

京都大学数理解析研究所共同利用研究会「情報物理学の数学的構造」2006 年 6 月 28 日-30 日

多変数留数の計算代数解析とホロノミー D 加群

新潟大学工学部・情報工学科 田島慎一 (Shinichi TAJIMA)
Dept. of Information Engineering, Niigata University

1 はじめに

19 世紀後半から 20 世紀中頃にかけて、一変数留数の概念を多変数の場合に拡張することが研究され、いくつかの多変数留数理論が創られた。代表的なものとして、Poincaré 留数、Leray 留数、Grothendieck 留数そして Coleff-Herrera 留数カレントの理論等をあげることができる。本稿では、計算代数解析の観点からこれら代表的多変数留数のひとつである Grothendieck local residues を扱う。

留数と双対性に関する Grothendieck の理論は、R. Hartshorne の著書 Residues and Duality に見られるように、導来圏の理論を駆使することで築き上げられた壮大な理論体系である。Grothendieck local residues 自体は、この壮大な理論体系の中で最も基本的な対象として位置づけることができる。また、Grothendieck local residues は幾何的にも解析的にも自然な概念であり、代数幾何をはじめ様々な分野の問題に応用されている。Grothendieck local residues は理論的にも応用上も重要な概念であるが、実際に値を求める為の方法については十分な研究がなされておらず、計算法は確立していなかったといえる。2003 年の秋に、計算機代数の手法と代数解析学の理論を用いることで、Grothendieck local residues の値を求めるアルゴリズムの導出に成功した。この方法は、L. Ehrenpreis が導入した Noether 作用素と呼ばれる偏微分作用素とホロノミー D 加群とを用いることで留数値を計算するものであり、[34], [35], 論文 [45] 等に発表した計算法とはいくつかの点で本質的に異なっている。既に [42] においてこの多変数留数計算アルゴリズムの導出の仕方等について説明してあるので、ここではむしろ、多変数留数計算の問題を代数解析の問題として定式化していく仕方やアルゴリズム導出のアイデア等について述べることにする。

2 多変数留数とコホモロジー

Grothendieck local residues を理解することは、決して容易ではない。解析的には極めて自然な方法で定義することが出来るため一見すると平易な概念であるかのように見えるが、実際には、双対性と深く関わる本質的な概念である。今の数学の言葉でこれらの事を理解するには、多変数積分表示の理論とともに相対 Čech コホモロジーや局所コホモロジー、Koszul 複体や米田 pairing 等のホモロジー代数の知識が必要となる。

この節では, Grothendieck local residues に関する基本的な事柄について説明を試みる. 留数値を求める計算法を考えるうえでもホモロジー代数的な枠組みや扱いが自然でありまた実際に必要となることを示すのがこの節の目的である.

まず, Grothendieck local residues の解析的な定義を思い出すことから始める. $X = \mathbb{C}^n$ の領域 U と, この領域 U 上正則な n 個の関数の組 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ であり complete intersection となるものが与えられたとする. ここで x は独立変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ をあらわす. 簡単のため, ここでは $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ の U における共通零点は, 一点 $\beta \in U$ のみからなるとする. いま, さらに U 上の正則関数 $\varphi(x)$ が与えられたとする. このとき, 次の積分

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \cdots \int_{\Gamma(\beta)} \frac{\varphi(x)}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)} dx$$

を $\text{res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1 f_2 \cdots f_n} dx\right)$ であらわし, Grothendieck local residue と呼ぶ. ただしここで, $\Gamma(\beta)$ は十分小さな正の数 $\varepsilon > 0$ を与えることで定まる実 n 次元サイクル

$$\Gamma(\beta) = \{x \in U \mid \|f_1(x)\| = \varepsilon, \dots, \|f_n(x)\| = \varepsilon\}$$

をあらわす. 以上が, Grothendieck local residue の解析的な定義である.

さて, 各 f_j が定める超曲面 $D_j = \{x \in U \mid f_j(x) = 0\}$ が点 β の近傍で非特異であり, 更に点 β においてこれらが横断的に交わっているとする. この時, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ のヤコビ行列式を $J_F(x) = \det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right)$ とおくと, 留数 $\text{res}_\beta\left(\frac{\varphi}{f_1 f_2 \cdots f_n}\right)$ の値は $\varphi(\beta)/J_F(\beta)$ で与えられることが, 容易に分かる. しかし, 超曲面 D_j が非特異であったとしても, これらが点 β で横断的には交わらないような場合や D_j が点 β を特異点として含むような場合は, $J_F(\beta) = 0$ となるため留数計算に先程述べた公式を用いることができない. 一般に, 共通零点としての重複度が高いような場合はサイクル $\Gamma(\beta)$ の幾何学的形状が複雑になるため, サイクル $\Gamma(\beta)$ 上の多重積分を行うことで留数値を求めることは, 一般に不可能と言うべきである. では, どの様にすれば Grothendieck local residues の値を計算することができるようになるのであろうか? 直接計算が出来ない以上, Grothendieck local residues の持つ諸特性を明らかにし, それらの特性に注目することで計算法を新たに考案していくことになる.

Grothendieck local residues の諸性質について考える前に, まず最初に, Grothendieck local residues の定義それ自体について考察することからはじめよう. ここで, 簡単のため $n = 2$ すなわち $U \subset \mathbb{C}^2$ として, Grothendieck local residues の定義について考えてみる. まず, 点 β を共通の零点としてもつような 3 つの正則関数 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ が与えられたとする. $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ を用いて, 正則関数 f_1, f_2 を次のように 3 通りの異なる方法で定めてみる.

$$(i) \quad f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x)g_3(x)$$

$$(ii) \quad f_1(x) = g_1(x)g_2(x), \quad f_2(x) = g_3(x)$$

$$(iii) \quad f_1(x) = g_2(x), \quad f_2(x) = g_1(x)g_3(x)$$

$\varphi(x)$ を分子とする留数 $\text{res}_\beta(\frac{\varphi}{f_1 f_2} dx_1 \wedge dx_2)$ をこれら (i), (ii), (iii) の場合にそれぞれ考えると, 対応するサイクルが異なるため, 一般に, 場合 (i), (ii), (iii) の留数値は互いに異なることがわかる.

このことはつまり, Grothendieck local residue の概念は有理関数 $\frac{\varphi}{g_1 g_2 g_3}$ にたいして定義されているわけではなく, 正則関数の組 f_1, f_2 と正則関数 φ をそれぞれ "分母", "分子" に持つ "何者か" に対して定義されていることになる. 実際, 一般に有理関数に対して留数を考える際は, サイクルを何らかの方法で選び, そのサイクルに関する積分として留数値を定義する訳であるから, サイクルの選び方の自由度が常に存在することになる. それに比べ, Grothendieck local residue では, "分母" となる関数の組を指定した段階で自動的に積分サイクルも本質的には定まっていることになる.

ここで当然のこととして次の疑問が湧いてくる. それは, Grothendieck local residues は一体, 数学的には何者に対して定義されているのだろうか? という疑問である. この疑問に答えるために, ここで, 正則関数 ϕ に対し留数値 $\text{res}_\beta(\frac{\phi}{f_1 f_2 \cdots f_n} dx)$ を対応させる写像

$$\phi \rightarrow \text{res}_\beta(\frac{\phi}{f_1 f_2 \cdots f_n} dx)$$

を考える. この写像は明らかに線形であるので, 線形汎関数として解釈することができる. ここで正則関数 g をとり, 例えば $\frac{1}{f_j}$ の代わりに $\frac{1}{f_j} + g$ を用いて定義される留数値

$$\text{res}_\beta(\frac{1}{f_1 \cdots f_{j-1}} \cdot (\frac{1}{f_j} + g) \cdot \frac{1}{f_{j+1} \cdots f_n} \varphi dx)$$

を考えると, 明らかにもとの留数 $\text{res}_\beta(\frac{\varphi}{f_1 f_2 \cdots f_n} dx)$ と一致する. この関係は, 相対Čech コホモロジーを定義する際と同値関係に他ならない. これらのことから, Grothendieck local residue の概念は, 開集合 $U_j = U - D_j$ $j = 1, 2, \dots, n$ と U による $(U, U - \{\beta\})$ の相対被覆 $\{U_1, U_2, \dots, U_n, U\} \text{ mod } \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ で定まる正則関数係数の相対Čech コホモロジー類に対し定義されるものであることが納得できる. 今迄述べたことは次のようにまとめることができる.

主張 " $\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}$ " のことを, 正則関数 ϕ (あるいは, より一般には点 β における形式冪級数) に対し Grothendieck local residue の値を対応させる線形写像

$$\phi \rightarrow \text{res}_\beta(\frac{\phi}{f_1 f_2 \cdots f_n} dx)$$

を定義する超関数として解釈すると, " $\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}$ " はもはや通常の有理関数ではなく, コホモロジー類として意味づけされる.

さて、ここで佐藤超函数の定義の仕方を思い出そう。代数解析学では、 $M = \mathbb{R}^n$ 上の佐藤超函数のなす層 B_M は、 $X = \mathbb{C}^n$ 上の正則函数のなす層 \mathcal{O}_X の M に関する局所コホモロジー $\mathcal{H}_M^n(\mathcal{O}_X)$ として定義される。それに対し、佐藤超函数を相対Čech コホモロジーを用いて正則函数の境界値の形式和として捉えることは、相対被覆の選び方に依存するので、佐藤超函数のひとつの表現法であると理解されている。

我々がここで対象としている Grothendieck local residues も、これと全く同じ状況下にある。いま例えば、 $(U, U - \beta)$ に対する 2 つの相対Čech コホモロジー類であって、留数値を対応させる線形汎函数としては全く同じ写像として作用するが、それぞれ異なる相対被覆を用いて定義されるような、そのような相対Čech コホモロジー類が与えられているとしよう。この時、これらふたつの相対Čech コホモロジー類は超函数として同一のものであり、単に相対被覆の選び方が違うために見かけ上の表現の形が異なっていると理解するのが自然である。(実際、このことは Grothendieck 留数理論の中で明らかにされている) この節で考えている正規列 $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ は、領域 U において点 β のみを共通零点として持つのでコホモロジー類 " $\frac{1}{f_1 f_2 \dots f_n}$ " は、点 β に台をもつ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}_{[\beta]}^n(\mathcal{O}_U)$ の要素として捉えるのがより本質的である。以下、この代数的局所コホモロジー類を τ_F で表すことにする。

このような観点から見ると、佐藤幹夫と A. Grothendieck は、まったく同じ考え方に基づいてしかもほぼ同じ時期に局所コホモロジーの概念や導来圏を導入し、それぞれの理論、即ち、佐藤超函数論と Grothendieck 留数理論を展開していたことになる。

以上をもって Grothendieck local residues の紹介としたい。残念ながら、ここでは定義についても十分な説明を与えることができなかつた。幸い、P. Griffiths と J. Harris の著書 Principles of Algebraic Geometry の第 5 章に、丁寧な解説があるので、詳しいことはそちらを参照されたい。A. K. Tsikh の著書 [50] は、複素解析の立場から多変数留数理論を扱った良書である。積分表示に関連した論文として F. R. Harvey [6], Y. L. Tong [51] 等があげられる。

さて、ここで話をもとに戻して、留数値の計算法についてふたたび考えてみよう。留数値 $\text{res}_\beta(\frac{\phi}{f_1 f_2 \dots f_n} dx)$ は写像

$$\phi \rightarrow \text{res}_\beta\left(\frac{\phi}{f_1 f_2 \dots f_n} dx\right)$$

の $\phi = \varphi$ における値として解釈できる。この線形汎函数の作用を具体的に記述できれば留数値を求めることができる。一般に、Grothendieck local residue は ϕ に対し偏微分作用素として働くことが知られている。即ち、

$$\text{res}_\beta\left(\frac{\phi}{f_1 f_2 \dots f_n} dx\right) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(\beta)$$

なる偏微分作用素 $G = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ が存在する。

代数的局所コホモロジー類 τ_F の線形汎函数としてのこのような作用の仕方を求めることは、代数的局所コホモロジー τ_F の点 β におけるローラン展開を求めることと同値である。より正確に述べると、つぎのように言うことができる。

主張 代数的局所コホモロジー類 τ_F の線形汎函数としての作用の仕方を求めることは、 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in U$ に対し、

$$W = U, W_j = \{x \in W \mid x_j - \beta_j \neq 0\}, j = 1, 2, \dots, n$$

とおいたとき、開集合対 $(W, W - \{\beta\})$ に対する標準的相対被覆 $\{W_1, W_2, \dots, W_n, W\} \bmod \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ による相対Čech コホモロジー群の要素としての代数的局所コホモロジー τ_F の表現を求めることと同値である。

代数的局所コホモロジー τ_F 自体は、もともとは、 U および $U_j = \{x \in U \mid f_i(x) \neq 0\}, i = 1, 2, \dots, n$ なる開集合をもちいた相対 Čech cohomology の元として与えられていた。それに対し、留数値の計算では、これとは異なる被覆による表現を求めることが必要とされていることになる。Grothendieck local residues の計算が困難な理由は、正にここにある。

この節では簡単のため f_1, f_2, \dots, f_n の共通零点は一点のみからなるとして留数計算について考えていたが、実際にはたくさんの共通零点をもつような一般的な場合に対して留数計算を行う必要がある。一体どのようにすれば、各共通零点において、標準的相対被覆に対する相対Čech コホモロジーとしての表現をもとめる事ができるのであろうか？

3 多変数留数計算アルゴリズム

冒頭にも述べたが、2003年に多変数留数を計算するアルゴリズムを導出した。このアルゴリズムは、有理数係数の多項式の組で定義されるような Grothendieck local residues の値を exact に求めるものである。グレブナ基底の計算と零次元イデアルの準素イデアル分解を行うことができる数式処理システムであれば、基本的には実装可能であるように作られている。この節では、この多変数留数計算アルゴリズムについて説明する。アルゴリズムへの入力や内部で行われる計算の大まかな流れ、出力等について述べる。

有理数全体のなす集合 \mathbb{Q} が定める体を K で表す。変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を不定元とする有理数係数多項式全体のなす環 $K[x_1, \dots, x_n]$ を $K[x]$ で表す。

n 個の多項式の組 $f_1, \dots, f_n \in K[x]$ と多項式 $\varphi \in K[x]$ が与えられたとする。ここで f_1, \dots, f_n は complete intersection であり、 $X = \mathbb{C}^n$ におけるこれらの共通零点集合 Z は有限個の点からなるという条件を満たすものとする。多変数留数計算アルゴリズムへの入力データとして、これらの多項式の組 $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ と φ を渡す。それに対し、多変数留数計算アルゴリズムは、共通零点 $\beta \in Z$ における Grothendieck local residue

$$\text{res}_\beta \left(\frac{\varphi}{f_1 f_2 \cdots f_n} dx \right)$$

の値を計算することになる。

話を先に進める前に、ここで入力データの数学的意味を正確に述べておく。まず、 f_1, \dots, f_n が多項式環 $K[x]$ において生成するイデアル (f_1, \dots, f_n) を I とおき、イデアル I の根基を \sqrt{I} で表す。イデアル $\sqrt{I} \subset K[x]$ の $X = \mathbb{C}^n$ における零点集合 $V(\sqrt{I})$ は $Z = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in I\}$ と一致する。この零次元多様体 Z に台をもつ代数的局所コホモロジーを次で定義する。

$$H_{[Z]}^n(K[x]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Ext}_{K[x]}^n(K[x]/\sqrt{I}^k, K[x]).$$

次の自然な写像

$$\text{Ext}_{K[x]}^n(K[x]/I, K[x]) \rightarrow H_{[Z]}^n(K[x])$$

による Grothendieck symbol

$$\left[\begin{matrix} 1 \\ f_1 \dots f_n \end{matrix} \right] \in \text{Ext}_{K[x]}^n(K[x]/I, K[x])$$

の像を $\tau_F \in H_{[Z]}^n(K[x])$ で表す。以上の記号を用いると、多変数留数計算アルゴリズムに入力するデータは、代数的局所コホモロジー類 $\tau_F \in H_{[Z]}^n(K[x])$ と多項式 $\varphi \in K[x]$ を意味していることになる。

さて次に、多変数留数計算アルゴリズムが行う計算についてその概略を述べる。

留数値の計算は f_1, f_2, \dots, f_n の共通零点 $\beta \in Z$ における重複の仕方に大きく依存する。そのため、 Z における重複の仕方に応じた既約分解が必要となる。多変数留数計算アルゴリズムでは、下山-横山の準素イデアル分解アルゴリズム ([27]) を呼び出し、イデアル I の $K[x]$ における準素イデアル分解を求め、その結果を留数計算に利用する。いま、イデアル I は l 個の相異なる準素イデアルに分解されるとし、それを $I = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_\lambda \cap \dots \cap I_l$ とおく。また、準素イデアル I_λ に付随する素イデアル $\sqrt{I_\lambda} \subset K[x]$ を \mathfrak{p}_λ で表し、 $X = \mathbb{C}^n$ における \mathfrak{p}_λ の零点集合 $V(\mathfrak{p}_\lambda)$ を Z_λ とおく。明らかに、 $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_l$ が成り立つ。ちなみに、数式処理システム Risa/Asir ([21]) に実装された下山-横山の準素イデアル分解プログラムは、これら準素イデアル I_λ と付随する素イデアル \mathfrak{p}_λ のグレブナ基底の組 $[gr_\lambda(I_\lambda), gr_\lambda(\mathfrak{p}_\lambda)]$, $\lambda = 1, 2, \dots, l$ を戻り値として返す。

$I_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda$ である場合は、可換代数の範囲で留数計算ができる。まず、 $q_\lambda(x)J(x) = 1 \pmod{\mathfrak{p}_\lambda}$ なる $q_\lambda(x)$ と $\varphi(x)$ の積をとり、あらかじめ(入力時に)指定されてある項順序 \succ による $q_\lambda(x)\varphi(x)$ の $\pmod{\mathfrak{p}_\lambda}$ での Normal Form $\text{NF}_\succ(q_\lambda(x)\varphi(x), \mathfrak{p}_\lambda)$ を使って

$$r_\lambda(x) = \text{NF}_\succ(q_\lambda(x)\varphi(x), \mathfrak{p}_\lambda)$$

とおく。

$$r_\lambda(\beta) = \text{res}_\beta \left(\frac{\varphi(x) dx}{f_1(x) \dots f_n(x)} \right), \quad \beta \in Z_\lambda$$

が成り立つ。さて、代数的局所コホモロジー類 τ_F は Z_λ に台を持つ代数的局所コホモロジー類を用いることで、つぎの形に一意的に分解できる。

$$\tau_F = \tau_{F,1} + \dots + \tau_{F,\lambda} + \dots + \tau_{F,l}$$

但しここで、各 $\tau_{F,\lambda}$ は $\tau_{F,\lambda} \in H_{[Z_\lambda]}^n(K[x])$ なる代数的局所コホモロジー類を表す。以降、この直和分解を利用し、 $I_\lambda \neq p_\lambda$ であるような Z_λ 毎に、計算を行うことになる。

注意 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ を具体的に構成し求めてから以下の計算を行うのではないことを注意しておく。まず、 $\tau_{F,\lambda}$ を特徴つけるようなホロノミー D 加群 (線形偏微分方程式系) を構成しそのホロノミー D 加群を用いることで、(理論的に存在が保障されている) 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ の線形汎函数としての作用の仕方が具体的に分かるような表現を求め、留数計算に用いる訳である。

これより、多変数留数計算アルゴリズムの中核を成す部分の説明にはいる。中核部分は以下の4つのステップからなる。

- 準素イデアル I_λ に付随する Noether operators の構成 ([40], [48])
- 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ (又は τ_F) が満たすホロノミー D-加群の構成 ([42])
- ホロノミー D-加群に対する Noether operator の構成 ([39], [43])
- 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ の Noether operator 表示の計算

これらは何れも、代数解析の理論に基づいて導出したアルゴリズムである。最初のステップでは、準素イデアル I_λ の重複度を記述するような Noether operator と呼ばれる偏微分作用素を構成する。D 加群を用いた理論的な説明に関しては [37]、構成アルゴリズムについては [40]、[48] を参照されたい。ここでの計算結果は3番目のステップで利用される。

次のステップでは、代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ (または τ_F) をその解として持つようなホロノミー D 加群 (線形偏微分方程式系) $M_{F,\lambda}$ (または M_F) を構成する。このアルゴリズムは Z_λ (または Z) が零次元であることを利用して得たものであり、大阿久-高山 [22] あるいは U. Walther [52] によるものとはかなり異なる。アルゴリズムの導出には Grothendieck duality が重要な役割を果たしている。偏微分作用素としての階数が低い方から annihilators を逐次構成していくという方法を取っている。[42] に説明がある。

代数解析の方法を使って、古典的な Noether operators の概念をホロノミー系に拡張した ([38])。3番目のステップでは、[39]、[43] に与えた結果を用いて、ホロノミー D 加群 $M_{F,\lambda}$ に付随する Noether operator の構成を行う。既に構成済みの I_λ に対する Noether operators を利用することで、計算効率を高めてある。ここで、ホロノミー D 加群 M_F を利用して $M_{F,\lambda}$ に付随する Noether operator の構成を行うことも可能である。いずれの方法を用いればより効率的な計算が可能になるかという問題は、入力データのサイズや数学的構造の複雑さにおおきく依存するようなので一概にどちらが優れているかを論じることは出来そうもない。実際アルゴリズムでは、2番目のステップと3番目のステップは交互に平行して逐次計算させることで、計算の負担を減じてある。2番目と3番目のステップを別々に行うと、2番目のステップの終了判定を別途行う必要が出てくるが、両者を交互に平行させることで、ホロノミー D 加群の構成の終了判定も容易になる。

4番目のステップで、代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ の Noether operator 表示を求める。この概念は1999年頃に [45] において導入したもので、[47] には計算法を載せてある。

いま, Noether operator を $T_{F,\lambda}$ とおく. この偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ を用いると, 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ は Z_λ に台をもつデルタ関数 δ_{Z_λ} の偏微分として $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ の形で表すことが出来る. 次に説明するように, 留数計算では $T_{F,\lambda}$ の形式随伴作用素を用いるので, 実際には $T_{F,\lambda}^*$ の形式随伴作用素を構成する. 以上で, 多変数留数計算アルゴリズムの中核部分の説明を終える.

アルゴリズムの出力について述べる前に, 留数計算について説明しよう. いま, $\tau_{F,\lambda} = T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda}$ なる偏微分作用素 $T_{F,\lambda}$ が構成済みであるとしよう. $T_{F,\lambda}$ を用いると, 各点 $\beta \in Z_\lambda$ における代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ のローラン展開が直ちに求まる. 従って原理的にはこの段階で既に留数計算が可能となっている. 実際の留数計算は $T_{F,\lambda}$ の形式随伴作用素を $T_{F,\lambda}^*$ を用いることで次のように行う.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_\beta\left(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}\right) &= \operatorname{res}_\beta\left(\left[\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}\right]\right) \\ &= \operatorname{res}_\beta(\varphi(x)\tau_{F,\lambda}dx) \\ &= \operatorname{res}_\beta(\varphi(x)(T_{F,\lambda}\delta_{Z_\lambda})dx) \\ &= \operatorname{res}_\beta((T_{F,\lambda}^*\varphi)(x)\delta_{Z_\lambda}dx) \\ &= (T_{F,\lambda}^*\varphi)(\beta) \end{aligned}$$

つまり, 形式随伴作用素 $T_{F,\lambda}^*$ を用いると代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda} \in H_{[Z_\lambda]}^n(K[x])$ の線形関数としての作用が具体的に表現できるので, 留数値の計算が実行できる訳である.

最後に多変数留数計算アルゴリズムの出力について説明する. Z_λ を表現する手段として, Z_λ の定義イデアルである \mathfrak{p}_λ のグレブナ基底を用いる. この項順序 \succ は入力データを与える際にあらかじめ指定しておく. Z_λ の各点 β における留数値は, 有理数係数多項式を用いて表現する. つまり, 多変数留数計算アルゴリズムの出力は, 多項式 $r_\lambda(x)$ とグレブナ基底 $\operatorname{gr}_\succ(\mathfrak{p}_\lambda)$ を基本の pair とする l 個の組

$$[r_1(x), \operatorname{gr}_\succ(\mathfrak{p}_1)], [r_2(x), \operatorname{gr}_\succ(\mathfrak{p}_2)], \dots, [r_l(x), \operatorname{gr}_\succ(\mathfrak{p}_l)]$$

で与えられる. ここで, 多項式 $r_\lambda(x)$ は, $T_{F,\lambda}^*\varphi(x)$ のイデアル \mathfrak{p}_λ を法とした(項順序 \succ に関する) Normal Form

$$r_\lambda(x) = \operatorname{NF}_\succ(T_{F,\lambda}^*\varphi(x), \mathfrak{p})$$

である. つまり, $r_\lambda(x)$ は $K[x]/\mathfrak{p}_\lambda$ の項順序 \succ に対する標準基底単項式の K 係数線形結合で表されるような多項式であり次の関係

$$r_\lambda(x) = T_{F,\lambda}^*\varphi(x) \bmod \mathfrak{p}$$

を満たすものである. 求める留数値は, 多変数留数計算アルゴリズムの出力である多項式 $r_\lambda(x)$ により

$$r_\lambda(\beta) = \operatorname{res}_\beta\left(\frac{\varphi(x)dx}{f_1(x)\cdots f_n(x)}\right), \quad \beta \in Z_\lambda$$

と表現される. 多項式 $r_\lambda(x)$ は $K[x]$ に属する有理数係数の多項式であることに注意されたい.

説明の都合上, Noether operator $T_{F,\lambda}^*$ を構成した後に $r_\lambda(x)$ を求めとしたが, 実際には $T_{F,\lambda}^*$ の構成を行わない. $T_{F,\lambda}^*$ の構成を経由せず, ホロノミー D 加群の Noether operator から直接 $r_\lambda(x)$ を構成するようにしてある. これにより計算効率をよくしてある. 以上で, 多変数留数計算アルゴリズムの説明とする.

計算機代数の概念のひとつに shape 基底の概念がある ([3]). イデアル I_λ が shape 基底をもつことが予め分かっているような場合は, ホロノミー D 加群 $M_{F,\lambda}$ の構成や Noether operator $T_{F,\lambda}$ の計算を効率化を図ることができる ([44]). 零次元イデアルは, 多くの場合 shape 基底を持つことが知られているので, この周辺のアルゴリズムの改良・開発をすることは, 利用者の立場から考えて重要であると思う. 今後の課題としたい.

4 ホロノミー D 加群

前の節で紹介した多変数留数計算アルゴリズムで最も重要な働きをしているのは, 代数的局所コホモロジーに付随したホロノミー D 加群である. この節ではこのホロノミー D 加群に関する基本的な事項について述べた後, ホロノミー D 加群が多変数留数計算アルゴリズムの中でどのように用いられているかについて説明する. 具体的な内容にはいる前に, ホロノミー D 加群の概念が導入された経緯について少し触れておきたい.

佐藤幹夫先生は, 1960 年に東京大学数学教室の談話会において線形偏微分方程式系のホモロジー代数的な扱いに関する講演を行われた. そこでは, 偏微分方程式系を偏微分作用素全体がなす非可換環上の加群として捉えるという考え方や偏微分方程式系の解を Hom や Ext 等のホモロジー代数の概念を用いて表現することが可能であること等が述べられ, 今日の D 加群の理論の基本的枠組みが与えられた. これにより, 線形偏微分方程式系そのものが, 数学の対象として intrinsic に扱えるようになった. その後, 柏原正樹の修士論文 (1970 年 12 月) において, 特性多様体の概念, 導来関数を用いた Cauchy 問題の一般的定式化と Cauchy 問題に関する柏原の定理, 導来圏の理論を用いた超関数解の研究等がなされ, D 加群の理論の基礎付けが与えられた. さらに佐藤・河合・柏原による超局所解析学の展開と相まって, 代数解析学が築き上げられた.

一般に, 複素多様体 X 上の D_X 加群 M に対し, X の余接バンドル T^*X 内の variety として, M の特性多様体 $Ch(M)$ を定義することができる. T^*X は自然に symplectic structure を持つが, $Ch(M)$ はその symplectic structure に関し involutive となるので, $\dim Ch(M) \geq \dim X$ が成り立つ. D_X 加群 M の特性多様体 $Ch(M)$ の次元が $\dim Ch(M) = \dim X$ となるような場合, M をホロノミー D_X 加群という. この条件を偏微分方程式の言葉で言い換えれば, 未知関数が満たすべき微分方程式が十分たくさんあるということの意味する. ホロノミー D 加群の最も基本的な特徴として, その解空間の有限次元性があげられる. 佐藤幹夫先生がホロノミー D 加群の概念を導入された背景には, たとえば一変数特殊関数を理解し様々な計算をおこなう際にその特殊関数の満たす常微分方程式を考えることが極め

て有効であるのと同様に、ホロノミー \mathcal{D} 加群を用いることが、対象とする函数や現象を記述したり解析する上で実り多い成果を生むであろう、このような期待や意図があったとされている。柏原正樹先生の著書 [14] の中では、つぎのように述べられている。

「佐藤先生のもともとの考えには、Cauchy の積分定理がその理論的な美しさ・重要性だけでなく、Cauchy の留数公式として多くの定積分の具体的計算を可能にしたと同様に、 \mathcal{D} 加群 (特にホロノミー系の理論) が具体的な計算に役立つだろうという期待があったように思われる。」

さて、多変数留数計算アルゴリズムの中では、まさにこのホロノミー \mathcal{D} 加群が留数計算を行うにあたり中心的な役割を果たしている。以下、ホロノミー \mathcal{D} 加群がどの様に用いられているのかについて、述べたいと思う。

有理数係数多項式を係数とする線形偏微分作用素全体のなす環 $K[x, \frac{\partial}{\partial x}]$ を D_X で表す。 D_X は自然なやり方で、代数的局所コホモロジー $H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x])$ からそれ自身へ作用する:

$$D_X \times H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x]) \longrightarrow H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x]).$$

即ち、代数的局所コホモロジー $H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x])$ は D_X 加群の構造を持つ。

いま、代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda} \in H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x])$ の D_X における annihilator イデアルを $\text{Ann}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ と置く:

$$\text{Ann}_{D_X}(\tau_{F,\lambda}) = \{P \in D_X \mid P\tau_{F,\lambda} = 0\}.$$

さらに、左 D_X 加群 $M_{F,\lambda}$ を $M_{F,\lambda} = D_X / \text{Ann}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ で定める。この D_X 加群 $M_{F,\lambda}$ は \mathcal{Z}_λ に台を持つホロノミー \mathcal{D} 加群であり、各点 $\beta \in \mathcal{Z}_\lambda$ において単純となる。従って、ホロノミー \mathcal{D} 加群 $M_{F,\lambda}$ の代数的局所コホモロジー解のなすベクトル空間 $\text{Hom}_{D_X}(M_{F,\lambda}, H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x]))$ の次元を考えると、

$$\dim_K \text{Hom}_{D_X}(M_{F,\lambda}, H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x])) = \dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$$

となる。これは零点集合 \mathcal{Z}_λ の相異なる点の個数と等しい。

さて、正規列 $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ のヤコビ行列式 $\text{del}\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right)$ を $J_F(x)$ で表し、

$$d_\lambda = \dim_K(K[x]/I_\lambda) / \dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$$

とおく。 \mathcal{Z}_λ に台を持つ delta 関数を $\delta_{\mathcal{Z}_\lambda} \in H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x])$ で表す。

ホロノミー \mathcal{D} 加群 $M_{F,\lambda}$ の代数的局所コホモロジー解のなすベクトル空間の次元は、台 \mathcal{Z}_λ の相異なる点の個数と等しいので、 \mathcal{Z}_λ の各点毎に 1 次元分の条件を課すことで、代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ を完全に特徴付けることができる。実際、次が成立する。

定理 σ は \mathcal{Z}_λ に台を持つ代数的局所コホモロジー類であるとする。この代数的局所コホモロジー類 $\sigma \in H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x])$ はホロノミックな偏微分方程式系 $P\sigma = 0, \forall P \in \text{Ann}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ を満たし、更に条件 $J_F\sigma = d_\lambda\delta_{\mathcal{Z}_\lambda}$ を満たすとする。この時、 $\sigma = \tau_{F,\lambda}$ が成立する。

先程と同様に、代数的局所コホモロジー類 $\tau_F \in H_{[\mathcal{Z}]}^n(K[x])$ の annihilator イデアルを $\text{Ann}_{D_X}(\tau_F)$ と置く:

$$\text{Ann}_{D_X}(\tau_F) = \{P \in D_X \mid P\tau_F = 0\}.$$

対応する左 D_X 加群 M_F を $M_F = D_X/\text{Ann}_{D_X}(\tau_F)$ で定めるとこの D_X 加群 M_{τ_F} は \mathcal{Z} に台を持つホロノミー \mathcal{D} 加群であり、各点 $\beta \in \mathcal{Z}$ において単純となる。

いま、 $P \in \text{Ann}_{D_X}(\tau_F)$ とする。

$$P(\tau_F) = P(\tau_{F,1}) + \cdots + P(\tau_{F,\lambda}) + \cdots + P(\tau_{F,\ell}) = 0$$

が成り立つが、一般に偏微分作用素は local operator であることから、各 $\tau_{F,\lambda}$ は

$$\text{supp}(P(\tau_{F,\lambda})) \subset \text{supp}(\tau_{F,\lambda})$$

をみたす。従って、 $P(\tau_{F,\lambda}) = 0$ が満たされる。この事から次が導かれる。

定理 代数的局所コホモロジー類 $\sigma \in H_{[\mathcal{Z}_\lambda]}^n(K[x])$ はホロノミックな偏微分方程式系 $P\sigma = 0, \forall P \in \text{Ann}_{D_X}(\tau_F)$ と条件 $J_F\sigma = d_\lambda \delta_{\mathcal{Z}_\lambda}$ を満たすとする。この時、 $\sigma = \tau_{F,\lambda}$ が成立する。

いずれにしても、ホロノミー \mathcal{D} 加群を用いることで、 τ_F の直和因子 $\tau_{F,\lambda}$ を完全に特徴付けることができることになる。

話を先に進める前に、ここで一変数の簡単な例を与えておく。

例 一変数多項式 $g(x) = x^2 - 2x - 1$ に対し $\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{C} \mid g(x) = 0\}$ とおき、 \mathcal{Z} に台を持つ代数的局所コホモロジー τ を $\tau = [\frac{1}{f(x)}] \in H_{[\mathcal{Z}]}^1(K(x))$ で定める。ただし $f(x) = g(x)^2$ とした。一変数の場合、局所コホモロジーを考えることは函数の正則部分は零と見做しその特異性だけに注目することに対応するので、代数的局所コホモロジー類 τ は、実質的には、有理関数 $\frac{1}{f(x)}$ の極 $\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$ におけるローラン展開の主要部を意味することになる。

いま、微分作用素 P を $P = g(x)\frac{d}{dx} + 2g'(x)$ で定める。有理関数 $\frac{1}{g(x)^2}$ が $P(\frac{1}{g(x)^2}) = 0$ を満たすことから、 $P(\tau) = 0$ が従う。有理数係数の多項式を係数として持つような常微分作用素全体からなる常微分作用素環 $K[x, \frac{d}{dx}]$ を D_X で表す。次が成り立つ ([19])。

$$\text{Ann}_{D_X}(\tau) = D_X P + D_X g(x)^2.$$

ここで、 $g(x)^2 \in \text{Ann}_{D_X}(\tau)$ となることは、有理関数 $\frac{1}{g(x)^2}$ が 2 点 α, β において高々 2 位の極を持つことに相当する。この微分方程式系は、代数的局所コホモロジー類 τ を完全に特徴付けていることになる。この事を確かめるために、微分方程式を利用することで、 τ の $x = \alpha$ での表現を具体的に求めてみよう。まず、未知係数 a, b を用いて

$$\tau = \left[\frac{a}{(x - \alpha)^2} \right] + \left[\frac{b}{x - \alpha} \right]$$

とおく. 微分方程式 $P(\tau) = 0$ を解くことで, $a = \sqrt{2}b$ を得る. $f'(x) = 2g(x)g'(x)$ を τ に掛けたものが $(x = \alpha$ において) $[\frac{2}{x-\alpha}]$ に等しいことから $a = \frac{1}{8}$ が求まり,

$$\tau = \frac{1}{8}[\frac{1}{(x-\alpha)^2}] + \frac{\sqrt{2}}{16}[\frac{1}{x-\alpha}]$$

を得る. 微分作用素は local operator なので, 微分方程式の解となる代数的局所コホモロジー類を局所的にも完全に特徴付けているのである.

例 $f(x) = x^3(x-1)^2$ とおき, 2点 $Z = \{0, 1\}$ に台を持つような代数的局所コホモロジー類 $\tau = [\frac{1}{f(x)}]$ を考える. 此れに対し, 微分作用素 P を $P = x(x-1)\frac{d}{dx} + 3(x-1) + 2x$ で定めると $P(\frac{1}{f(x)}) = 0$ が成り立つので, 代数的局所コホモロジー類 τ は微分方程式 $P(\tau) = 0$ を満たすことが直ちに分かる. 更に $\text{Ann}_{D_X}(\tau) = D_X P + D_X f(x)$ を得る. ここで, 代数的局所コホモロジー τ の直和分解を取り $\tau = \tau_0 + \tau_1$ とおく. ただし, $\tau_0 \in H_0^1(K(x))$, $\tau_1 \in H_1^1(K(x))$ であるとする. P が常微分作用素であることから $\text{supp}(P(\tau_0)) \subset \text{supp}(\tau_0)$, $\text{supp}(P(\tau_1)) \subset \text{supp}(\tau_1)$ が従うが, $P(\tau) = 0$ なので, $P(\tau_0) = 0$, $P(\tau_1) = 0$ が成り立つ. 先程の例と同様に

$$\tau_0 = [\frac{a_0}{x^3}] + [\frac{b_0}{x^2} + \frac{c_0}{x}], \quad \tau_1 = [\frac{a_1}{(x-1)^2}] + [\frac{b_1}{x-1}]$$

とおき, 微分方程式 $P(\tau_0) = 0$, $P(\tau_1) = 0$ を解けば, 未知係数 a_0, b_0, c_0 および a_1, b_1 の比がそれぞれ一意的に定まる. さらに $f'(x)$ を利用すれば初項 a_0, a_1 が定まり

$$\tau_0 = [\frac{1}{x^3}] + [\frac{2}{x^2}] + [\frac{3}{x}], \quad \tau_1 = [\frac{1}{(x-1)^2}] + [\frac{-3}{x-1}]$$

を得る. ここで有理関数 $\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$ および $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1}$ 自体は

$$P(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}) = 12, \quad P(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-3}{x-1}) = -12$$

となり微分方程式を満たさないことに注意しよう. 代数的局所コホモロジー, 即ち有理関数の特異性のみに注目することで, 数学的取り扱いが容易になり, その特異性の解析に微分方程式を利用できるようになっている.

さて, 多変数留数計算アルゴリズムでは, 上記の定理をもとに計算アルゴリズムを導出している. これから, 何故, これらの定理の結果を用いると留数計算が可能になるのかについて述べる.

多変数留数を扱う問題では, 問題となる留数は多項式を用いて

$$\text{res}_\beta(\frac{\varphi}{f_1 f_2 \cdots f_n} dx)$$

なる形で与えられることが多い。これは、開集合

$$U = X, U_j = \{x \in X \mid f_j(x) \neq 0\}, j = 1, 2, \dots, n$$

による開集合対 $(X, X - Z)$ に対する相対被覆で定められる相対Čech コホモロジーを用いて留数を考えることになる。しかし、この留数の表現の仕方はいわば大域的な表現のみを用いて $\beta \in Z$ における局所的留数を考えることに相当する。この表現式から留数値を直接求めることは、点 $\beta \in Z$ における重複度が2以上の場合は(少なくとも現在に至るまで)不可能である。通常の可換代数の問題で、多項式を用いて大域的に定義されているような対象から局所的な情報を得る必要がある場合は、係数環の拡大等を行い問題を局所化するということが行われる。この可換代数の考え方で多変数留数の値を求めるアルゴリズムを構成することも困難に思える。

これに対し、本研究では係数環を可換環である多項式環 $K[x]$ から非可換環である偏微分作用素環 D_X に拡大することで、この局所化の問題を解決している。偏微分作用素自体は多項式係数の偏微分作用素を考えているので大域的に定義されるものである。しかし、一般に線形偏微分作用素は local operator なので、与えられた代数的局所コホモロジー類 τ_F に対し、 τ_F の満たすホロノミー D 加群を用いると代数的局所コホモロジー類 τ_F を局所的にも完全に統制することが出来るようになる。此のことを用いると、元々は、相対Čech コホモロジー類として与えられていた τ_F を、留数計算に適した形に表現し直すことが出来るようになる。Grothendieck local residues を線形汎函数と捉えると、汎函数としては偏微分作用素として作用する訳だから、代数的局所コホモロジー類を偏微分作用素を用いて表すことで、留数値をアルゴリズム的に求めることが可能になった訳である。ここでその作用を記述するのに用いられる偏微分作用素は $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ の定める零次元イデアルの(注目している点 β での)重複度と当然のことであるが深く関係している。多変数留数計算に Noether operators が用いられるのは、このことによる。Noether operators に関して説明を与えるのはそれほど簡単ではないので、ここでは一変数の場合の具体例をあげることでその有効性を示すにとどめて置く。

例 一変数多項式 $g(x) = x^3 - x - 1$ に対し $Z = \{x \in \mathbb{C} \mid g(x) = 0\}$ とおき、 Z に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $\tau = \left[\frac{1}{(g(x))^3} \right]$ を考える。 $P = g(x) \frac{d}{dx} + 3g'(x)$ とおくと、

$$\text{Ann}_{D_X}(\tau) = D_X P + D_X g(x)^3$$

が成り立つ。 Z に台をもつデルタ函数 δ_Z を $\delta_Z = \left[\frac{g'(x)}{g(x)} \right]$ で定める。代数的局所コホモロジー類 τ は2階の微分作用素 $T \in D_X$ を用いて $\tau = T\delta_Z$ と表すことが出来る。このような表示を τ の Noether operator 表示ということにする。Noether operator T をつぎのように表す。

$$T = \left(-\frac{d}{dx}\right)^2 l_0(x) + \left(-\frac{d}{dx}\right) l_1(x) + l_0(x)$$

微分方程式 $P\tau = 0$ より、 $PT \in \text{Ann}_{D_X}(\delta_Z)$ を得るが $\text{Ann}_{D_X}(\delta_Z) = D_X g(x)$ であることから、 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ の間に成り立つ関係式を得る。また、 $g(x)^2 g'(x)\tau = \delta_Z$ より、

$l_0(x)$ は次を満たすことが従う.

$$2\{g'(x)\}^3 l_0(x) = 1 \pmod{g}.$$

を得る. これらのことから,

$$l_0(x) = (-5x^2 + 3x + 8)/1058,$$

$$t_1(x) = (2280x^2 + 486x - 4360)/12167$$

$$t_2(x) = (155520x^2 - 135300x - 103680)/279841$$

を得る. この微分作用素を使うと, τ は点 $\beta \in \mathcal{Z}$ で

$$\tau = \left[\frac{1}{2} \frac{l_0(\beta)}{(x-\beta)^3} \right] + \left[\frac{l_1(\beta)}{(x-\beta)^2} \right] + \left[\frac{l_2(\beta)}{x-\beta} \right]$$

と表現できることが直ちにわかる.

いま, $\varphi(x) \in K[x]$ を分子とする有理関数 $\frac{\varphi(x)}{g(x)^3}$ が与えられたとする. この有理関数の点 β での留数値は T の形式随伴作用素 $T^* = t_0(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + t_1(x)\frac{d}{dx} + t_2(x)$ を $\varphi(x)$ に作用させて,

$$r(x) = T^*\varphi(x) \pmod{g}$$

とおけば,

$$r(\beta) = \text{res}_\beta \left(\frac{\varphi(x)}{g(x)^3} \right), \beta \in \mathcal{Z}$$

で与えられることになる ([17], [28], [45], [46]).

以上をもって, 多変数留数計算アルゴリズムのなかで, ホロノミー \mathcal{D} 加群がどのように用いられているかについての説明としたい. 多変数の場合は一変数の場合と異なりホロノミー \mathcal{D} 加群を構成するアルゴリズムを必要とする. 本稿では, Noether operator の構成アルゴリズムに関してもホロノミー \mathcal{D} 加群の構成法に関しても触れることができなかった. これらのアルゴリズムについては, [38] [40], [42] 等にその概略を与えてある. 興味のあるかたはそちらを参照されたい.

5 おわりに

本稿で説明した多変数留数計算アルゴリズムの考え方を一変数の場合に適用することで, 有理関数の留数計算アルゴリズムを導出できる. 一変数の場合は, 準素イデアルに付随する Noether operators の構成やホロノミー \mathcal{D} 加群の構成を必要としない. また, 代数的局所コホモロジー類の Noether operator 表示に現れる常微分作用素を構成することが比較的容易にできる. さらに, Noether operator の持つ数学的特性に注目することで, 留数値を効率的に計算するアルゴリズムが構成できる. 一変数有理式の留数計算に関しては数種類のアルゴリズムを導いたが, 本稿で紹介した考え方の基づいて導出したアルゴリズム

は他に比べ圧倒的に計算効率が良いことをここに記しておきたい。一変数留数計算に関しては, [17], [28], [45], [46] を参照されたい。

参考文献

- [1] I. A. Aizenberg and A. P. Yuzhakov: Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis, Transl. of Math. Monographs **58** (1983).
- [2] L. Ehrenpreis : Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience, 1970.
- [3] P. Gianni and T. Mora : Algebraic solution of systems of polynomial equations using Gröbner bases, Springer Lecture Notes in Computer Sciences. **356** (1987), 247–257.
- [4] R. Hartshorne : Residues and duality, Lecture Notes in Math. **20** (1966).
- [5] R. Hartshorne : Local cohomology, Lecture Notes in Math. **41** (1967).
- [6] F. R. Harvey : Integral formulae connected by Dolbeault's isomorphism, Rice Univ. Studies **56** (1970), 77–97.
- [7] P. Griffiths and J. Harris : Principles of Algebraic Geometry. Wiley Interscience , 1978.
- [8] R. Hotta : Introduction to D-Modules, I. M. Sc. Lecture Notes in Math., Madras, India (1987).
- [9] A. Grothendieck : Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Séminaire Bourbaki **149** (1957)
- [10] 金子晃 : 超関数入門 (新版), 東京大学出版会 (1996).
- [11] M. Kashiwara : On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I. Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10** (1975), 563–579.
- [12] M. Kashiwara : On the holonomic systems of linear differential equations, II, Inventiones Math., **49** (1978), 121–135.
- [13] M. Kashiwara : Algebraic study of systems of partial differential equations, Mémoires de la Société Mathématique de France **63** (1995) (1970年12月, 修士論文の英訳).
- [14] 柏原正樹 : 代数解析概論, 岩波書店 (2000).
- [15] 柏原正樹, 河合隆裕, 木村達雄 : 代数解析の基礎, 紀伊国屋書店 (1980).
- [16] 加藤五郎 : コホモロジーのころ, 岩波書店 (2003).
- [17] 加藤涼香, 田島慎一 : 有理関数のローラン展開アルゴリズムと代数的局所コホモロジー, 京都大学数理解析研究所講究録 **1395** 「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」 (2004), 50–56.
- [18] J. Lipman : Lectures on local cohomology and duality, in Lecture Notes in Pure and Applied Math. **226**, Dekker (2002), 39–89.

- [19] S. Tajima and Y. Nakamura : Residue calculus with differential operators, *Kyushu J. of Mathematics* **54** (2000), 127–138.
- [20] Y. Nakamura and S. Tajima : A method for constructing holonomic systems for algebraic local cohomology classes with support on a zero-dimensional variety, in *Mathematical Software*, World Scientific (2002), 158–168.
- [21] M. Noro and T. Takeshima : Risa/Asir - a computer algebra system, in *Proc. Internat. Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, eds. by P. S. Wang, ACM (1992), 387–396, <http://www.openxm.org/>.
- [22] T. Oaku and N. Takayama : Algorithms for D-modules - restriction, tensor product, localization, and local cohomology groups, *J. Pure and Appl. Algebra* **156** (2001), 267–308.
- [23] U. Oberst : The construction of Noetherian operators, *J. of Algebra* **222** (1999), 595–620.
- [24] M. Sato : Theory of hyperfunction II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **8** (1960), 387–437.
- [25] 佐藤幹夫 : 超函数と層 C をめぐって, *京都大学数理解析研究所講究録* **126** (1971).
- [26] 佐藤幹夫 : Microlocal calculus I, *京都大学数理解析研究所講究録* **226** 「代数解析とその応用」 (1975), 114–166.
- [27] T. Shimoyama and K. Yokoyama : Localization and primary decomposition of polynomial ideals, *J. Symbolic Computations* **22** (1996), 247–277.
- [28] 庄司卓夢, 田島慎一 : 高速留数計算アルゴリズム, *京都大学数理解析研究所講究録* **1456** 「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」 (2005), 133–143.
- [29] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura : Multidimensional local residues and holonomic D-modules, *京都大学数理解析研究所講究録* **1033** 「特異点と複素解析幾何」 (1998), 59–70.
- [30] 田島慎一 : 多変数補間問題とホロノミック D-加群, *千葉大学数学講究録* **3** 「代数解析学の諸問題」 (1999), 73–94.
- [31] 田島慎一, 中村弥生 : D-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, *数式処理* **7** (1999), 2–10.
- [32] 田島慎一 : Grothendieck duality の計算と多変数 Hermite 補間問題, *京都大学数理解析研究所講究録* **1085** 「数式処理における理論と応用の研究」 (1999), 82–90.
- [33] 田島慎一 : 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と I. Ehrenpreis の Noether 作用素, *京都大学数理解析研究所講究録* **1138** 「数式処理における理論と応用の研究」 (2000), 87–95.
- [34] 田島慎一 : 偏微分作用素を用いた多変数留数計算アルゴリズムと中国剰余定理, *京都大学数理解析研究所講究録* **1199**, 「数式処理における理論と応用の研究」 (2001), 51–69.
- [35] 田島慎一 : Algorithms for computing Grothendieck local residues, *京都大学数理解析研究所講究録* **1233**, 「特異点と Newton 図形」 (2001), 67–81.
- [36] S. Tajima : Exponential polynomials and the Fourier-Borel transforms of algebraic local cohomology classes, in *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis*, eds by T. Kawai and K. Fujita, World Scientific (2002), 284–296.

- [37] 田島慎一：零次元イデアルのネター作用素について，京都大学数理解析研究所講究録掲載予定.
- [38] 田島慎一：確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解，京都大学数理解析研究所講究録 **1336** 「双曲型方程式と非正則度」(2003), 121-132.
- [39] 田島慎一，中村弥生：Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析，京都大学数理解析研究所講究録 **1352** 「再生核の理論の応用」(2003), 1-10.
- [40] 田島慎一：零次元準素イデアルとネター作用素アルゴリズム，京都大学数理解析研究所講究録 **1395** 「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2004), 57-63.
- [41] S. Tajima and Y. Nakamura : Computational aspects of Grothendieck local residues, Séminaire et Congrès **10**, Singularités Franco-Japonaises, Société Mathématique de France (2005), 287-305.
- [42] 田島慎一，中村弥生：零次元代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック D_X -加群，京都大学数理解析研究所講究録 **1412** 「超局所解析の展望」(2005), 189-198.
- [43] 田島慎一：Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム，京都大学数理解析研究所講究録 **1431** 「超局所解析とその周辺」(2005), 123-136.
- [44] S. Tajima : On Noether differential operators attached to a zero-dimensional primary ideal -a shape basis case-, in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, ed. by H. Kazama, M. Morimoto and C.-C. Yang, Kyushu Univ. Press (2005), 357-366.
- [45] 田島慎一：Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality, 京都大学数理解析研究所講究録 **1509** 「積分核の代数解析的研究」(2006), 1-23.
- [46] 田島慎一：一変数留数計算アルゴリズムについて，京都大学数理解析研究所講究録 **1509** 「積分核の代数解析的研究」(2006), 24-50.
- [47] 田島慎一：剰余体 $K[x]/\langle f \rangle$ における逆冪計算，京都大学数理解析研究所講究録 **1514** 「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2006), 171-176.
- [48] S. Tajima : Noetherian differential operators associated to a zero-dimensional variety and exponential polynomial solutions, preprint.
- [49] N. Takayama : kan/sml: a computer algebra system for algebraic analysis, <http://www.sci.kobe-u.ac.jp/KAN/>
- [50] A. K. Taikh : Multidimensional Residues and Their Applications, Trans. of Math. Monographs **103** (1992).
- [51] Y.L. Tong : Integral representation formulae and Grothendieck residue symbol, Amer. J. Math., **95** (1973), 904-917.
- [52] U. Walther : Algorithmic computation of local cohomology modules and the local cohomological dimension of algebraic varieties, J. Pure and Appl. Algebra **139** (1999), 303-321.