数理解析研究所講究録
第 1543 巻 2007 年 97-107

界面孤立波の横方向不安定性

神戸大学・工学部・機械工学科　片岡　武 (Takeshi Kataoka)
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering
Kobe University

1. 目的

二層流体中を伝播する界面孤立波について，横方向撹乱（孤立波の峰方向にも依る撹乱）に対する線形安定性を Euler 方程式系を基に調べ，次のことを示す：孤立波解の解の枝を小振幅からたどっていくと，対応する孤立波解は，進行方向撹乱に対して安定性交換する前に必ず横方向撹乱に対して不安定となる．

2. 問題設定と基礎方程式

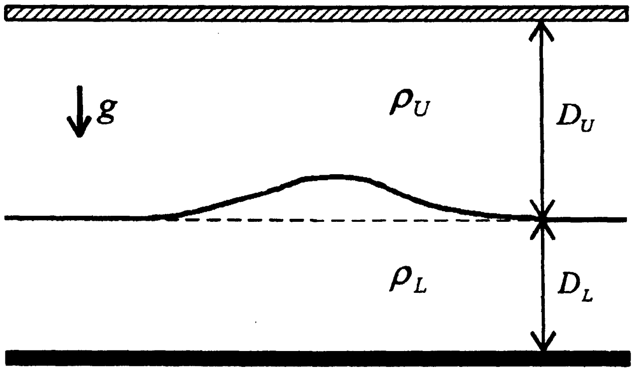

図 1 二層流体の概略図

一様な重力加速度gが働く系において，無限に広い 2 枚の水平平板により挟まれた非圧縮性完全流体を考える．この流体はそれぞれが均質な互いに密度の異なる 2 流体が重なり合って構成され，上層の流体は密度ρ_Uで平均深さがD_U，下層の流体は密度$\rho_L(>\rho_U)$で平均深さがD_Lであるとする（図 1 参照）．これ以降，変数はすべてg，D_L，ρ_Lにより無次元化したものを使う．解析の便宜上，これら 2 層の境界面（界面）の平均深さが$z=0$にあるものとしよう。つまり下板と上板がそれぞれ$z=-1$と$z=D(\equiv D_U/D_L)$にあることになる．そして水平方向にx，y座標をとったときの$x-y-z$空間 3 次元流れを考えよう．界面を除く各層内の流れは渦なしであると仮定すれば，上層，下層の流体に対してそれぞれ速度ポテンシャル$\phi_U(x,y,z,t)$（tは時間），$\phi_L(x,y,z,t)$を導入でき、連続の式よりそれぞれが Laplace 方程式：

$$\frac{\partial^2\phi_U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi_U}{\partial z^2}=0 \quad \text{for} \quad \eta<z<D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\phi_L}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_L}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi_L}{\partial z^2}=0 \quad \text{for} \quad -1<z<\eta, \tag{2}$$

を満たさなければならない．境界条件は，$\eta(x,y,t)$を界面の鉛直変位とすると，

$$\frac{\partial\phi_U}{\partial z}=0 \quad \text{at} \quad z=D, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial \phi_U}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \phi_U}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial \phi_U}{\partial z} \quad \text{at} \quad z=\eta, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial \phi_L}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \phi_L}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial \phi_L}{\partial z} \quad \text{at} \quad z=\eta, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&-\rho\left\{\frac{\partial \phi_U}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi_U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_U}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\\ &+\frac{\partial \phi_L}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi_L}{\partial z}\right)^2\right]+(1-\rho)\eta=f(t)\end{aligned} \quad \text{at} \quad z=\eta, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial z}=0 \quad \text{at} \quad z=-1, \tag{7}$$

ただし，$f(t)$は(6)の左辺を$x \to \infty$で評価した値であり，

$$\rho=\rho_U/\rho_L, \quad D=D_U/D_L, \tag{8}$$

はそれぞれ二層流体の密度比と深さ比である．

方程式系(1)-(7)の解として次の形のものを考える：

$$\phi_U=-vx+\Phi_U(x,z), \quad \phi_L=-vx+\Phi_L(x,z), \quad \eta=\eta_I(x), \tag{9}$$

ただし$\partial\Phi_U/\partial x$，$\partial\Phi_U/\partial z$，$\partial\Phi_L/\partial x$，$\partial\Phi_L/\partial z$，$\eta_I$はいずれも$x \to \pm\infty$で零に近づき，$v$は正のパラメータ．この解は，空間的に局所的な変動がその形を崩すことなく一定速さvで伝播する現象を，その変動とともに動く座標系で眺めたものである．局所的な変動が伝播する現象を表すこの解(9)のことを，孤立波解と呼ぼう．孤立波解の存在は様々なパラメータ値ρ，D，vに対して数値的に示されている (Funakoshi & Oikawa 1986; Pullin & Grimshaw 1988; Turner & Vanden-Broeck 1988; Evans & Ford 1996; Laget & Dias 1997; Michallet & Barthēlemy 1998; Grue *et al.* 1999)．解が存在するとき，$x \to \pm\infty$への減衰は指数関数的であり，不等式：

$$v>c, \tag{10a}$$

が成り立つ．ただし

$$c=\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho/D}} \tag{10b}$$

は線形長波長波の伝播速さである．

いま，この孤立波解(9)の線形安定性を調べる．そのため(1)-(7)の解を孤立波解(9)と微小擾乱との和で

$$\phi_U=-vx+\Phi_U+\hat{\phi}_U(x,z)\exp(\lambda t+\mathrm{i}\varepsilon y), \tag{11a}$$

$$\phi_L=-vx+\Phi_L+\hat{\phi}_L(x,z)\exp(\lambda t+\mathrm{i}\varepsilon y), \tag{11b}$$

$$\eta=\eta_I+\hat{\eta}(x)\exp(\lambda t+\mathrm{i}\varepsilon y), \tag{11c}$$

とあらわす．ここにλは未知の複素定数，εは与えられた正定数（擾乱のy方向波数）．もしλが正の実部をもつような解があれば，その孤立波は不安定である．y方向に依存性のない擾乱($\varepsilon=0$)に対する安定性は過去に調べられており(Kataoka 2006)，次に示す孤立波のエネルギー$E(v)$：

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\rho}{2}\int_{\eta_I}^{D}\left[\left(\frac{\partial \Phi_U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_U}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\int_{-1}^{\eta_I}\left[\left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}z+\frac{1-\rho}{2}\eta_I^2\right\}\mathrm{d}x, \tag{12}$$

がvに関して停留値となるところで（つまり$\mathrm{d}E/\mathrm{d}v=0$のときに）安定性交換が起きることが

知られている．また安定性交換の起きる臨界点周り($|\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu| << 1$)において，固有値$\lambda$が

$$\lambda=\begin{cases}0,\pm\left(\nu\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu} & \text{when } \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu}>0,\\ 0 & \text{when } \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu}<0,\end{cases} \tag{13}$$

となる．ただし，

$$\Omega=\frac{2}{\nu}\left(T_L-\frac{T_U}{D}\right)-\left(1+\frac{\rho}{D}\right)\nu M,\quad M=\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I\,\mathrm{d}x, \tag{14a,b}$$

$$T_U=\frac{\rho}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{\eta_I}^{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_U}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}z,\quad T_L=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-1}^{\eta_I}\left[\left(\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_L}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}z. \tag{14c,d}$$

は孤立波の特性を表す量であり，とくにMは質量，T_Uは上層流体の運動エネルギー，T_Lは下層流体の運動エネルギーである．

本研究では横方向安定性，つまりy方向に依存性をもつ擾乱($\varepsilon>0$)に対する安定性を調べる．(11a-c)を(1)-(7)に代入し，$(\hat{\phi}_U,\hat{\phi}_L,\hat{\eta})$に関して線形化し，$x$に関して局所的であるという条件を課すと，$(\hat{\phi}_U,\hat{\phi}_L,\hat{\eta})$に対する以下の線形方程式系が得られる：

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}_U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}_U}{\partial z^2}=\varepsilon^2\hat{\phi}_U \quad \text{for } \eta_I<z<D, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}_L}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}_L}{\partial z^2}=\varepsilon^2\hat{\phi}_L \quad \text{for } -1<z<\eta_I, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}_U}{\partial z}=0 \quad \text{at } z=D, \tag{17}$$

$$\mathbf{L}_\mathrm{U}[\hat{\phi}_U,\hat{\eta}]=-\lambda\hat{\eta} \quad \text{at } z=\eta_I, \tag{18}$$

$$\mathbf{L}_\mathrm{L}[\hat{\phi}_L,\hat{\eta}]=-\lambda\hat{\eta} \quad \text{at } z=\eta_I, \tag{19}$$

$$\mathbf{L}_\mathrm{I}[\hat{\phi}_U,\hat{\phi}_L,\hat{\eta}]=\lambda(\rho\hat{\phi}_U-\hat{\phi}_L) \quad \text{at } z=\eta_I, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}_L}{\partial z}=0 \quad \text{at } z=-1, \tag{21}$$

$$\hat{\phi}_U(x,z)\to 0,\ \hat{\phi}_L(x,z)\to 0,\ \hat{\eta}(x)\to 0 \quad \text{as } x\to\pm\infty. \tag{22}$$

ここに$\mathbf{L}_\mathrm{U}$，$\mathbf{L}_\mathrm{L}$，$\mathbf{L}_\mathrm{I}$は次式で定義される線形作用素である．

$$\mathbf{L}_\mathrm{U}[\hat{\phi}_U,\hat{\eta}]=\left(-\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\mathrm{d}\eta_I}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\phi}_U+\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_U}{\partial x\partial z}\frac{\mathrm{d}\eta_I}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-\nu+\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\hat{\eta}, \tag{23a}$$

$$\mathbf{L}_\mathrm{L}[\hat{\phi}_L,\hat{\eta}]=\left(-\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\mathrm{d}\eta_I}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\phi}_L+\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_L}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_L}{\partial x\partial z}\frac{\mathrm{d}\eta_I}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-\nu+\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\hat{\eta}, \tag{23b}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_\mathrm{I}[\hat{\phi}_U,\hat{\phi}_L,\hat{\eta}]=&-\rho\left[\left(-\nu+\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_U}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right]\hat{\phi}_U+\left[\left(-\nu+\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_L}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right]\hat{\phi}_L\\&+\left\{-\rho\left[\left(-\nu+\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\Phi_U}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\Phi_U}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi_U}{\partial z^2}\right]+\left(-\nu+\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\Phi_L}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\Phi_L}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi_L}{\partial z^2}+1-\rho\right\}\hat{\eta}.\end{aligned} \tag{23c}$$

方程式系(15)-(22)は，λを固有値とする固有値問題である．もし，零でないεに対してλが正の実部をもつような解が１つでもあれば，その孤立波は横方向に不安定である．

3. 漸近解析

$\varepsilon=0$のとき，(15)-(22)は次の解をもつ：

$$\hat{\phi}_U=\hat{\phi}_{UC}^{(0)}\equiv\frac{\partial\Phi_U}{\partial x},\quad \hat{\phi}_L=\hat{\phi}_{LC}^{(0)}\equiv\frac{\partial\Phi_L}{\partial x},\quad \hat{\eta}=\hat{\eta}_C^{(0)}\equiv\frac{\mathrm{d}\eta_I}{\mathrm{d}x},\quad \lambda=0. \tag{24}$$

この定常解（$\lambda=0$だから）は，εが小さいながらも０でない値をもつときは，εを含む項の影響により緩やかに時間発展するであろう．その時間発展の時間スケールが$O(\varepsilon^{-1})$と$O(\varepsilon^{-2})$で表されると仮定し，

$$\lambda=\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2, \tag{25}$$

と置き，(15)-(22)の解の$\varepsilon\to0$の漸近的振舞を調べよう．

3.1. 近接場の解

$x\to\pm\infty$における境界条件(22)はさておき，(15)-(21)の解のうち，x，zに関して単位量の範囲で有意の変化[$\partial\hat{\phi}_U/\partial x=O(\hat{\phi}_U)$，$\partial\hat{\phi}_U/\partial z=O(\hat{\phi}_U)$，$\partial\hat{\phi}_L/\partial x=O(\hat{\phi}_L)$，$\partial\hat{\phi}_L/\partial z=O(\hat{\phi}_L)$，$\mathrm{d}\hat{\eta}/\mathrm{d}x=O(\hat{\eta})$]をするものを次のような$\varepsilon$の冪級数の形で求める：

$$\hat{\phi}_{UC}=\hat{\phi}_{UC}^{(0)}+\varepsilon\hat{\phi}_{UC}^{(1)}+\varepsilon^2\hat{\phi}_{UC}^{(2)}+\cdots, \tag{26a}$$

$$\hat{\phi}_{LC}=\hat{\phi}_{LC}^{(0)}+\varepsilon\hat{\phi}_{LC}^{(1)}+\varepsilon^2\hat{\phi}_{LC}^{(2)}+\cdots, \tag{26b}$$

$$\hat{\eta}_C=\hat{\eta}_C^{(0)}+\varepsilon\hat{\eta}_C^{(1)}+\varepsilon^2\hat{\eta}_C^{(2)}+\cdots, \tag{26c}$$

ここに添え字Cは解の種類を表す[近接場の解(core solution)]．

(25)と(26a-c)を(15)-(21)に代入してεについて整理すると，$(\hat{\phi}_{UC}^{(n)},\hat{\phi}_{LC}^{(n)},\hat{\eta}_C^{(n)})$　$(n=1,2,\cdots)$に対する一連の方程式系が得られる：

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}_{UC}^{(n)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}_{UC}^{(n)}}{\partial z^2}=\hat{\phi}_{UC}^{(n-2)}\quad\text{for}\quad \eta_I<z<D, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}_{LC}^{(n)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}_{LC}^{(n)}}{\partial z^2}=\hat{\phi}_{LC}^{(n-2)}\quad\text{for}\quad -1<z<\eta_I, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}_{UC}^{(n)}}{\partial z}=0\quad\text{at}\quad z=D, \tag{29}$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{U}}[\hat{\phi}_{UC}^{(n)},\hat{\eta}_C^{(n)}]=G^{(n)}\quad\text{at}\quad z=\eta_I, \tag{30}$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{U}}[\hat{\phi}_{LC}^{(n)},\hat{\eta}_C^{(n)}]=G^{(n)}\quad\text{at}\quad z=\eta_I, \tag{31}$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{I}}[\hat{\phi}_{UC}^{(n)},\hat{\phi}_{LC}^{(n)},\hat{\eta}_C^{(n)}]=H^{(n)}\quad\text{at}\quad z=\eta_I, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\hat{\phi}_{LC}^{(n)}}{\partial z}=0\quad\text{at}\quad z=-1, \tag{33}$$

ここに，

$$G^{(n)}=-\lambda_1\hat{\eta}_C^{(n-1)}-\lambda_2\hat{\eta}_C^{(n-2)}, \tag{34a}$$

$$H^{(n)}=\lambda_1(\rho\hat{\phi}_{UC}^{(n-1)}-\hat{\phi}_{LC}^{(n-1)})+\lambda_2(\rho\hat{\phi}_{UC}^{(n-2)}-\hat{\phi}_{LC}^{(n-2)}), \tag{34b}$$

$$\hat{\phi}_{UC}^{(-1)}=\hat{\phi}_{LC}^{(-1)}=\hat{\eta}_C^{(-1)}=0, \tag{34c}$$

である．上記方程式系(27)-(33)は線形非同次であり，その同次部分が$x\to\pm\infty$で指数関数的に

減衰する解(24)をもつ．したがってこの方程式系が $x \to \pm\infty$ で指数関数的に発散しない解をもつためには，その非同次項 $\hat{\phi}_{UC}^{(n-2)}$, $\hat{\phi}_{LC}^{(n-2)}$, $G^{(n)}$, $H^{(n)}$ が次の可解条件を満たさなければならない：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\rho\int_{\eta_I}^{D}\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\hat{\phi}_{UC}^{(n-2)}\mathrm{d}z+\int_{-1}^{\eta_I}\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}\hat{\phi}_{LC}^{(n-2)}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(-\rho\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}\right)G^{(n)}-\frac{\mathrm{d}\eta_I}{\mathrm{d}x}H^{(n)}\right]_{z=\eta_I}\mathrm{d}x=0. \tag{35}$$

ここに $[\;]_{z=\eta_I}$ は括弧内の量を $z=\eta_I$ 上にて評価することを意味する．

$n=1$ のとき，可解条件(35)は恒等的に満たされ，(27)-(33)の解は未定定数 α を用いて

$$\hat{\phi}_{UC}^{(1)}=\alpha\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial\Phi_U}{\partial v},\quad \hat{\phi}_{LC}^{(1)}=\alpha\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial\Phi_L}{\partial v},\quad \hat{\eta}_C^{(1)}=\alpha\frac{\mathrm{d}\eta_I}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\frac{\partial\eta_I}{\partial v}, \tag{36}$$

と表される．ただしこの解(36)は無限遠方 $x \to \pm\infty$ での減衰境界条件(22)を満たさない，というのも Φ_U, Φ_L, η_I の v による微分 $\partial\Phi_U/\partial v$, $\partial\Phi_L/\partial v$, $\partial\eta_I/\partial v$ は，$x\to\infty$ もしくは $x\to-\infty$ のいずれかで零でない値をとるからである．減衰境界条件(22)を満たす解を構成するには，x に関して縮められた座標系 $X=\varepsilon x$ を導入し，x への依存性が緩やかな解を求めなければならない．この解を遠方場の解と呼ぶ．近接場の解(26)と遠方場の解とをつなぎあわせることにより，境界条件(22)を満たす解を構成するのである．まずこの節では近接場の解を求める．次節で遠方場の解を求めることとする．

$n=2$ のとき，可解条件(35)は

$$\frac{\lambda_1^2}{v}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v}=-E, \tag{37}$$

となる．ここに E は(12)で定義される孤立波のエネルギーであり，(37)を導くために次式を用いた（導出は紙面の都合上省略）：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\rho\int_{\eta_I}^{D}\left(\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}z+\int_{-1}^{\eta_I}\left(\frac{\partial\Phi_L}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x=E. \tag{38}$$

(37)より，

$$\lambda_1=\begin{cases}\pm\sqrt{\dfrac{vE}{|\mathrm{d}E/\mathrm{d}v|}} & \text{if } \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v}<0,\\[2ex] \pm\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{vE}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}v}} & \text{if } \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v}>0,\end{cases} \tag{39}$$

であるから，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}v<0$ のとき λ_1 は正の実部をもち，孤立波解は横方向に不安定である．$\mathrm{d}E/\mathrm{d}v>0$ のときは λ_1 の実部が零となり，孤立波解の安定性はこのオーダーでは決まらない．さらに高次に進む必要がある．

$n=3$ のとき，可解条件(35)は，

$$\frac{2\lambda_1\lambda_2}{v}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v}=\left[\rho\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\hat{u}_{UC}^{(2)}-\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}-\left[\rho\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\hat{u}_{UC}^{(2)}-\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to-\infty}. \tag{40}$$

ここに $[\;]_{x\to\infty}$（$[\;]_{x\to-\infty}$）は，括弧内の量を $x\to\infty$（$x\to-\infty$）にて評価することを意味し，

$$\begin{aligned}\hat{u}_{UC}^{(2)}&\equiv-\int_{\eta_I}^{D}\frac{\partial\hat{\phi}_{UC}^{(2)}}{\partial x}\mathrm{d}z+\left(-v+\left[\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\right]_{z=\eta_I}\right)\hat{\eta}_C^{(2)}\\&=\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)\eta_I+\int_{\infty}^{x}\left(-\int_{\eta_I}^{D}\frac{\partial\Phi_U}{\partial x}\mathrm{d}z+\lambda_1^2\frac{\partial\eta_I}{\partial v}\right)\mathrm{d}x',\end{aligned} \tag{41a}$$

$$\hat{u}_{LC}^{(2)} \equiv \int_{-1}^{\eta_I} \frac{\partial \hat{\phi}_{LC}^{(2)}}{\partial x} \mathrm{d}z + \left(-\nu + \left[\frac{\partial \Phi_L}{\partial x} \right]_{z=\eta_I} \right) \hat{\eta}_C^{(2)}$$
$$= \left[\hat{u}_{LC}^{(2)} \right]_{x\to\infty} - (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)\eta_I + \int_\infty^x \left(\int_{-1}^{\eta_I} \frac{\partial \Phi_L}{\partial x} \mathrm{d}z + \lambda_1^2 \frac{\partial \eta_I}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}x' \tag{41b}$$

である．また$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to-\infty}$，$\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to-\infty}$，$\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to-\infty}$，$\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to-\infty}$は，それぞれ$x\to\infty$における値と次の関係にある：

$$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to-\infty} = \left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to\infty} - \frac{\lambda_1}{D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\nu M + \frac{2T_U}{\rho\nu} \right), \tag{42a}$$

$$\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to-\infty} = \left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to\infty} + \lambda_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\nu M - \frac{2T_L}{\nu} \right), \tag{42b}$$

$$\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to-\infty} = \left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to\infty} - \nu M - \lambda_1^2 \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}, \tag{42c}$$

$$\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to-\infty} = \left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to\infty} - \nu M - \lambda_1^2 \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}, \tag{42d}$$

ここにM，T_U，T_Lは既に(14b-d)で定義した．(40)を導出する際，可解条件(35)に含まれる$-\lambda_1 \mathrm{d}\eta_I/\mathrm{d}x$と$\lambda_1(\rho\partial\Phi_U/\partial x - \partial\Phi_L/\partial x)$をそれぞれ，(30)（もしくは(31)）の$n=1$の同次部分$\mathbf{L}_\mathrm{U}[\hat{\phi}_{UC}^{(1)},\hat{\eta}_C^{(1)}]$（もしくは$\mathbf{L}_\mathrm{L}[\hat{\phi}_{LC}^{(1)},\hat{\eta}_C^{(1)}]$）および(32)の$n=1$の同次部分$\mathbf{L}_\mathrm{I}[\hat{\phi}_{UC}^{(1)},\hat{\phi}_{LC}^{(1)},\hat{\eta}_C^{(1)}]$に置き換えた．その後部分積分を施し，以下の 2 式を用いた：(27)の$n=2$に$\hat{\phi}_{UC}^{(1)}$を乗じ，上層流体の全領域で積分した式，および(28)の$n=2$に$\hat{\phi}_{LC}^{(1)}$を乗じ，下層流体の全領域で積分した式の 2 式である．$\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu>0$を満たす孤立波解の安定性は，こうして得られた式(40)により決められる．その際$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to\infty}$，$\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to\infty}$，$\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}$，$\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}$の具体値が必要となるが，これらは近接場の解と遠方場の解をつなぎ合わせることで決まる．この過程は 3.3 節で説明する．次節(3.2 節)は遠方場の解を求める．

3.2. 遠方場の解

式(25)で時間スケールが$O(\varepsilon^{-1})$と$O(\varepsilon^{-2})$で表されると仮定した．それに対応して，xに関しても 2 種類の緩やかな依存性を仮定し，2 種類の縮められた座標系を導入する：

$$X_1 = \varepsilon x, \quad X_2 = \varepsilon^2 x. \tag{43}$$

(15)-(21)の解のうち，X_1，X_2，zに関して単位量の範囲で有意の変化[$\partial\hat{h}/\partial X_1 = O(\hat{h})$，$\partial\hat{h}/\partial X_2 = O(\hat{h})$，$\partial\hat{h}/\partial z = O(\hat{h})$；ただし$\hat{h}=(\hat{\phi}_U,\hat{\phi}_L,\hat{\eta})$]をするものを次のような$\varepsilon$の冪級数の形で求める：

$$\hat{\phi}_{UF} = \varepsilon\hat{\phi}_{UF}^{(1)}(X_1,X_2,z) + \varepsilon^2\hat{\phi}_{UF}^{(2)}(X_1,X_2,z) + \cdots, \tag{44a}$$

$$\hat{\phi}_{LF} = \varepsilon\hat{\phi}_{LF}^{(1)}(X_1,X_2,z) + \varepsilon^2\hat{\phi}_{LF}^{(2)}(X_1,X_2,z) + \cdots, \tag{44b}$$

$$\hat{\eta}_F = \varepsilon^2\hat{\eta}_F^{(2)}(X_1,X_2) + \varepsilon^3\hat{\eta}_F^{(3)}(X_1,X_2) + \cdots. \tag{44c}$$

ここに添え字Fは解の種類を表す[遠方場の解(far-field solution)]．$\hat{\phi}_{UF}$，$\hat{\phi}_{LF}$，$\hat{\eta}_F$の級数がそれぞれ$O(\varepsilon)$，$O(\varepsilon)$，$O(\varepsilon^2)$から始まるのは，近接場の解がこれらのオーダーから$x\to\pm\infty$において零でない値をもつからである((42a-d)を見よ)．

(43)と(44a-c)を(15)-(21)に代入し，εについて整理すると，$(\hat{\phi}_{UF}^{(n)},\hat{\phi}_{LF}^{(n)})$ $(n=1,2,\cdots)$に対する

一連の方程式系が得られる：

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{UF}^{(n)}}{\partial z^2} = I^{(n)} \quad \text{for} \quad 0 < z < D, \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{LF}^{(n)}}{\partial z^2} = J^{(n)} \quad \text{for} \quad -1 < z < 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{UF}^{(n)}}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = D, \tag{47}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{UF}^{(n)}}{\partial z} = K^{(n)}, \quad \frac{\partial \hat{\phi}_{LF}^{(n)}}{\partial z} = K^{(n)} \quad \text{at} \quad z = 0, \tag{48a,b}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{LF}^{(n)}}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = -1. \tag{49}$$

ここに，

$$I^{(n)} = \hat{\phi}_{UF}^{(n-2)} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{UF}^{(n-2)}}{\partial X_1^2} - 2\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{UF}^{(n-3)}}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{UF}^{(n-4)}}{\partial X_2^2}, \tag{50a}$$

$$J^{(n)} = \hat{\phi}_{LF}^{(n-2)} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{LF}^{(n-2)}}{\partial X_1^2} - 2\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{LF}^{(n-3)}}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{LF}^{(n-4)}}{\partial X_2^2}, \tag{50b}$$

$$K^{(n)} = \left(\lambda_1 - \nu\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\hat{\eta}_F^{(n-1)} + \left(\lambda_2 - \nu\frac{\partial}{\partial X_2}\right)\hat{\eta}_F^{(n-2)}. \tag{50c}$$

ただし，$\hat{\phi}_{UF}^{(m)}$ $(m \le 0)$，$\hat{\phi}_{LF}^{(m)}$ $(m \le 0)$，$\hat{\eta}_F^{(m)}$ $(m \le 1)$は零である．$\hat{\eta}_F^{(n)}$ $(n = 2,3,\cdots)$は，$\hat{\phi}_{UF}^{(n-1)}$，$\hat{\phi}_{LF}^{(n-1)}$，$\hat{\phi}_{UF}^{(n-2)}$，$\hat{\phi}_{LF}^{(n-2)}$を用いて

$$\hat{\eta}_F^{(n)} = \frac{1}{1-\rho}\left[\left(\lambda_1 - \nu\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\rho\hat{\phi}_{UF}^{(n-1)} - \hat{\phi}_{LF}^{(n-1)}\right) + \left(\lambda_2 - \nu\frac{\partial}{\partial X_2}\right)\left(\rho\hat{\phi}_{UF}^{(n-2)} - \hat{\phi}_{LF}^{(n-2)}\right)\right]_{z=0}, \tag{51}$$

と表される．ただし$[\ ]_{z=0}$は括弧内の量を$z = 0$上にて評価することを意味する．

式(45)-(49)（と補助方程式(51)）は$(\hat{\phi}_{UF}^{(n)}, \hat{\phi}_{LF}^{(n)})$ $(n = 1,2,\cdots)$に対する方程式系を構成する．$n = 1$と2のときは同次方程式系となり，zに依らない解をもつ：

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{UF}^{(n)} = \hat{\phi}_{UF}^{(n)}(X_1, X_2), \\ \hat{\phi}_{LF}^{(n)} = \hat{\phi}_{LF}^{(n)}(X_1, X_2), \end{cases} \quad (n = 1,2). \tag{52}$$

$n = 3,4,\cdots$のときは非同次方程式系となり，その非同次項$I^{(n)}$，$J^{(n)}$，$K^{(n)}$は次の可解条件を満たさなければならない：

$$-\int_0^D I^{(n)} \mathrm{d}z = \int_{-1}^0 J^{(n)} \mathrm{d}z = K^{(n)}. \tag{53}$$

$n = 3$のとき，(53)は

$$\left[\left(\nu^2 - c^2\right)\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - 2\nu\lambda_1\frac{\partial}{\partial X_1} + \lambda_1^2 + c^2\right]\left(\rho\hat{\phi}_{UF}^{(1)} - \hat{\phi}_{LF}^{(1)}\right) = 0, \tag{54a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - 1\right)\left(D\hat{\phi}_{UF}^{(1)} + \hat{\phi}_{LF}^{(1)}\right) = 0. \tag{54b}$$

となる（cの定義は(10b)）．これを解いて，

$$\hat{\phi}_{UF}^{(1)} = -\frac{q\exp(kX_1)+\bar{q}\exp(\bar{k}X_1)}{D} + r\exp(X_1)+\bar{r}\exp(-X_1), \tag{55a}$$

$$\hat{\phi}_{LF}^{(1)} = q\exp(kX_1)+\bar{q}\exp(\bar{k}X_1)+\rho[r\exp(X_1)+\bar{r}\exp(-X_1)]. \tag{55b}$$

ただしq，$\bar{q}$，r，$\bar{r}$はX_2の未定関数，k，$\bar{k}$は

$$k = \frac{\nu+\beta c}{\nu^2-c^2}\lambda_1, \quad \bar{k} = \frac{\nu-\beta c}{\nu^2-c^2}\lambda_1, \tag{56a,b}$$

で表される定数であり，βは以下の定数である：

$$\beta = \begin{cases} \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\nu^2-c^2}{|\lambda_1|^2}-1} & \text{if } \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu} < -\dfrac{\nu E}{\nu^2-c^2}, \\ \sqrt{1-\dfrac{\nu^2-c^2}{|\lambda_1|^2}}\ (<1) & \text{if } -\dfrac{\nu E}{\nu^2-c^2} < \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu} < 0, \\ \sqrt{1+\dfrac{\nu^2-c^2}{|\lambda_1|^2}}\ (>1) & \text{if } \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu} > 0. \end{cases} \tag{57}$$

q，$\bar{q}$，r，$\bar{r}$の関数形は，次のオーダーにすすむことで定まる．

可解条件(53)は$n=4$のとき，

$$\left[(\nu^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - 2\nu\lambda_1\frac{\partial}{\partial X_1} + \lambda_1^2 + c^2\right]\left(\rho\hat{\phi}_{UF}^{(2)} - \hat{\phi}_{LF}^{(2)}\right)$$
$$= 2\left[-(\nu^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} + \nu\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial X_2} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial X_1}\right) - \lambda_1\lambda_2\right]\left(\rho\hat{\phi}_{UF}^{(1)} - \hat{\phi}_{LF}^{(1)}\right), \tag{58a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}-1\right)\left(D\hat{\phi}_{UF}^{(2)} + \hat{\phi}_{LF}^{(2)}\right) = -2\frac{\partial^2\left(D\hat{\phi}_{UF}^{(1)} + \hat{\phi}_{LF}^{(1)}\right)}{\partial X_1\partial X_2}. \tag{58b}$$

$(\hat{\phi}_{UF}^{(2)}, \hat{\phi}_{LF}^{(2)})$に対するこの非同次方程式系(58a,b)が$X_1$に関して発散しない解をもつためには，非同次項が消えなければならない．つまり，

$$q = a_\pm \exp\left(\frac{\nu+c/\beta}{\nu^2-c^2}\lambda_2 X_2\right), \quad \bar{q} = \bar{a}_\pm \exp\left(\frac{\nu-c/\beta}{\nu^2-c^2}\lambda_2 X_2\right), \tag{59a,b}$$

$$r = b_\pm, \quad \bar{r} = \bar{b}_\pm. \tag{59c,d}$$

ここに(55a,b)を用いた．a_+，$\bar{a}_+$，b_+，$\bar{b}_+$は$X_1, X_2 > 0$における未定定数であり，a_-，$\bar{a}_-$，b_-，$\bar{b}_-$は$X_1, X_2 < 0$における未定定数である．これらの具体値は，次節でおこなう解のつなぎ合わせにより決まる．

3.3. 解のつなぎ合わせ

近接場の解$(\hat{\phi}_{UC}, \hat{\phi}_{LC}, \hat{\eta}_C)$と遠方場の解$(\hat{\phi}_{UF}, \hat{\phi}_{LF}, \hat{\eta}_F)$をつなぎ合わせる．遠方場の解を近接場$(|X_1|, |X_2| << 1)$で評価するので，その構成関数$(\hat{\phi}_{UF}^{(n)}, \hat{\phi}_{LF}^{(n)}, \hat{\eta}_F^{(n)})$を$X_1(=\varepsilon x)$と$X_2(=\varepsilon^2 x)$に関して展開し，

$$\hat{h}_F^{(n)} = \left(\hat{h}_F^{(n)}\right)_0 + \varepsilon x\left(\frac{\partial \hat{h}_F^{(n)}}{\partial X_1}\right)_0 + \varepsilon^2\left[\frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \hat{h}_F^{(n)}}{\partial X_1^2}\right)_0 + x\left(\frac{\partial \hat{h}_F^{(n)}}{\partial X_2}\right)_0\right] + \cdots. \tag{60}$$

ここに$\hat{h}$は$(\hat{\phi}_U,\hat{\phi}_L,\hat{\eta})$を表し，$(\cdots)_0$は括弧内の量を$X_1=X_2=0$上で評価することを意味する．この展開を施した後の$(\hat{\phi}_{UF},\hat{\phi}_{LF},\hat{\eta}_F)$を$\varepsilon$について整理すると，再整理した形の構成関数$(\hat{\phi}_{UF}^{(n)*},\hat{\phi}_{LF}^{(n)*},\hat{\eta}_F^{(n)*})$が得られる．例えば，$\varepsilon^2$のオーダーにおける$\hat{\phi}_{UF}$（つまり$\hat{\phi}_{UF}^{(2)*}$）は$\left(\hat{\phi}_{UF}^{(2)}\right)_0+x\left(\partial\hat{\phi}_{UF}^{(1)}/\partial X_1\right)_0$となる．その上で，近接場の解の構成関数$(\hat{\phi}_{UC}^{(n)},\hat{\phi}_{LC}^{(n)},\hat{\eta}_C^{(n)})$と遠方場のそれ$(\hat{\phi}_{UF}^{(n)*},\hat{\phi}_{LF}^{(n)*},\hat{\eta}_F^{(n)*})$とを比較して解をつなぎ合わせるのである．そのための条件は，

$$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(n)}\right]_{x\to\pm\infty}=\hat{\phi}_{UF}^{(n)*},\quad \left[\hat{\phi}_{LC}^{(n)}\right]_{x\to\pm\infty}=\hat{\phi}_{LF}^{(n)*},\quad \left[\hat{\eta}_{C}^{(n)}\right]_{x\to\pm\infty}=\hat{\eta}_{F}^{(n)*},\tag{61}$$

である．

$n=1$のとき，$\hat{\phi}_{UF}^{(1)*}=\left(\hat{\phi}_{UF}^{(1)}\right)_0$および$\hat{\phi}_{LF}^{(1)*}=\left(\hat{\phi}_{LF}^{(1)}\right)_0$であるから，

$$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to\pm\infty}=-\frac{a_\pm+\bar{a}_\pm}{D}+b_\pm+\bar{b}_\pm,\tag{62a}$$

$$\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to\pm\infty}=a_\pm+\bar{a}_\pm+\rho\left(b_\pm+\bar{b}_\pm\right),\tag{62b}$$

ただし(55a,b)と(59a-d)を用いた．

$n=2$のとき，$\hat{\phi}_{UF}^{(2)*}=\left(\hat{\phi}_{UF}^{(2)}\right)_0+x\left(\partial\hat{\phi}_{UF}^{(1)}/\partial X_1\right)_0$，$\hat{\phi}_{LF}^{(2)*}=\left(\hat{\phi}_{LF}^{(2)}\right)_0+x\left(\partial\hat{\phi}_{LF}^{(1)}/\partial X_1\right)_0$であるから，つなぎ合わせの条件式は$x$に依らない項と$x$に比例する項のそれぞれより得られる．後者（$x$に比例する項）がこの段階における未知定数を決める．つまり，

$$\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to\pm\infty}=\frac{\beta\lambda_1}{c}(-a_\pm+\bar{a}_\pm)-D(b_\pm-\bar{b}_\pm),\tag{63a}$$

$$\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to\pm\infty}=\frac{\beta\lambda_1}{c}(-a_\pm+\bar{a}_\pm)+\rho(b_\pm-\bar{b}_\pm),\tag{63b}$$

ただし(41a,b)で定義した$\hat{u}_{UC2}$と$\hat{u}_{LC2}$を用いて表し，導出の際に(51), (55a,b), (59a-d)を用いた．

さらに境界条件(22)において，(55a,b)の右辺にある$q\exp(kX_1)$と$\bar{q}\exp(\bar{k}X_1)$の指数の実部が$\mathrm{Re}[\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]$と符号が一致することを考慮すると，

$$a_+=\bar{a}_+=b_+=\bar{b}_-=0\quad\text{when}\quad \mathrm{Re}[\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]>0,\tag{64a}$$

$$a_-=\bar{a}_-=b_+=\bar{b}_-=0\quad\text{when}\quad \mathrm{Re}[\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]<0,\tag{64b}$$

が導かれる．以上により，12個の未定定数$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to\infty}$，$\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to\infty}$，$\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}$，$\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}$，$a_\pm$，$\bar{a}_\pm$，$b_\pm$，$\bar{b}_\pm$（$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to-\infty}$，$\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to-\infty}$，$\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to-\infty}$，$\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to-\infty}$は(42a-d)により与えられる)が(62a,b), (63a,b), (64a)もしくは(64b)の12式により決まる．これを解くと，$\mathrm{Re}[\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]>0$のとき，

$$\rho\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to\infty}=\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to\infty}=\frac{\rho}{D}\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}=-\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to\infty}=\frac{\lambda_1}{\rho+D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right),\tag{65a-d}$$

$$a_+=\bar{a}_+=b_+=\bar{b}_-=0,\tag{65e}$$

$$a_-=\frac{c}{2\beta}\left(\frac{\nu M}{\lambda_1}+\lambda_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\right)+\frac{c^2\lambda_1}{2(\rho-1)}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu},\tag{65f}$$

$$\bar{a}_-=-\frac{c}{2\beta}\left(\frac{\nu M}{\lambda_1}+\lambda_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\right)+\frac{c^2\lambda_1}{2(\rho-1)}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu},\tag{65g}$$

$$b_-=-\bar{b}_+=-\frac{\lambda_1}{\rho(\rho+D)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right),\tag{65h}$$

となり，$\mathrm{Re}[\lambda_1+\varepsilon\lambda_2]<0$のとき，

$$\left[\hat{\phi}_{UC}^{(1)}\right]_{x\to\infty} = \frac{\lambda_1}{\rho+D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(-\Omega+\frac{T_U+\rho T_L}{\rho\nu}\right), \tag{66a}$$

$$\left[\hat{\phi}_{LC}^{(1)}\right]_{x\to\infty} = \frac{\lambda_1}{\rho+D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(D\Omega+\frac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right), \tag{66b}$$

$$\left[\hat{u}_{UC}^{(2)}\right]_{x\to\infty} = \nu M+\lambda_1^2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}+\frac{D\lambda_1}{\rho(\rho+D)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right), \tag{66c}$$

$$\left[\hat{u}_{LC}^{(2)}\right]_{x\to\infty} = \nu M+\lambda_1^2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}-\frac{\lambda_1}{\rho+D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right), \tag{66d}$$

$$a_- = \bar{a}_- = b_+ = \bar{b}_- = 0, \tag{66e}$$

$$a_+ = -\frac{c}{2\beta}\left(\frac{\nu M}{\lambda_1}+\lambda_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\right)-\frac{c^2\lambda_1}{2(\rho-1)}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu}, \tag{66f}$$

$$\bar{a}_+ = \frac{c}{2\beta}\left(\frac{\nu M}{\lambda_1}+\lambda_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\right)-\frac{c^2\lambda_1}{2(\rho-1)}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu}, \tag{66g}$$

$$b_- = -\bar{b}_+ = -\frac{\lambda_1}{\rho(\rho+D)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right), \tag{66h}$$

となる(Ωの定義は(14a)を見よ). (42a-d)および(65a-d)もしくは(66a-d)を(40)に代入して, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu<0$のとき,

$$\lambda_2 = \lambda_1\left\{-\frac{Q}{|\lambda_1|}+\frac{\nu}{\rho(\rho+D)\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right)\right]^2\right\}, \tag{67a}$$

$\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu>0$のとき,

$$\lambda_2 = \begin{cases} \pm Q+\dfrac{\lambda_1\nu}{\rho(\rho+D)\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\dfrac{T_U+\rho T_L}{\nu}\right)\right]^2 & \text{if } Q<0, \\ \text{no solution} & \text{if } Q>0. \end{cases} \tag{67b}$$

ここに,

$$Q = \frac{\nu^2 E}{2(\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu)^2}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}-\frac{M}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu}\right)\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu}. \tag{68}$$

結局(25), (39), (67a,b)により固有値λがεに関する2次のオーダーまで得られた. 対応する固有関数は, 近接場の解は(26a-c), (24), (36)により, 遠方場の解は(44a-c), (55a,b), (59a-d)と(65e-h)もしくは(66e-h)により, εに関する1次のオーダーまで得られた. 2次オーダーの解は, (41a,b)と(65c,d)もしくは(66c,d), ならびに$n=2$における(51)により$\hat{u}_{UC}^{(2)}$, $\hat{u}_{LC}^{(2)}$, $\hat{\eta}_C^{(2)}$が与えられる. 以上の結果は$\rho=0$のときには, 表面波に対する結果と完全に一致する(本研究の(39), (67b) (68)と Kataoka & Tsutahara (2004)の(3.11), (3.39), (3.40)を比較せよ).

(39)と(67b)より$\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu<0$もしくは$Q<0$のとき, 固有値$\lambda$が正の実部をもつ解が存在する. 言い換えると, 孤立波が横方向に不安定であるための十分条件として,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu}<0 \ \text{ or } \ Q<0, \tag{69}$$

が得られた. そこで, 1節で示した次の命題を証明しよう.

命題. 与えられたρとDに対して孤立波解が分岐しないと仮定し, 小振幅の解から解の枝を

たどっていく．対応する孤立波解は，進行方向攪乱に対して安定性交換する前に必ず横方向攪乱に対して不安定となる．

証明. 過去の研究によると，小振幅の界面孤立波は進行方向攪乱に対して安定であり(Jeffery & Kakutani 1970; Benjamin 1972; Kuznetsov 1984; Weinstein 1986; Bona, Souganidis & Strauss 1987)，孤立波解の枝を小振幅からたどっていくと，安定性交換が最初に起こるのは１つめの $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu=0$ なる点である(Kataoka, 2006)．また(13)より，孤立波解はこの点 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu=0$ の小さな振幅側において以下の不等式を満たす：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu}<0 \quad \text{or} \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\nu}<0 \tag{70}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu}\right|>\left|\frac{M}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\nu}\right|. \tag{71}$$

前者(70)は(13)より，後者(71)は $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu=0$ 近傍において $|\mathrm{d}E/\mathrm{d}\nu|$ が小さいことから導かれる．これらの不等式(70)と(71)が成り立つとき，横方向不安定性のための十分条件(69)は常に満たされている．よって命題が証明された．□

参考文献

Benjamin, T. B. 1972 The stability of solitary waves. *Proc. R. Soc. Lond.* A **328**, 153-183.

Bona, J. L., Souganidis, P. E. & Strauss, W. A. 1987 Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. *Proc. R. Soc. Lond.* A **411**, 395-412.

Evans, W. A. B. & Ford, M. J. 1996 An integral equation approach to internal (2-layer) solitary waves. *Phys. Fluids* **8**, 2032-2047.

Funakoshi, M. & Oikawa, M. 1986 Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Jpn.* **55**, 128-144.

Grue, J., Jensen, A., Rusås, P. O., & Sveen, J. K. 1999 Properties of large amplitude internal waves. *J. Fluid Mech.* **380**, 257-278.

Jeffery, A. & Kakutani, T., 1970 Stability of the Burgers shock wave and the Korteweg-de Vries soliton. *Indiana Univ. Math. J.* **20**, 463-468.

Kataoka, T. 2006 The stability of finite-amplitude interfacial solitary waves. *Fluid Dyn. Res.* **31**, 831-867.

Kataoka, T. & Tsutahara, M. 2004 Transverse instability of surface solitary waves. *J. Fluid Mech.* **512**, 211-221.

Kuznetsov, E. A. 1984 Soliton stability in equations of the KdV type. *Phys. Lett.* A **101**, 314-316.

Laget, O. & Dias, F. 1997 Numerical computation of capillary-gravity interfacial solitary waves. *J. Fluid Mech.* **349**, 221-251.

Michallet, H. & Barthēlemy, E. 1998 Experimental study of interfacial solitary waves. *J. Fluid Mech.* **366**, 159-177.

Pullin, D. I. & Grimshaw, R. H. J. 1988 Finite-amplitude solitary waves at the interface between two homogeneous fluids. *Phys. Fluids* **31**, 3550-3559.

Turner, R. E. L. & Vanden-Broeck, J. -M. 1988 Broadening of interfacial solitary waves. *Phys. Fluids*, **31**, 2486-2490.

Weinstein, M. I. 1986 Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **39**, 51-67.