

劣線形楕円型方程式の正值解に対する比較定理とアプリアリ評価

長崎総合科学大学・工学部 梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)
Nagasaki Institute of Applied Science

本公演では、次の劣線形楕円型方程式に対する解の比較定理とアプリアリ評価について述べる。

$$(E, \Omega) \quad -\Delta u = f(u), \quad u > 0, \quad (x \in \Omega).$$

Ω は \mathbb{R}^n の有界開集合, $f \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ とする. (E, Ω) に条件 $u = 0$ ($x \in \partial\Omega$) をつけたものを $(E, \Omega, 0)$ と書く. $f(s)/s$ が $s > 0$ で減少関数のとき, (E, Ω) を劣線形楕円型方程式という. まず Brezis–Oswald の次の結果を紹介する.

定理 0. ([2]) f を劣線形とする. このとき次の (i), (ii) が成り立つ.

- (i) $(E, \Omega, 0)$ は, 高々 1 個の解しか持たない.
- (ii) $(E, \Omega, 0)$ の解が存在するための必要十分条件は

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1(\Omega) < \lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(s)}{s},$$

である. ただし, $\lambda_1(\Omega)$ は, 領域 Ω でのディリクレ・ラプラシアン第 1 固有値を表す.

この結果は, 平良・梅津 [3] 及び Bao [1] により, さらに一般化されている. 上記の定理で, (ii) は必要十分条件であるが, (i) は, そうではない. 解の一意性は, 比較定理から来るものである. 本公演では, 比較定理が成り立つための必要十分条件は, $f(u)$ が劣線形であることを証明する.

仮定.

(f1) $f(s)$ は次の条件 (f1.1) または, (f1.2) のいずれかを満たす.

(f1.1) すべての $s > 0$ に対して, $f(s) > 0$ である.

(f1.2) ある $\bar{u} \in (0, \infty)$ が存在して,

$$f(s) > 0 \quad (0 < s < \bar{u}), \quad f(s) \leq 0 \quad (s \geq \bar{u}).$$

(f2) 任意の $R > 0$ に対して, ある $C > 0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \geq -C, \quad (t, s \in [0, R], t \neq s).$$

もしすべての $s > 0$ に対して $f(s) \leq 0$ ならば, 最大値原理により $(E, \Omega, 0)$ の解は存在しない. よって, 劣線形の場合に, 正值解が存在するためには, (f1.1) または, (f1.2) が必要である. 最初の主結果を述べる. (f1.1) が成り立つ場合には, $\bar{u} = \infty$ と考える.

定理 1. (f1), (f2) を仮定する. このとき以下の条件 (i), (ii), (iii) は同値である.

- (i) $f(s)/s$ は, $(0, \bar{u})$ で狭義単調減少である.
 (ii) Ω を任意の有界領域とする. u_1, u_2 を次の条件を満たす (E, Ω) の解とする.

$$(1) \quad 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \bar{u}, \quad u_1 \neq u_2, \quad (x \in \partial\Omega).$$

このとき,

$$(2) \quad u_1 < u_2, \quad (x \in \Omega), \quad \int_{\Omega} (u_2 f(u_1) - u_1 f(u_2)) dx > 0.$$

- (iii) Ω_1, Ω_2 を $\Omega_1 \subset \Omega_2$ なる任意の有界領域とする. u_i ($i = 1, 2$) は (E, Ω_i) の解であり, 次を満たすものとする.

$$(3) \quad 0 \leq \sup_{\partial\Omega_1} u_1 \leq \inf_{\partial\Omega_2} u_2 \leq \bar{u}.$$

もし, $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$ または $\sup_{\partial\Omega_1} u_1 < \inf_{\partial\Omega_2} u_2$, ならば, 次が成り立つ.

$$(4) \quad u_1 < u_2, \quad (x \in \Omega_1), \quad \int_{\Omega_1} (u_2 f(u_1) - u_1 f(u_2)) dx > 0.$$

定理 1 (iii) より, 領域が大きくなれば, $(E, \Omega, 0)$ の解も大きくなることがわかる. 領域の厚さを使って解のアプリオリ評価を与える. これ以降は, $f(s)$ は劣線形であり, (f1), (f2) 及び $\lim_{s \rightarrow +0} f(s)/s = \infty$ が成り立つものと仮定する. さらに, (f1.1) の場合は, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)/s = 0$ も仮定する. 従って, このとき任意の有界領域に対して正值解が一意に存在する.

定義 1.

- (i) $u(x, \Omega)$ は $(E, \Omega, 0)$ の解を表す.
 (ii) $\alpha > 0$ に対して, $v(t, \alpha)$ は次の方程式の解を表す.

$$(ODE) \quad \begin{cases} -v'' = f(v), & (-\alpha < t < \alpha), \\ v(t) > 0, & (-\alpha < t < \alpha), \\ v(-\alpha) = v(\alpha) = 0. \end{cases}$$

定理 1 は, この方程式にも有効であり, (ODE) の解はただ一つ存在する. $v(x_n)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) は, $(E, \Omega, 0)$ の解なので, 定理 1 より次の定理が出る.

定理 2. $\Omega \subset \{(x_1, \dots, x_n) : -\alpha < x_n < \alpha\}$ とする. このとき,

$$u(x, \Omega) < v(x_n, \alpha), \quad (x \in \Omega).$$

$$\|u(\cdot, \Omega)\|_{\infty} < \|v(\cdot, \alpha)\|_{\infty} = v(0, \alpha).$$

が成り立つ. ただし, $\|\cdot\|_{\infty}$ は L^{∞} -ノルムを表す.

定理 3. D を \mathbb{R}^n の有界凸集合とする.

$$\rho(x, D) \equiv \inf\{|x - y| : y \in D\},$$

$$D(\alpha) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \setminus D : \rho(x, D) < \alpha\},$$

と定義する. もし $\Omega \subset D(\alpha)$ ならば次が成り立つ.

$$u(x, \Omega) \leq v(\rho(x, D), \alpha), \quad (x \in \Omega).$$

定理 4. D を \mathbb{R}^n の有界凸開集合とする. α を D 内の最大球の半径とする. もし $\Omega \subset D$ ならば, 次が成り立つ.

$$u(x, \Omega) \leq v(\rho(x, \partial D) - \alpha, \alpha) \quad (x \in \Omega).$$

劣線形楕円型方程式では, すべての解の中で正值解が最大のものである. 従って, 定理 2, 3, 4 は任意の解に対しても有効である. 特に, $f(s)$ が奇関数の場合は, これらの定理において $u(x, \Omega)$ を任意の解 $u(x)$ に対する $|u(x)|$ に置き換えることができる.

例 1. $f(s) = s^p$, $0 < p < 1$ とする. このとき, $(E, \Omega, 0)$ の解 $u(x, \Omega)$ は次のアプリアリ評価を持つ.

$$\|u(\cdot, \Omega)\|_{\infty} \leq C\alpha^{2/(1-p)}.$$

α は, Theorem 2, 3, 4 に現れる領域の厚さである. C は, 解 u や α に無関係な正定数である.

定理 1 の証明. (i) と (1) を仮定する. 今, $u_1(x_0) > u_2(x_0)$ なる $x_0 \in \Omega$ があつたと仮定する. このとき矛盾が起きることを証明する.

$$\Omega_0 \equiv \{x \in \Omega : u_1(x) > u_2(x)\},$$

とおく. $\partial\Omega_0$ が滑らかな場合をまず考察する. $x \in \Omega_0$ のとき, $u_1 - u_2 > 0$ であり, $x \in \partial\Omega_0$ のとき $u_1 - u_2 = 0$ なので, グリーンの公式により,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dx \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\partial\Omega_0} u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} - \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds \geq 0. \end{aligned}$$

u_1, u_2 は解なので, 上式は次の式を意味する.

$$(5) \quad \int_{\Omega_0} (u_2 f(u_1) - u_1 f(u_2)) dx \geq 0.$$

しかし, これは $u_1 > u_2$ ($x \in \Omega_0$) と $f(s)$ が劣線形であることに反して矛盾である.

次に $\partial\Omega_0$ が滑らかと限らない場合を考える. $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ とおく. このとき, サードの定理により $u(x)$ の臨界値全体のルベーク測度は 0 である. よって, $u(x)$ の正則値の列 $\{\delta_n\}$ で, $\delta_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なるものが存在する.

$$\Omega_n \equiv \{x \in \Omega : u(x) > \delta_n\}.$$

とおく. n が十分大きいとき, $\Omega_n \neq \emptyset$ である. $x \in \partial\Omega_n$ のとき $\nabla u(x) \neq 0$ なので, 陰関数定理により, x の近傍で $\partial\Omega_n$ は滑らかである. すなわち $\partial\Omega_n$ 全体が滑らかな閉曲面になる. グリーンの公式を使うと,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dx \\ &= \int_{\partial\Omega_n} u_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} - \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds + \delta_n \int_{\partial\Omega_n} \frac{\partial u_2}{\partial n} ds \\ &\geq \delta_n \int_{\Omega_n} \Delta u_2 dx \\ &= -\delta_n \int_{\Omega_n} f(u_2) dx \\ (6) \quad &\geq -\delta_n \|f(u_2)\|_{\infty} \text{vol}(\Omega). \end{aligned}$$

ただし, $\text{vol}(\Omega)$ は Ω のルベーク測度を表す. (6) で, $n \rightarrow \infty$ として, (5) を得る. この式は, 先ほど述べたように矛盾である.

以上により, $u_1(x) \leq u_2(x)$ ($x \in \Omega$) が示された. 次に, 真の不等号が成り立つことを示す. (f2) により, ある $C > 0$ があり,

$$-\Delta(u_2 - u_1) = f(u_2) - f(u_1) \geq -C(u_2 - u_1).$$

このとき, 強最大値原理により, $u_2 - u_1 > 0$ ($x \in \Omega$) である. f が劣線形なので (2) 式の積分の不等式も成り立つ. よって (i) から (ii) が得られた.

(ii) から (iii) が出ることは, 自明である. (iii) を仮定して (i) を示す. $s < 0$ に対して, $f(s) = s + f(0)$ として, $f(s)$ の定義域を \mathbb{R} 全体に拡張しておく. $u_0 \in (0, \bar{u})$ を任意に与える. (E, Ω) の球対称解を使う.

$$(7) \quad u'' + \frac{n-1}{r} u' + f(u) = 0, \quad (r > 0),$$

$$(8) \quad u'(0) = 0, \quad u(0) = u_0,$$

の解を $u(r)$ と書く. コーシー・ペアノの存在定理により, 局所解が存在する.

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

とおくと,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} u'(r)^2 + F(u(r)) \right) = -\frac{n-1}{r} u'(r)^2 \leq 0,$$

なので,

$$\frac{1}{2} u'(r)^2 + F(u(r)) \leq F(u_0),$$

となる. よって, 解は大域的に存在する. スツルムの比較定理により, $u(r)$ は零点を持つ. 最小の零点を z と表す. $u(r)$ は区間 $(0, z)$ で単調減少である. 実際, $u(r) > 0$ ($r \in (0, z)$) なので,

$$(r^{n-1} u')' = -r^{n-1} f(u) < 0,$$

となり, $r^{n-1} u'$ は減少する. $u'(0) = 0$ なので, $r^{n-1} u' < 0$, ($r \in (0, z)$) となり, u は減少する. (7), (8) の解は $(0, z)$ において一意である. 実際に u 以外の解 v があれば, 次を満たす点 $r_0 \in (0, z)$ がある.

$$u(r), v(r) > 0, \quad (r \in (0, r_0)), \quad u(r_0) \neq v(r_0).$$

$u(r_0) > v(r_0)$ または, $u(r_0) < v(r_0)$ である. 前者を考える. u, v は半径 r_0 の球における (E, Ω) の解であり, 境界上で $u > v$ なので, 定理 1(iii) より, 球の内部でも $u > v$ となる. これは, $u(0) = v(0) = u_0$ に反する. よって, 解は一意である.

$0 < a_1 < a_2 < \bar{u}$ なる a_1, a_2 を任意に取る. (7) の解で初期条件

$$(9) \quad u_i'(0) = 0, \quad u_i(0) = a_i, \quad (i = 1, 2),$$

を満たすものを $u_1(r), u_2(r)$ と書く. u_1 の最小の零点を z_1 と書く. 定理 1(iii) より $u_1(r) < u_2(r)$ ($r \in (0, z_1)$) である. (4) より $\varepsilon \in (0, z_1)$ のとき,

$$(10) \quad \int_0^\varepsilon (u_2 f(u_1) - u_1 f(u_2)) r^{n-1} dr > 0.$$

両辺に $n\varepsilon^{-n}$ を掛けて $\varepsilon \rightarrow +0$ とすれば,

$$u_2(0)f(u_1(0)) - u_1(0)f(u_2(0)) \geq 0,$$

が得られ, すなわち $f(a_1)/a_1 - f(a_2)/a_2 \geq 0$ となる. ゆえに, $f(s)/s$ は広義単調減少である. 今, ある区間 $[a, b] \subset (0, \bar{u})$ があり, $f(s)/s$ が $[a, b]$ で定数であると仮定する. $a < a_1 < a_2 < b$ なる a_1, a_2 を取り u_i ($i = 1, 2$) を (7), (9) の解とする. このとき, $\varepsilon > 0$ が十分小ならば,

$$a < u_1(r) < u_2(r) < b \quad (r \in [0, \varepsilon]),$$

となる. 従って,

$$u_2(r)f(u_1(r)) - u_1(r)f(u_2(r)) \equiv 0, \quad (r \in [0, \varepsilon]),$$

となり (10) に反する. ゆえに, $f(s)/s$ は, $(0, \bar{u})$ で狭義単調減少である. 証明終.

定理 3 の証明.

$$V(x) \equiv v(\rho(x, D), \alpha)$$

とおくとき, これが優解になることを示す. (ODE) に対する解の一意性により, $v(t, \alpha)$ は, 次を満たすことがわかる.

$$(11) \quad v(t, \alpha) = v(-t, \alpha), \quad (-\alpha < t < \alpha),$$

$$(12) \quad v'(t, \alpha) > 0, \quad (t \in (-\alpha, 0)), \quad v'(t, \alpha) < 0, \quad (t \in (0, \alpha)).$$

ただし, $v'(t, \alpha)$ は, v の t に関する導関数を表す.

まず, D が有界開集合で ∂D が滑らかであると仮定する. このとき, $\rho(x, D)$ は $\mathbb{R}^n \setminus D$ で滑らかな凸関数になる. また, $|\nabla \rho(x)| = 1$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus D$) となる. 計算すると,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V(x) = v'(\rho, \alpha) \rho_{x_i}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} V(x) = v''(\rho, \alpha) (\rho_{x_i})^2 + v'(\rho) \rho_{x_i x_i}.$$

$$-\Delta V(x) = -v''(\rho, \alpha) |\nabla \rho|^2 - v'(\rho, \alpha) \Delta \rho.$$

となる. $\rho(x)$ は凸関数なので, $\Delta \rho(x) \geq 0$ である. $x \in D(\alpha)$ のとき, $0 < \rho(x, \alpha) < \alpha$ であり, (12) より $v'(\rho, \alpha) < 0$ となる. $|\nabla \rho(x)| = 1$ を使うと

$$-\Delta V(x) \geq -v''(\rho, \alpha) = f(v(\rho, \alpha)) = f(V).$$

ゆえに $V(x)$ は優解である.

D が開集合でない場合, または, ∂D が滑らかでないときは, 近似を使う. このとき, $v(\rho(x, D), \alpha)$ は超関数の意味での優解になる. 定理 1 は, このような場合も有効である. 境界 $\partial \Omega$ 上で $V(x) \geq 0 = u(x)$ なので 定理 1 により $V(x) \geq u(x)$ ($x \in \Omega$) である. 証明終.

定理 4 の証明. 定理 3 と同様に証明する. この場合の困難な点は, たとえ ∂D が滑らかであっても, $\rho(x, \partial D)$ は, D 内で滑らかにならないことである. しかし, 次のことが証明できる. ∂D が滑らかなとき, ある可測集合 $A \subset D$ が存在して, A はコンパクト, A のルベーグ測度は 0 であり, $\rho(x, \partial D)$ は A を除いて D 内で滑らか, $|\nabla \rho(x, \partial D)| = 1$ ($x \in D \setminus A$) が成り立つ. これを使って, 定理 3 と同様の証明を行う.

$$V(x) \equiv v(\rho(x, \partial D) - \alpha, \alpha),$$

とおく. このとき,

$$-\Delta V(x) = -v''(\rho(x) - \alpha, \alpha) |\nabla \rho|^2 - v'(\rho(x) - \alpha, \alpha) \Delta \rho,$$

となっている。 $\rho(x, \partial D)$ は D 内で凹関数になり、また $x \in D$ に対して、 $0 < \rho(x, \partial D) < \alpha$ となるので、

$$\Delta \rho(x, \partial D) \leq 0, \quad v'(\rho - \alpha, \alpha) > 0,$$

となる。よって、

$$-\Delta V(x) \geq -v''(\rho - \alpha, \alpha) = f(V).$$

ゆえに $V(x)$ は優解である。証明終。

参考文献

- [1] J. Bao, Positive solution for semilinear elliptic equation on general domain, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **53** (2003), 1179–1191.
- [2] H. Brezis and L. Oswald, Remarks on sublinear elliptic equations, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **10** (1986), 55–64.
- [3] K. Taira and K. Umezu, Positive solutions of sublinear elliptic boundary value problems, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **29** (1997), 761–771.