数理解析研究所講究録
1534巻 2007年 14-23

ポパの剛性理論の解説

名古屋工業大学 林 倫弘 (Tomohiro Hayashi)
Nagoya Institute of Technology

1. 序

このノートの目的は、近年ポパによって構築された剛性理論の一端を解説することです ([1][2][3][4])。驚くべき結果が多数得られていますが、基本的に全て同じテクニックによって証明されています。急いで書いたので多々間違いがあるかもしれません。また致命的な勘違いをしているかもしれませんがお許しください。また、以前数理研講究録に出された植田さんによる解説文とも、重複が多数あることをご了承ください。引用している文献以外にもポパはたくさん結果を得ていますが、それらはこの4つの論文の文献表から辿っていけます。

2. 剛性定理の証明の概略

最初に記号をいくつか導入する。フォンノイマン環Mに対し、$(M)_1$はそのノルム1以下の元全体、$\mathrm{Aut}(M), U(M)$はそれぞれ自己同型群、ユニタリ群を表す。フォンノイマン環の上には、常にひとつのfaithful normal tracial state τが固定されている。$||x||_2=\tau(x^*x)^{1/2}$で2-ノルムを定め、このノルムで完備化して得られるヒルベルト空間を$L^2(M)$で表す。フォンノイマン部分環$A\subset M$に対し、条件付期待値をE_Aと書く。E_Aは、$L^2(M)$から$L^2(A)$への射影e_AをMに制限したものである。ジョーンズの指数理論で有名な事実、$\{e_A\}'\cap M=A$を思い出し

ておく。交換子を $[x,y]=xy-yx$ で表す。離散群 G に対し、その群フォンノイマン環を $L(G)$ で表す。G が M に作用している時、自然に $L(G)\subset M\rtimes G$ と思える。$M_n(\mathbb{C})$ で $n\times n$ 行列環を表す。テンソル積 $M\otimes N$ は、全てフォンノイマン環としてのテンソル積である。群の性質Tを使いますが、使うときに説明します。

まず、次のベルヌーイ作用による接合積の、群環の一意性定理を紹介する。

Theorem 2.1. [1] *G, H を性質 T をもつ ICC 離散群とする。もし、ベルヌーイ作用による接合積で出来る二つの II_1 因子環が同型*

$$(\otimes_G M_n(\mathbb{C}))\rtimes G\simeq(\otimes_H M_n(\mathbb{C}))\rtimes H$$

であったら、この同型を、$L(G)$ が $L(H)$ に移るように取り直せる。

証明のために、次の良く知られた補題を準備する。(平均をとって intertwiner を作るテクニック。)

Lemma 2.2. 部分環 $A\subset M$, $\alpha\in\mathrm{Aut}(M)$ が

$$\sup_{a\in(A)_1}||a-\alpha(a)||_2<\frac{1}{2}$$

を満たしているとする。この時、ある 0 でない部分等距離写像 $v\in M$ が存在して、全ての $a\in A$ に対して $va=\alpha(a)v$ を満たす。

Proof.

$$K=\overline{co}^{||\cdot||_2}\{u^*\alpha(u)|\ u\in U(A)\}$$

(凸包の2-ノルム閉包) と置くと、K はヒルベルト空間 $L^2(M)$ の凸閉部分集合であるから、ある $x_0\in K$ が一意的に存在して、$||x_0||_2\leq||x||_2$ を満たす。一意性

より全ての $u \in U(A)$ に対して $u^* x_0 \alpha(u) = x_0$ が従う。ここで $\|u^*\alpha(u) - 1\|_2 = \|\alpha(u) - u\|_2 < \frac{1}{2}$ より、$1 - \|x_0\|_2 \leq \|x_0 - 1\|_2 \leq \frac{1}{2}$ となるので、$x_0 \neq 0$. x_0 を極分解して結論を得る。 $\square$

定理の証明のために、いくつか記号を準備する。

$$\tilde{N} = N \otimes N = (\otimes_G M_n(\mathbb{C})) \otimes (\otimes_G M_n(\mathbb{C}))$$

と置く。

$$G \ni g \mapsto \sigma_g \otimes \sigma_g$$

によって、G は $\tilde{N}$ に作用する。二つの包含関係

$$N \subset N \rtimes_\sigma G, \quad (N \otimes 1) \subset (N \otimes 1) \rtimes_{\sigma \otimes \sigma} G$$

を同一視する。

Proof of Theorem 2.1.

$$M = (\otimes_G M_n(\mathbb{C})) \rtimes G = (\otimes_H M_n(\mathbb{C})) \rtimes H$$

となっていると仮定する。(同型写像の存在が仮定されているので、一方を写しておくということ。) $P = L(H)$ と置く。また、$\tilde{M} = \tilde{N} \rtimes_{\sigma\otimes\sigma} G$ と置く。目標は、ユニタリ $w \in M$ が存在して $wPw^* \subset L(G)$ となることをを示すことである。

flip 自己同型写像 $\theta \in \mathrm{Aut}(M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}))$, $\theta(x \otimes y) = y \otimes x$ をとる。有限次元環なので、$\theta = \mathrm{Ad}u$, $u \in (M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}))$, $u = e^{ih}$ $(h \geq 0)$ とできる。そこで $\theta_t = \mathrm{Ad}e^{ith}$, $\alpha_t = \otimes_G \theta_t$ と置くと、$\alpha_t \in \mathrm{Aut}(\tilde{N})$ となり、さらに

$$\begin{cases} \alpha_1(N \otimes 1) & = \alpha_1(1 \otimes N) \\ \alpha_t(\sigma_g \otimes \sigma_g) & = (\sigma_g \otimes \sigma_g)\alpha_t \end{cases}$$

を満たす。（これはポパの言葉を用いれば、ベルヌーイ作用がマリアブルということである。）α は G の作用と可換なので、$L(G)$ の元を動かさないように $\tilde{M}$ 全体に自己同型として拡張される。（当然 $P = L(H)$ の元は動く。）

α_t は $t \to 0$ の時、2-ノルムで恒等写像に各点収束するから、P が性質 T を持つことより、

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in (P)_1} ||x - \alpha_t(x)||_2 = 0$$

が成立する（このように各点収束から一様収束が出るのが性質 T)。したがって先ほどの補題より、t が十分小さい時、ある $v \in \tilde{M}$ が存在して

$$va = \alpha_t(a)v$$

を満たす。任意のユニタリ $u \in \tilde{M}$ に対して $v' = \alpha_t(\alpha_t(u)vu^*)v$ と置くと、直接の計算で

$$v'a = \alpha_{2t}(a)v'$$

がわかる。これを繰り返して、ある $w \in \tilde{M}$ が存在して

$$wa = \alpha_1(a)w$$

を満たすことがわかる。ここで重要なのは、この作り方では w が 0 かもしれないことである。しかし、ある種の relative commutant theorem を証明することで、$w \neq 0$ となるようにうまくユニタリ $u \in \tilde{M}$ を選んでいくことができる。ここは簡単ではありません。詳しくは原論文参照。さらに少し考察すると、$w \in M$ としてよいことがわかる。（ここはそんなに難しくないが略。）すると、全ての $a \in P$

に対して

$$
\begin{aligned}
w^* e_{\alpha_1(M)} w a &= w^* e_{\alpha_1(M)} \alpha_1(a) w \\
&= w^* \alpha_1(a) e_{\alpha_1(M)} w \\
&= a w^* e_{\alpha_1(M)} w
\end{aligned}
$$

と計算できる。ここで、$e_{\alpha_1(M)}|_{L^2(M)} = e_{L(G)}$ (つまり $E_{\alpha_1(M)}|_M = E_{L(G)}$) となっていることが簡単にわかるので、$w^* e_{L(G)} w \in P'$, つまり $wPw^* \in \{e_{L(G)}\}' \cap M = L(G)$ が言える。(w はユニタリではないので、本当は少し議論が要ります。) □

次に、Ge によって証明され、小沢さんによって拡張された次の定理の、ポパによる別証明を紹介します。

Theorem 2.3. [3] $L(\mathbb{F}_n)$ は *prime.* すなわち、任意の II_1 型因子環 Q, A に対して、$L(\mathbb{F}_n) \not\cong Q \otimes A$.

証明は、先の定理と同様、$\mathbb{R}$-作用 α と、ある剛性を用いてなされる。ここで問題となるのは、$L(\mathbb{F}_n)$ は性質 T を持つ部分環を、有限次元環以外持ち得ないことである。つまり性質 T はつかえない。しかし以下の二つの補題がその代わりを果たす。

Lemma 2.4. フォンノイマン環 N とその部分環 Q を考える。Q を自由積フォンノイマン環 $M = N * P$ の部分環とみなす。もし Q がアメナブルな直和成分を持たないなら、$Q' \cap M^\omega \subset N^\omega$

ひとつ注意であるが、ポパの orthogonal pair の論文をご存知の方（あるいはそれ以外の人）は、この補題は Q に条件が無くても成立すると思うかもしれない。自由積は非可換性が強いので、この補題は当然に思える。実際、Q が原始的でない時は、$Q' \cap M \subset N$ はいつでも成立する。しかし、今は ultraproduct を考えているので状況は全く異なる。実は、$Q' \cap M^\omega \subset N^\omega$ が成立すると、逆に Q がアメナブルな直和成分を持たないことが示される。

Proof. 背理法で示す。結論を否定すると、$\{x_n\}_n \in Q' \cap M^\omega \setminus \{0\}$ が存在して $E_N(x_n) = 0$, つまり $x_n \in L^2(N * P) \ominus L^2(N)$ を満たす。ここで、N-N 両側加群として、

$$
\begin{aligned}
L^2(N * P) \ominus L^2(N) &= (L^2(N) \text{ 以外の語}) \\
&\simeq (L^2(N) \otimes l^2(\mathbb{N})) \otimes (L^2(N) \otimes l^2(\mathbb{N}))
\end{aligned}
$$

となることがわかるので (Voiculescu の本参照)、各 $a \in L^2(N * P) \ominus L^2(N)$ は、ヒルベルト空間 $L^2(N) \otimes l^2(\mathbb{N})$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素と思える。（以下の議論には、N-N 両側加群として同一視できると言う事実のみが必要であって、同一視を与えるユニタリの形はいらない。N-N 両側加群は Q-Q 両側加群でもあることに注意。）

任意の $u \in U(Q)$ に対して

$$||ux_nu^* - x_n||_{HS} = ||ux_nu^* - x_n||_2 \to 0$$

となることを用いると、各 $T \in B(L^2(N) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ に対して、

$$\begin{aligned}\langle Tux_nu^*, x_n\rangle_{HS} &= Tr(x_n^*Tux_nu^*)\\ &\fallingdotseq Tr(x_n^*Tx_n)\end{aligned}$$

となる。これは $\phi(\cdot) = \lim_{n\to\omega}\langle\cdot x_n, x_n\rangle_{HS}$ が Q-hypertrace となることを意味する。Connes の定理より、$Q \subset N * P$ がアメナブルな直和成分を持たないことに矛盾。(あるいは、x_n が $(L^2(N) \otimes l^2(\mathbb{N})) \otimes (L^2(N) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ のベクトルで、左右の Q 作用と近似的に可換なので、$Q \otimes Q$ 上の flip map の近似的な intertwiner なのでやはり Connes の定理よりアメナブルと言ってもいいです。同じことですが。) □

Lemma 2.5. $Q' \cap M^\omega \subset N^\omega$ ならば、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、以下を満たす；ある有限集合 $F \subset Q$ が存在して $x \in M$ が任意の $q \in F$ に対して $||[x, q]||_2 < \delta$ を満たすならば、$||x - E_N(x)||_2 < \epsilon$ が成立。

Proof. 対偶が簡単に証明できます。 □

Proof of Theorem 2.3. ふたつの II_1-factor$Q$, A が存在して、

$$N = L(\mathbb{F}_n) = Q \otimes A$$

となったと仮定して、矛盾を導く。

$M = N * N$ と置く。M 上には、$\mathbb{R}$-action α が存在して、$\alpha_1(x * y) = y * x$ を満たすことが知られている。N と $N * 1$ を同一視し、Q, A を $N * 1$ の部分環と見なす。(もちろん M の部分環でもある。)

Q は AFD ではないので、補題より $Q' \cap M^\omega \subset N^\omega$、すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、以下を満たす；ある有限集合 $F \subset Q$ が存在して $x \in M$ が任意の $q \in F$ に対して $||[x, q]||_2 < \delta$ を満たすならば、$||x - E_N(x)||_2 < \epsilon$ が成立する。

$\alpha_t \to id$ $(t \to 0)$ と 2-ノルムで各点収束するので、各 $q \in F$ に対し、

$$||[\alpha_t(a), q]||_2 = ||[a, \alpha_{-t}(q)]||_2$$

は $a \in (A)_1$ について一様に 0 に収束する。したがって、t が十分小さい時、全ての $a \in (A)_1$ に対して、

$$||\alpha_t(a) - E_N(\alpha_t(a))|| < \epsilon$$

が成立する。ここで、

$$||\alpha_t(a) - E_N(\alpha_t(a))|| = ||a - E_{\alpha_{-t}(N)}(a)||_2$$

であるから、Christensen のテクニックを用いると、ある 0 でない部分等距離写像 $v \in M$ が取れて、$vAv^* \subset \alpha_{-t}(N)$ を満たす。この操作をどんどん続けていって、0 でない部分等距離写像 $w \in M$ が取れて、$wAw^* \subset \alpha_1(N) = 1 * N$ を満たすようにできる。(ここは、ベルヌーイ作用の群環の一意性の証明と同じで、$w \neq 0$ となるようにするのは簡単ではない。) ところが、ポパの orthogonal pair テクニックによれば、このような w は必ず 0 にならねばならない (diffuse な環を、その orthogonal な部分に移す intertwiner は 0 しかない)。よって矛盾。 $\square$

最後に、つい最近ポパによって示された、ベルヌーイ作用による接合積の、群環の一意性定理を紹介する。この定理では、驚くべきことに性質Tが仮定されていない。

Theorem 2.6. [4] G_1, G_2, H_1, H_2 は全てアメナブルではない ICC 離散群とする。そして $G = G_1 \times G_2$, $H = H_1 \times H_2$ と置く。(性質 T は仮定しなくて良い)

もし、ベルヌーイ作用による接合積で出来る二つの II_1 因子環が同型

$$(\otimes_G M_n(\mathbb{C})) \rtimes G \simeq (\otimes_H M_n(\mathbb{C})) \rtimes H$$

であったら、この同型を、$L(G)$ が $L(H)$ に移るように取り直せる。

証明は性質Tのケースとほぼ同様である。問題は性質Tがないため、他の方法で写像の一様収束性を導き出さねばならない。ポイントは、ベルヌーイ作用はだいたい群の正規表現と同じようなものであること。そして、アメナブルでない群の正規表現は、剛性を持つことである(almost invariant vector は0しかない。)以下、記号は性質Tの時と同じものを使う。

Lemma 2.7. $Q \subset M$ がアメナブルな直和成分を持たないとする。この時、$Q' \cap \tilde{M}^\omega \subset M^\omega$ が成立する。すなわち、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、以下を満たす；ある有限集合 $F \subset Q$ が存在して $x \in \tilde{M}$ が任意の $q \in F$ に対して $||[x, q]||_2 < \delta$ を満たすならば、$||x - E_M(x)||_2 < \epsilon$ が成立。

Proof. 結論を否定すると、$\{x_n\}_n \in Q' \cap \tilde{M}^\omega \setminus \{0\}$ が存在して $E_M(x_n) = 0$、つまり $x_n \in L^2(\tilde{M}) \ominus L^2(M)$ を満たす。ここで、M-M 両側加群として $L^2(\tilde{M}) \ominus L^2(M) \prec L^2(M) \otimes L^2(M)$. となっていることが証明できる。あとは自由群フォンノイマン環の prime の証明と同様、Hilbert-Schmidt 作用素を用いて Connes の定理を使って結論を得る。 □

この補題が性質 T の代わりに使えて、定理が証明される（本当は、もうひと苦労必要だが略)。ここで $L(\mathbb{F}_n)$ が prime であることの証明を思い出すと、Q と可換である環 A 上で、ある写像の一様収束が証明できていた。これが、$G = G_1 \times G_2$ と直積の形になっていなければならない理由である。$Q = L(G_1)$ として上の補題を適用し、$L(G_2)$ 上での剛性を得るのである。

Monod と Shalom の軌道同値に関する剛性定理でも、群が直積の形であることが仮定されている。関連があるのかもしれないが、よくわかりません。少なくとも証明は全くことなります。確かポパ本人も、関連があるかもしれないがよくわからないと書いていたと思います。

References

[1] S. Popa, *Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w-rigid groups, I*, preprint.

[2] _____, *Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w-rigid groups, II*, preprint.

[3] _____, *On Ozawa's Property for Free Group Factors* , preprint.

[4] _____, *On the Superrigidity of Malleable Actions with Spectral Gap*

E-mail address: hayashi.tomohiro@nitech.ac.jp