to T$ とみていることに注意.) つまり、複素構造と symplectic 構造はそれぞれ、generalized complex structures を与え、これらは $\mathrm{O}(T \oplus T^*)$ の変換で移りあっている。

さて、この章では、以前 [7] で構成した、$\mathrm{GL}(T)$ の軌道から決まる閉微分形式の定める幾何構造をこのような一般化された幾何構造を含む形で拡張することを試みる。この際、$T \oplus T^*$ の Clifford 代数 $\mathrm{CL}(T \oplus T^*)$ が微分形式の空間に自然に作用していることが、重要である。(この作用は Spin 表現そのものである.) Clifford 代数の中には様々なリー群があるが、特に conformal pin group Cpin(=$\mathrm{Cpin}(V \oplus V^*)$) に着目する. Spin 表現の制限により、$\mathrm{Cpin}(V \oplus V^*)$ も微分形式の空間に作用している. ここでは、微分形式の空間 $\wedge^* T^*$ の Spin 群の軌道を一つ決めるごとに、対応する幾何構造が定まると考えることにする。これらを一般化された幾何構造ということにする [8]。(Spin 群では微分同相写像の作用のもとで不変にならないために、conformal pin group を使う。(2.2.2) 節参照) $\mathrm{GL}_0(TX)$ を $\mathrm{GL}(TX)$ の単位元を含む連結成分とすると、包含写像 $\mathrm{GL}_0(T) \subset \mathrm{Cpin}(T \oplus T^*)$ より、$\mathrm{Cpin}(T \oplus T^*)$ 軌道は $\mathrm{GL}_0(T)$ 軌道を含んでいる。すると、Calabi-Yau, hyperähler など、$\mathrm{GL}_0(T)$ の軌道から定まる通常の幾何構造は $\mathrm{Spin}(T \oplus T^*)$ 軌道を唯一つ定め、対応する 一般化された Calabi-Yau, hyperKähler 構造などが定義されることになる。更に、これら、一般化された幾何構造の変形理論を構成し、変形の障害の問題、局所トレリ型定理について、論じていく。おもしろいことに、$\mathrm{GL}_0(T)$ 軌道のときの、方法が自然に適用できて、例えば、次のような結果が得られる,

定理 2.7 一般化された Calabi-Yau (metrical) 構造の変形に障害は消えており、局所トレリ型定理が成立している。

§1 では、符号が (n,n) の内積にかんする Clifford 代数、Spin 群 conformal pin 群などについて解説する。2-form B や、2-vector β を指数関数の肩に載せた e^B, あるいは e^β の作用が Spin 群の元であることが示される。(これらの作用は forms の degree を保たないことに注意.) §2. では、conformal pin 群の軌道の定める幾何構造を導入し、その変形理論を確立する。§3. では generalized $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ 構造、generalized Calabi-Yau 構造 などを導入し、これらの幾何構造の変形について、論じる。

2.2 代数的準備

2.2.1 Clifford algebra and Spin group

V を $2m$ 次元の実ベクトル空間、V^* を V の双対空間とする。V と V^* の直和 $V\oplus V^*$ に不定値計量 $\langle\, ,\rangle$ を次のように定めることにする：$E=v+\eta$, $F=w+\xi\in V\oplus V^*$ にたいして、

$$\langle E,F\rangle := \frac{1}{2}\eta(w)+\frac{1}{2}\xi(v), \tag{2.1}$$

ここで、$v,w\in V$, $\eta,\xi\in V^*$ とし、V と V^* の自然な coupling をそれぞれ $\eta(w)$, $\xi(v)$ としている。(特に $\|E\|^2=\langle E,E\rangle$ とする.) $V\oplus V^*$ を $4m$ 次元のベクトル空間とみて、$V\oplus V^*$ の k 次のテンソル空間を $\otimes^k(V\oplus V^*)$ とし、テンソル空間を

$$\otimes(V\oplus V^*) := \sum_{k=0}^{\infty}\otimes^k(V\oplus V^*) \tag{2.2}$$

とする。ここで、$\otimes^0(V\oplus V^*)=\mathbf{R}$ としていることに注意。集合 $\{E\otimes E-\|E\|^2 1\mid E\in V\oplus V^*\}$ から生成される両側イデアル $\mathcal{I}$ による商代数を Clifford 代数という:

$$\mathrm{CL}(V\oplus V^*) := \otimes(V\oplus V^*)/\mathcal{I}. \tag{2.3}$$

Clifford 代数における積を Clifford 積といい、$\alpha\cdot\beta$ ($\alpha,\beta\in\mathrm{CL}(V\oplus V^*)$) と表すことにする。すると、$E,F\in V\oplus V^*$ にたいして、

$$E\cdot F+F\cdot E=\langle E,F\rangle\,1 \tag{2.4}$$

が成立する。両側イデアル $\mathcal{I}$ が degree 2 の元から生成されていることから、Clifford 代数は偶数および奇数の degree の部分に分解する：

$$\mathrm{CL}(V\oplus V^*) := \mathrm{CL}^{\mathrm{even}}(V\oplus V^*)\oplus\mathrm{CL}^{\mathrm{odd}}(V\oplus V^*).$$

Clifford 代数には二つの involution があり、大切な役割を演じる。一つは Clifford 代数の偶奇性を利用し、 $\alpha \in \mathrm{CL}(V \oplus V^*)$ にたいして、

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} +\alpha, & (\alpha \in \mathrm{CL}^{\mathrm{even}}), \\ -\alpha, & (\alpha \in \mathrm{CL}^{\mathrm{odd}}) \end{cases}$$

として、定義される。もう一つは $\alpha = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k \in \mathrm{CL}(V \oplus V^*)$ の順番を逆にして元を並べ替えたものである：

$$(2.5) \qquad \sigma(\alpha) := E_k \cdots E_2 \cdot E_1, \qquad (E_i \in V \oplus V^*, i = 1, \cdots, k).$$

R-module としての同型: $\wedge^*(V \oplus V^*) \cong \mathrm{CL}(V \oplus V^*)$ から、$\mathrm{CL}(V \oplus V^*)$ には自然な計量が定まり、

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle 1,\ \sigma(\alpha) \cdot \beta \rangle, \qquad (\alpha, \beta \in \mathrm{CL}(V \oplus V^*)$$

を満たす。Clifford norm を

$$\|\alpha\| := \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle 1,\ \sigma(\alpha) \cdot \alpha \rangle$$

と書くことにする。さて、V 上の p 次形式のなす空間を $\wedge^p V^*$ とし、S を

$$S := \oplus_{k=0} \wedge^p V^*$$

とする。$V \oplus V^*$ の S への作用を内部積と外部積を用いて、

$$E \cdot \phi := i_v \phi + \eta \wedge \phi, \qquad (E = v + \eta, \quad \phi \in S)$$

とする。内部積と外部積に関する恒等式：

$$i_v \eta \wedge \phi + \eta \wedge i_v \phi = \|E\|^2 \phi$$

より、$V \oplus V^*$ の S への作用は $\mathrm{CL}(V \oplus V^*)$ に拡張される。この作用をスピノル表現という。$\mathrm{CL}^\times(V \oplus V^*)$ を $\mathrm{CL}(V \oplus V^*)$ において可逆元全体のなす群とする。可逆な元 $g \in \mathrm{CL}^\times(V \oplus V^*)$ にたいして、線形写像 $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g \colon \mathrm{CL}(V \oplus V^*) \to \mathrm{CL}(V \oplus V^*)$ を

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_g(\alpha) = \tilde{g}^{-1} \alpha g, \qquad (\alpha \in \mathrm{CL}(V \oplus V^*)\ ),$$

として定める。さて、一般には $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g$ は $V \oplus V^*$ を保つとは限らないが、保つような $g \in \mathrm{CL}^\times(V \oplus V^*)$ 全体のなす部分群として、conformal pin group $\mathrm{CPin}(V \oplus V^*)$ を

$$\mathrm{CPin}(V \oplus V^*) := \{\, g \in \mathrm{CL}^\times(V \oplus V^*) \,|\, \widetilde{\mathrm{Ad}}_g(V \oplus V^*) \subset V \oplus V^* \,\}$$

とする。これから、短完全列

$$1 \longrightarrow \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathrm{CPin}(V \oplus V^*) \longrightarrow \mathrm{O}(V \oplus V^*) \longrightarrow 1$$

が得られる。ここで、$\mathrm{O}(V \oplus V^*)$ は $V \oplus V^*$ の 直交群 とする。$\mathrm{CPin}(V \oplus V^*)$ の元 g はまた、次のような記述をもつ：

$$g = E_1 \cdots E_k, \qquad (\|E_i\| \neq 0,\ \forall i). \tag{2.6}$$

(2.6) により、$g \in \mathrm{CPin}(V \oplus V^*)$ の Clifford norm は $\|g\| = \sigma(g) \cdot g$ により、与えられる。$\mathrm{CPin}(V \oplus V^*)$ の部分群 $\mathrm{Pin}(V \oplus V^*)$ と $\mathrm{Spin}(V \oplus V^*)$ をそれぞれ、

$$\mathrm{Pin}(V \oplus V^*) := \{\, g \in \mathrm{CPin}(V \oplus V^*) \mid \|g\| = \pm 1 \,\}, \tag{2.7}$$
$$\mathrm{Spin}(V \oplus V^*) := \{\, g \in \mathrm{CPin}(V \oplus V^*) \cap \mathrm{CL}^{\mathrm{even}} \mid \|g\| = \pm 1 \,\} \tag{2.8}$$

とする。このとき、短完全列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(V \oplus V^*) \longrightarrow \mathrm{SO}(V \oplus V^*) \longrightarrow 1$$

が得られる。$\mathrm{Spin}(V \oplus V^*)$ の単位元の連結成分を $\mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*)$ とすると、

$$\mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*) = \{\, g \in \mathrm{Spin}(V \oplus V^*) \,|\, \sigma(g) \cdot g = 1 \,\}$$

で与えられる。$\mathrm{Spin}(V \oplus V^*)$ の連結成分は二つであり、Clifford norm $\pm$ で区別される。$\mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*)$ の基本群は $\mathbb{Z}_2$ となっている。($\mathrm{O}(V \oplus V^*)$ の maximal subgroup は $\mathrm{O}(V) \times O(V^*)$ であることより、四個の連結成分を持つ。 単位元を含む連結成分 $\mathrm{SO}_0(V \oplus V^*)$ の基本群は $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ である。)

2.2.2 Spin 群 $\mathrm{Spin}(V \oplus V^*)$ の表現について

$\mathrm{SO}(V \oplus V^*)$ のリー環 $\mathrm{so}(V \oplus V^*)$ は次の分解をもつ：

$$\mathrm{so}(V \oplus V^*) \cong gl(V) \oplus \wedge^2 V \oplus \wedge^2 V^* .1 - 2 - 1$$

この分解は $a \in \mathrm{so}(V \oplus V^*)$ を次のように分解して得られる：

$$a = \begin{pmatrix} A & \beta \\ b & -A^* \end{pmatrix}$$

ここで、$A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, $b \in \wedge^2 V^*$, $\beta \in \wedge^2 V$, $A^* \in \mathrm{End}(V^*)$ は

$$A^*(\eta)(v) := \eta(A(v))$$

から得られる。($b: V \to V^*$, $\beta: V^* \to V$ とみていることに注意。) リー群の方は、GL(V) が $SO(V \oplus V^*)$ に次のように埋め込まれている：

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^*)^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

また、$b \in \wedge^2 V^*$, $\beta \in \wedge^2 V$ にたいして、

$$e^b = 1 + b + \frac{1}{2!} b^2 + \cdots, \tag{2.10}$$

$$e^\beta = 1 + \beta + \frac{1}{2!} \beta^2 + \cdots, \tag{2.11}$$

はそれぞれ、$\mathrm{Spin}(V \oplus V^*)$ の元となる。$\mathrm{GL}_0(V)$ を $\mathrm{GL}(V)$ の単位元を含む連結成分、$\mathrm{SO}_0(V \oplus V^*)$, $\mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*)$ もそれぞれの群の単位元の連結成分とする。2.9 の埋め込みを $q: \mathrm{GL}_0(V) \to \mathrm{SO}_0(V \oplus V^*)$ とすると、q は $\mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*)$ への写像 $p: \mathrm{GL}_0(V) \to \mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*)$ に lift する：

$$\begin{array}{ccc} p: \mathrm{GL}_0(V) & \longrightarrow & \mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*) \\ \cong \downarrow & & \mathrm{Ad} \downarrow \\ q: \mathrm{GL}_0(V) & \longrightarrow & \mathrm{SO}_0(V \oplus V^*) \end{array}$$

Clifford 代数の Spin 表現の制限から得られる $\mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*)$ の $S = \wedge^* V^*$ への表現を

$$\rho_{\mathrm{Spin}}: \mathrm{Spin}_0(V \oplus V^*) \to \mathrm{GL}(S)$$

とし、$\mathrm{GL}_0(V)$ の S の線形表現を ρ^*_{GL} とすれば、

$$\rho_{\mathrm{Spin}} \circ q = (\det V^*)^{\frac{1}{2}} \otimes (\rho^*_{\mathrm{GL}})^{-1}$$

が成立している。ここで、$(\det V^*)^{\frac{1}{2}}$ は V^* の determinant 表現の $\frac{1}{2}$ 乗である。

2.3 一般化された幾何構造と変形理論

2.3.1 一般化された幾何構造の導入

n 次元ベクトル空間 V 上の交代形式のなす空間 $\wedge^* V^*$ の l 個の直和

$$\oplus^l \wedge^* T^* := \overbrace{(\wedge^* V^* \oplus \cdots \oplus \wedge^* V^*)}^{l\ \mathrm{times}}$$

への Cpin 群の作用を $\oplus^l \rho_{\mathrm{Cpin}}$ とする。$\Phi_V = (\phi_1, \cdots, \phi_l) \in \oplus^l \wedge^* T^*$ をとり、Φ_V を通る Cpin 群の軌道を $\mathcal{B}(V)$ とし、以下、固定する。また、$\mathrm{GL}_0(V)$ の Φ_V を通る軌道を $\mathcal{A}(V)$ とすれば、2.2.2 章での包含写像 $p\colon \mathrm{GL}_0(V) \hookrightarrow \mathrm{Spin}(V \oplus V^*) \hookrightarrow \mathrm{Cpin}(V \oplus V^*)$ より、$\mathrm{GL}_0(V)$-軌道は Cpin-軌道の部分集合となる：

$$\mathcal{A}(V) \hookrightarrow \mathcal{B}(V). \tag{2.12}$$

さて、X を oriented n 次元実多様体とし、接束 $T := TX$ と余接束 $T^* := T^*X$ の直和を $T \oplus T^*$ とし、Clifford bundle を $\mathrm{CL} := \mathrm{CL}(T \oplus T^*)$、Cpin 群を fibre とする fibre bundle を $\mathrm{Cpin}(T \oplus T^*)$ とする。各点 $x \in X$ ごとに 同型 $h\colon V \to T_xX$ を与えれば、$V \oplus V^* \cong T_xX \oplus T_x^*X$ となり、$\mathrm{Cpin}(V \oplus V^*)$ 軌道 $\mathcal{B}(V)$ から、$\mathrm{Cpin}(T_xX \oplus T_x^*X)$ 軌道 $\mathcal{B}(T_xX)$ が得られる。(2.12) から、$\mathcal{B}(T_xX)$ は同型 $h\colon V \to T_xX$ の取り方に依存せず、$\mathcal{B}(V)$ が canonical に定義される。このとき、X 上の fibre bundle $\mathcal{B}(X) \to X$ を

$$\mathcal{B}(X) := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(T_xX) \to X$$

により、定める。Cpin 群の作用の isotorpy 群を H とすれば、$\mathcal{B}(X)$ は $\mathrm{Cpin}(T_xX \oplus T_x^*X)/H$ を fibre とする fibre bundle であり、$\mathcal{B}(X)$ は 微分形式の直和の空間の中に C^∞ に埋め込まれている。$\mathcal{B}(X)$ の C^∞ 大域切断全体のなす空間を

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(X) := C^\infty(X, \mathcal{B}(X))$$

とし、d-closed な大域切断全体を

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(X) := \{\, \Phi \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(X) \mid d\Phi = 0 \,\}$$

とする。

定義 2.1 $\Phi \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(X)$ を軌道 $\mathcal{B}(V)$ から定まる X 上の幾何構造という。

moduli space を考えるには、通常は X の微分同相写像全体のなす群 $\mathrm{Diff}(X)$ あるいは, その単位元を含む連結成分 $\mathrm{Diff}_0(X)$ で幾何構造を同一視するが、ここでは、もう一つの作用を導入する: $d\gamma$ を d-exact な実 2 次形式とする。$d\gamma$ を exponetial の肩に載せ、$e^{d\gamma}$ を左から、外積することにより、$\wedge^* T^*X$ への作用が得られる。この作用と、$\mathrm{Diff}_0(X)$ との合成によって得られる群を $\widetilde{\mathrm{Diff}}_0(X)$ とする：

$$0 \longrightarrow d\,(\wedge^1 T^*X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Diff}}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Diff}_0(X) \longrightarrow 1$$

定義 2.2 $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}(X)$ を $\widetilde{\mathrm{Diff}_0}(X)$ の作用により、同一視した商集合

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X) := \widetilde{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}(X)/\widetilde{\mathrm{Diff}_0}(X)$$

を軌道 $\mathcal{B}(V)$ から定まる X 上の幾何構造の *moduli space* という。

2.3.2 変形理論

さて、$\Phi \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}(X)$ を与え、変形を考えるために、Φ の変形複体を導入する。X 上の Clifford bundle $\mathrm{CL}(X)$ の even part および、odd part は degree により, それぞれ filtration が入っている：

$$\mathrm{CL}^0(X) \subset \mathrm{CL}^2(X) \subset \mathrm{CL}^4(X) \subset \cdots, \tag{2.13}$$

$$\mathrm{CL}^1(X) \subset \mathrm{CL}^3(X) \subset \mathrm{CL}^5(X) \subset \cdots. \tag{2.14}$$

このとき、$\mathrm{CL}^k(X)$ の Φ への作用から、vector bundle

$$\mathbf{E}^{k-1}(X) := \mathrm{CL}^k(X) \cdot \Phi$$

が定まり、対応する vector bundle の filtration が定まる：

$$\mathbf{E}^{-1}(X) \subset \mathbf{E}^1(X) \subset \mathbf{E}^3(X) \subset \cdots \tag{2.15}$$

$$\mathbf{E}^0(X) \subset \mathbf{E}^2(X) \subset \mathbf{E}^4(X) \subset \cdots \tag{2.16}$$

ここで、$\mathbf{E}^{-1}(X)$ は Φ から、生成される rank 1 の vector bundle であり、

$$\mathbf{E}^0(X) = Span\{E \cdot \Phi \,|\, E \in T \oplus T^*\}, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{E}^1(X) = Span\{E_1 \cdot E_2 \cdot \Phi \,|E_1, E_1 \in T \oplus T^*\} \tag{2.18}$$

となっており、各 $\mathbf{E}^k(X)$ は微分形式の直和の空間上に埋め込まれている。

命題 2.3 このとき、 外微分作用素 d を各 $\mathbf{E}^k(X)$ に制限することにより、微分複体 $\#_{\mathcal{B}} = \mathbf{E}^*(X)$:

$$0 \longrightarrow \mathbf{E}^{-1}(X) \xrightarrow{d_{-1}} \mathbf{E}^0(X) \xrightarrow{d_0} \mathbf{E}^1(X) \xrightarrow{d_1} \mathbf{E}^2(X) \longrightarrow \cdots,$$

が得られる。($d_k := d|_{\mathbf{E}^k(X)}$.) 複体 $\mathbf{E}^*(X)$ の *cohomology* 群を $H^*(\mathbf{E}^*(X))$ とすれば、$H^1(\mathbf{E}^*(X))$ は 幾何構造 Φ の変形の *infinitesimal tangent space* となる。

証明 $\mathbf{E}^*(X)$ は Φ から、生成される $\mathrm{CL}(X)$-*module* であるので、$\mathbf{E}^0(X)$ について、$d\mathbf{E}^0(X) \subset \mathbf{E}^1(X)$ を示せばよい。$E \in T \oplus T^*$ にたいして、d との反交換子を $\mathcal{L}_E := dE + Ed$ とすれば、

$$dE \cdot \Phi = \mathcal{L}_E \Phi.$$

$E = v + \eta$, $(v \in T, \eta 1 T^*)$ とすれば、反交換子 $\mathcal{L}_E$ は

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_v + (d\eta)\wedge$$

となる。ここで、$\mathcal{L}_v$ は通常のリー微分。$GL_0(T) \hookrightarrow \mathrm{Spin}(T \oplus T^*)$ より、$\widetilde{\mathcal{M}}_B(X)$ は $Diff(X)$ の作用で不変となるので、$\mathcal{L}_v\Phi \in \mathbf{E}^1(X)$. ゆえに、$d\mathbf{E}^0(X) \subset \mathbf{E}^1(X)$ となる。*Spin* 群のリー環 $spin(T \oplus T^*)$ は $CL^2(X)$ であり、$\mathcal{E}_B(X)$ の Φ における接空間は $\mathbf{E}^1(X) := \mathrm{CL}^2(X)\Phi$ となる。$Diff_0(X)$ 軌道の接空間は $di_v\Phi$ $(v \in T)$ で与えられ、de^γ 作用の軌道の接空間は $d\gamma \wedge \Phi$ であり、合わせて $d(\mathbf{E}^0(X))$ が $\widetilde{\mathrm{Diff}}_0(X)$ 軌道の接空間となる。これから、$H^1(\mathbf{E}^*(X))$ が *infinitesimal tangen space* となる。*q.e.d.*

注意 2.4 $\mathbf{E}^*(X)$ の次数は $H^1(\mathbf{E}^*(X))$ が幾何構造 Φ の変形の *infinitesimal tangent space* となるように、付け替えている。

微分形式の直和 $\oplus^l \wedge^* T^*$ は外微分作用素 d で不変であり、これを de Rham 複体と呼ぶことにすると、 複体 $\#_B$ は de Rham 複体の部分複体となっている：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{E}^{-1}(X) & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathbf{E}^0(X) & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{E}^1(X) & \xrightarrow{d_1} & \mathbf{E}^2(X) & \longrightarrow & \cdots, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \oplus^l \wedge^* T^* & \xrightarrow{d} & \oplus^l \wedge^* T^* & \xrightarrow{d} & \oplus^l \wedge^* T^* & \xrightarrow{d} & \oplus^l \wedge^* T^* & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

de Rham 複体の cohomology group を $H^*_{dR}(X)$ と書くことにすると, cohomology 群の間の写像

$$p^k\colon H^k(\mathbf{E}^*(X)) \to H^*_{dR}(X)$$

が得られる。また、$\widetilde{\mathrm{Diff}}_0(X)$ の作用は 幾何構造 $\Phi \in \widetilde{\mathcal{M}}_B(X)$ の de Rham cohomology class を不変にするので、moduli space からの写像：

$$P_B\colon \mathcal{M}_B(X) \to H^*_{dR}(X)$$

が得られる。P を一般化された幾何構造の周期写像ということにする。

定義 2.5 微分複体 $\#_{\mathcal{B}}$ が楕円型複体のとき、軌道 $\mathcal{B}(V)$ を完全楕円型軌道という。特に　$k = 1, 2$ のところで、楕円型になっていれば、楕円型軌道という。

定義 2.6 写像 $p^k\colon H^k(\mathbf{E}^*(X)) \to H^*_{dR}(X)$ $(k = 1, 2)$ が単射のとき、幾何構造 $\Phi \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(X)$ を位相的な幾何構造と呼ぶ。すべての n 次元 *compact* 多様体 X 上任意の幾何構造 $\Phi \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(X)$ が位相的な幾何構造となるとき、軌道 $\mathcal{B}(V)$ 位相的な軌道という。

以下の定理は Bogomolov-Tian -Todorov による、Calabi-Yau 多様体の変形の非障害性定理を一般化したものであり、[7] で展開された議論の拡張である：

定理 2.7 X を *compact* かつ *oriented* n 次元多様体とする。軌道 $\mathcal{B}(V)$ が楕円型かつ位相的な軌道ならば、軌道 $\mathcal{B}(V)$ から定まる幾何構造の変形の障害は消えている。更に、変形の空間は 滑らかであり、*de Rham cohomology group* $H^*_{dR}(X)$ の中に　局所的に埋め込まれている。(これを局所トレリ型定理が成立するという。)

2.4　一般化された $\mathrm{SL}_n(\mathrm{C})$, Calabi-Yau 構造

定義 2.8 (generalized $\mathrm{SL}_n(\mathrm{C})$ 構造) V を $n = 2m$ 次元のベクトル空間とし、J を V 上の複素構造、$\Omega_V \neq 0$ を J について、*type* $(n, 0)$ 型の複素 n 次形式とする．　Ω_V を通る $\mathrm{GL}(V)$ 軌道を $\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(V)$ とし、軌道 $\mathcal{A}_{\mathrm{SL}}(V)$ から定まる幾何構造を $\mathrm{SL}_n(\mathrm{C})$ 構造とする。更に Ω_V を通る $\mathrm{Cpin}(V \oplus V^*)$ 軌道を $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}}(V)$ とし、軌道 $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}}(V)$ から定まる幾何構造を *generalized* $\mathrm{SL}_n(\mathrm{C})$ 構造という。

注意 2.9 *Generalized* $\mathrm{SL}_n(\mathrm{C})$ 構造は *Hitichin* により、導入された。これは *[13]* において, *genralized Calabi-Yau* 構造と呼ばれている。*Calabi-Yau* 多様体の定義は研究分野により、かなり異なっていることに注意。標準束が自明な複素多様体を *Calabi-Yau* 多様体とする定義を *Hitichin* は採用している。この講演では、標準束が自明なケーラー多様体を *Calabi-Yau* 多様体と呼んでいる。

注意 2.10 軌道 $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}}(V)$ は次のように、定義することもできる: $\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{SL}}(V)$ とは、$\phi \in \wedge^* V^*$ が 複素 *pure spinor* であり、*spinor norm* $\langle \phi, \overline{\phi} \rangle \neq 0$. こ

こで、*pure spinor* とは、$(V \oplus V^*) \otimes \mathbf{C}$ の部分空間 L_ϕ を

$$L_\phi = \{E \in (V \oplus V^*) \otimes \mathbf{C} \,|\, E \cdot \phi = 0\}$$

としたとき、L_ϕ が *maximal isotropic subspace* となることとする。このとき、$(V \oplus V^*) \otimes \mathbf{C}$ は

$$(V \oplus V^*) \otimes \mathbf{C} = L_\phi \oplus \overline{L}_\phi \tag{2.19}$$

と分解され、各部分空間 L_ϕ, $\overline{L}_\phi$ は拡張されたある積分可能条件を満たす。このことから、分解 *2.19* が与えられ、この積分条件を満たすとき、これを、*generalized complex structure* という。これは、微分形式を使わず、定義される。さて、*generalized* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ 構造の軌道は *level* という量 $(0, 1, \cdots, m$ に値をとる.) で類別される. これは、軌道 $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}}(V)$ を $\mathrm{GL}(V)$ と *b-field* $(b \in \wedge^2 V^*)$ の作用に関して更に、軌道分解したものである：
level $= 0$ のとき、$\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{SL}}(V)$ は

$$\phi = e^{i\omega}$$

(ここで、 ω は V 上の非退化実２次形式*)* と表わされる。
level$= m$ のときは、$\mathrm{SL}_m(\mathbf{C})$ 構造となる：一般の *level* $= l$ では、空間 V が $V = V_1 \oplus V_2$, $(\dim_{\mathbf{R}} V_1 = 2l)$ と部分空間に分解され、V_1 上に $\mathrm{SL}_l(\mathbf{C})$ 構造 $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^l$, V_2 上に非退化実２次形式 ω_2 があり、$\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{SL}}(V)$ は

$$\phi = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_l \, e^{i\omega_2}$$

と表現される。これらの微分形式は 2-*vector* による作用 e^β により、*level* を変えて移り合っている。さて、多様体上で、*level* $= l$ (一定) の $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ 構造 ϕ が与えられたとき、ϕ は多様体上に葉層構造 (foliation) を定め、*leaf* に横断的な方向には複素構造が入り、各 *leaf* 上には *symplectic* 構造が入ることになる。一般の *gemeralized* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ 構造の場合、*level* は多様体の点ごとに変わる可能性があり、実際 *level* が部分集合上で *jump* する現象が観察されている。

更に、

定義 2.11 ω_J を (V, J) に関する *Hermitain form* とし、

$$\Omega \wedge \overline{\Omega} = c_n \omega^n,$$

を満たすとする。ここで、c_n は n のみによるある定数。このとき、ペア $(\Omega, e^{\sqrt{-1}\omega})$ を通る $\mathrm{GL}(V)$ 軌道を $\mathcal{A}_{\mathrm{SU}}(V)$ とし、$\mathrm{Cpin}(V \oplus V^*)$ 軌道を $\mathcal{B}_{\mathrm{SU}}(V)$ とする。軌道 $\mathcal{A}_{\mathrm{SU}}(V)$ から定まる幾何構造を *Calabi-Yau* 構造という、軌道 $\mathcal{B}_{\mathrm{SU}}(V)$ から決まる幾何構造を *generalized Calabi Yau (metrical)* 構造という。

多様体 X 上に Calabi-Yau (metrical) 構造 (ϕ_1, ϕ_2) があれば、X の cohomology groups に関して、Hodge 分解の拡張が成立し、定理 2.7 を適 用できる.

定理 2.12 *generalized Calabi-Yau (metrical)* 構造の変形の障害は消えており、局所トレリ型定理が成立している。

通常の Calabi-Yau 多様体は、generalized Calabi-Yau 多様体であり、theorem 2-9 から、Kodaira-Specer 理論とは、違う変形が得られる。トーラスや、K3 曲面を眺めると、おもしろい現象が観察される。また、generalized Calabi-Yau 構造では、 複素構造と、kähler form を対等に扱うため、modulli space は 自然な複素構造を持つ。これは、Kähler form の方向の変形が自然に複素化されるためであり、単に $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ 構造と kähler 構造のペアの moduli space を考えていたのでは、得られない視点と思われる。更に、generalized hyperKähler, G_2 そして Spin(7) 構造については [8] を参照. generalized Kähler 多様体の例として、Hopf 多様体のような non-Kähler 多様体が現れる. また、複素構造の変形空間を拡張する理論としては、[1] , [5] などがあるが、これと関連し、Cpin 群を更に大きな群に拡張し、幾何構造や変形理論を構成する試みもあるが、これについては別の機会に論じたい。

関連図書

[1] Sergey Barannikov and Maxim Kontsevich, "Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields", *International Math. Res. Notices*4(1998), pp. 201–215.

[2] C. Benson and C. Gordon, "Kähler and symplectic structures on nilmanifolds ", *Topology***27**. No. 4(1988),pp. 513-518.

[3] C. Benson and C. Gordon, "Kähler structures on compact solvmanifolds ", *Proc. Amer. Math. Soc.***108**. No. 4(1990), pp. 971-980.

[4] Gil R. Cavalcanti, "New aspect of the dd^c-lemma", *math.DG/0501406*

[5] Kenji Fukaya, シンプレクティック幾何学, 現代数学の展開, 岩波書店

[6] A. Fujiki and G. Schumacher, " The moduli space of Extremal compact Kähler manifolds and Generalized Weil-Perterson Metrics ", *Publ. RIMS, Kyoto Univ* **26**. No.1 (1990) pp.101-183.

[7] R. Goto, " Moduli spaces of topologi cal calibrations, calabi-Yau, hyperKähler, G_2, spin(7) structures ", *Internationl Journal of Mathematics* **15**, No . 3 (2004), pp. 211-257.

[8] R. Goto, " On deformations of generalized Calabi-Yau, hyperKähler, G_2 and Spin(7) structures ", mathDG/0512211.

[9] Marco Gualitieri, " Generalized complex geometry *Oxford D.Phill thesis,* , math.DG/0401221(2004)

[10] Marco Gualitieri, " Hodge decomposition for generalized Kähler manifolds, math.DG/0409093(2004)

[11] D. Guan, "Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which are not Kählerian III ", *Intenat.J. Math.***6**, No. 6(2002),pp.1265-1295.

[12] F.R. Harvey, *Spinors and calibrations*, Perspectives in Mathematics **9** *Academic Press, Inc* (1990)

[13] Nijel Hitchin " Generalized calabi-Yau manifolds, mathDG/0209099 (2002)

[14] Daniel Huybrecht " Generalized calabi-Yau structures, K3 surfaces and B-fields, math.AG/0306162 (2003)

[15] D. Kaledin and M. Verbitsky, "Period map for non-compact holomorphically symplectic manifolds ", *Geom. Func. Anal.***12**, No. 6(2002),pp. 1265-1295.

[16] Y. Kawamata " Unobstructed deformations- a remark on a paper of Z. Ran ", *J. Algebraic Geometry,* **1**(1992) pp. 183-190, no. 2

[17] K. Kodaira *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **283**, Springer-Verlag, New York-Berlin (1986)

[18] H.B. Lawson, Jr and M. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University press (1989).

[19] I. Nakamura, "Complex parallelizable manifolds and their small deformations ", *J. Diff. Geometry.***10**(1975),pp. 85-112.

[20] Y. Namikawa " Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds, math.AG/0110114

[21] K. Nomizu, "On the cohomology of compact homogenous spaces of nilpotent Lie groups ", *Ann. of Math.***53**(1954),pp.531-538.

[22] Z .Ran "Deformations of calabi-Yau kleinfolds, *Essays on Mirror manifolds*, International Press, Hong Kong (1992) pp. 451-457.

[23] Y. Sakane, "On compact complex parallelizable solovmanifolds ", *Osaka J. Math.***13**(1976),pp. 187-212.

[24] G.Tian " Smoothness of the universal deformation space of compact calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric ", Mathemati cal aspects of string theory (ed. S.-T. Yau), Advanced Series in Mathemati cal Physics. **10**, World Scientific Publishing Co., Singapore (1987) pp. 629–646.

[25] G. Tian " Smoothing 3-folds with trivial canoni cal bundle and ordinary double points ", *Essays on Mirror Manifolds*, Internationsl Press, Hong Kong (1992) pp. 458-479.

[26] A.N.Todorov, "The Weil-Peterson geometry of the moduli space of SU($n \geq 3$) (calabi-Yau) manifolds. I ", *Comm. Math. Phys.* **126**(1989) pp..325–346.

[27] H.C. Wang, "Complex paralleizable manifolds ", *Proc. Amer. J.Math.***76**(1954),pp. 1-32.

[28] J. Winkelmann, " Complex analytic geometry of complex paralleizable manifolds ", *Mem. Soc. Math. Fr.(N.S.)*No. 72-73 (1988),