

KZ-associator と多重ゼータ値の関係について

早稲田大学・理工学部・数理科学科 村上 順 (Jun Murakami)

Department of Mathematical Sciences, School of Science and Engineering,
Waseda University

はじめに 多重ゼータ値の \mathbb{Q} 上の関係式を調べる研究は最終的な予想が述べられるまでに進んでいるが, ここでは, 結び目の Kontsevich 不変量を定義するときに用いられた KZ-associator と多重ゼータ値の関係式との関係を考察する. Kontsevich 不変量の不変性から多重ゼータ値についての情報を取り出そうというものである. 不変性は pentagon, hexagon 関係式として表現され, この関係式から多重ゼータ値の関係式が導かれる. 一般的な関係式は記述できていないのだが, 最近, Kurlin [2] により, double commutator を法とした場合についての具体的な結果が得られたので, これについて触れる.

1. Kontsevich 不変量 まず始めにコード図によりあらわされる結び目の Kontsevich 不変量の構成法を述べる. [1]

1.1. コード図 X を向きのついた円周 S^1 や線分 I のいくつかの直和集合とする. X 上のコード図とは, X 上の相異なる偶数個の点を 2 個ずつ組にしたものである. 図では組になっている 2 点を点線で結んで表現する. X を全体として不変にする連続変形によって移り合うコード図は同値なものを見なす. $2n$ 個の点からなるコード図の次数を n と定義し, X 上の次数 n のコード図の同値類の形式的な一次結合全体を $C_n(X)$ と書く. この空間を 4 項関係式 と呼ばれる図 1 の関係式で割った空間を $A_n(X)$ であらわす.

$$A_n(X) = C_n(X) / 4 \text{ 項関係式}$$

である. さらに

$$A(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n(X)$$

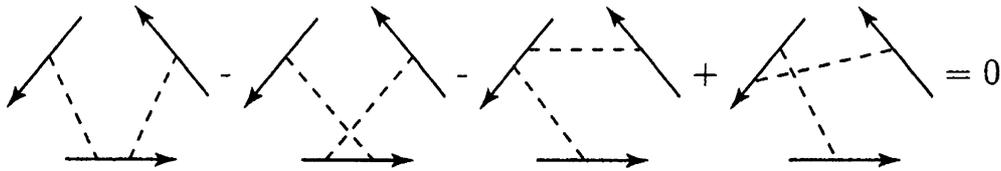


図 1: 4項関係式

とする。 $\mathcal{A}(X)$ にはコード図の次数から決まる grading が入っているので、これを持ちいて完備化しておく。すなわち、無限和

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad (x_n \in \mathcal{A}_n(X))$$

も $\mathcal{A}(X)$ に入るとする。コード図に対して、そのコードを分配することにより、余積

$$\Delta : \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X) \otimes \mathcal{A}(X)$$

が定義され、 $\mathcal{A}(X)$ は余代数となる。また、 $X = S^1$ のときは、図 2 のような連結和によって積が定義される。連結和を行う場所を変えると一般に異なるコード図が得られるが、4項関係式より、 $\mathcal{A}(S^1)$ の元としては一致し、積は well-defined である。これらの余積と積により $\mathcal{A}(X)$ にはホップ代数の構造が入る。

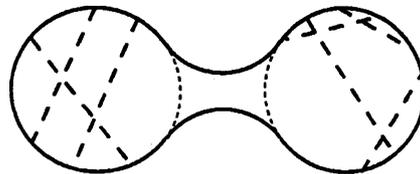


図 2: コード図の連結和

さて、コード図のコードで、その端点 p, q が X の同じ成分に入り、 p と q の間に他のコードの端点が無いとき、このコードを **孤立したコード** と呼ぶ。そして $\mathcal{A}(X)$ を、孤立したコードを持つコード図を 0 とする関係で割ったものを $\hat{\mathcal{A}}(X)$ とする。 $\hat{\mathcal{A}}(X)$ も余代数となり、 $\hat{\mathcal{A}}(S^1)$ にもホップ代数の構造が入る。

1.2. 反復積分 \mathbb{R}^3 中の向きをついた結び目 K に対して、反復積分と呼ばれる方法を用いて $\hat{\mathcal{A}}(X)$ 中に対応する元 $\hat{Z}(K)$ を定義する。まず \mathbb{R}^3 を複素平面 \mathbb{C} と数直線 \mathbb{R} の直積と見なし、 \mathbb{C} に対応するパラメータを z , \mathbb{R} に対応するパラメータを t とする。また、 K は一般の位置にあり、 t が一定の平面とは交わるか接するとき

は接点が1点になっているとする。そして

$$\widehat{Z}(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \times \int_{t_1 < t_2 < \dots < t_n} \sum_{\substack{z_1, z'_1 \text{ s.t.} \\ (z_1, t_1), (z'_1, t_1) \in K \\ \dots \\ z_n, z'_n \text{ s.t.} \\ (z_n, t_n), (z'_n, t_n) \in K}} (-1)^{\#P_1} \prod_{k=1}^n d\log(z_k - z'_k) \times D_{z_1, z'_1, \dots, z_n, z'_n}$$

とする。ここで $D_{z_1, z'_1, \dots, z_n, z'_n}$ は、図3のように K 上の点の組 $(z_1, z'_1), \dots, (z_n, z'_n)$ に対応する S^1 上のコード図をあらわし、 $\#P_1$ は、 z_i あるいは z'_i に対応する K の点で K の向きが下向きになっているものの個数をあらわす。 t_1, \dots, t_n を固定したとき、組 (z_k, z'_k) は平面 $t = t_k$ と K との交点から2点を選ぶことで決まるので、上の積分は n を決めるごとに $\widehat{\mathcal{A}}_n(S^1)$ の元を定めている。また、 K の極大、極小

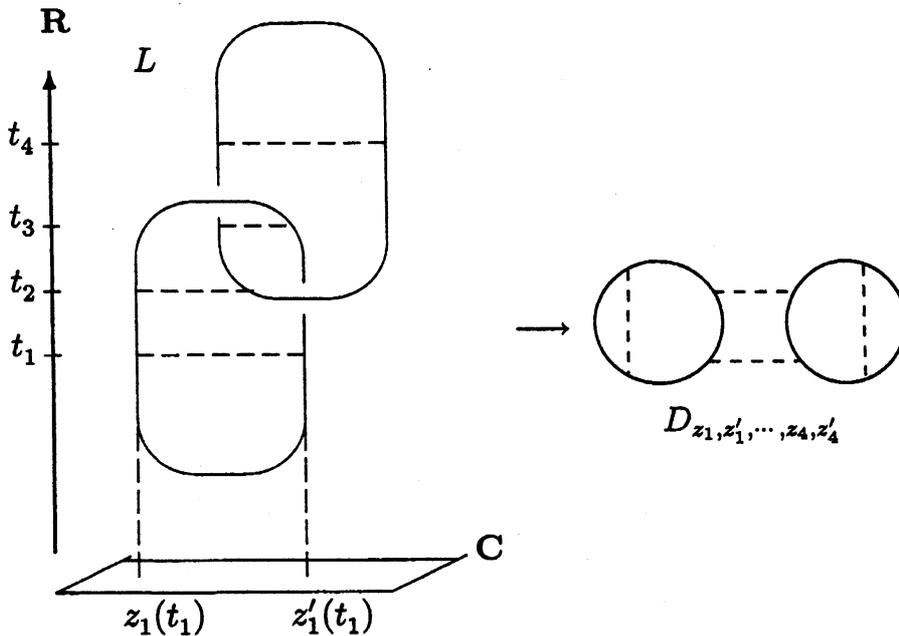


図3: 結び目や絡み目上の反復積分

点のところでは、 \log の中身が0になる組み合わせもあり、積分が発散してしまうが、この場合は、対応するコード図が孤立したコードを含むので、 $\widehat{\mathcal{A}}_n(S^1)$ 中では発散積分の寄与は除外されており、 $\widehat{Z}(K)$ の n 次の部分は $\widehat{\mathcal{A}}_n(S^1)$ の元をきちんと定

義している。これより、 $\widehat{Z}(K)$ は $\widehat{A}(S^1)$ の元を定めている。また、次数 0 に対応するところは、1 と定める。こうすると、次数による grading で完備化された $\widehat{A}(S^1)$ の中では、 $\widehat{Z}(K)$ は可逆元である。

1.3. 結び目の不変量 反復積分により定義された $\widehat{Z}(K)$ は結び目 K の紐の水平方向に関する連続変形では不変なことがわかる。これは 4 項関係式による性質である。しかし、紐を変形して新たに極大極小点を作るような変形では変化してしまう。これは、極大、極小点が 2 個ずつある自明な結び目 U に対応する元 ν を用いて正規化することができる。

$$\nu = \widehat{Z}(U)^{-1}$$

K の極大点の個数を $m(K)$ として

$$\widetilde{Z}(K) = \widehat{Z}(K) \cdot \nu^{m(K)-1}$$

とする。

定理 (Kontsevich) $\widetilde{Z}(K)$ は結び目の不変量である。

$\widetilde{Z}(K)$ は Kontsevich 不変量と呼ばれ、Vassiliev 不変量や Jones 不変量などの量子不変量を含む大変一般的な不変量である。



図 4: 極大、極小点が 2 個ずつある自明な結び目 U

2. KZ associator Kontsevich 不変量を実際に反復積分で計算するのは大変であるが、以下に述べるような方法（詳しくは文献 [3] 参照）で基本的な構成要素に分解してある程度実際に計算できるようになる。このとき、交点に対応する部分は指数関数的にあらわされるのであるが、associator と呼ばれるものも必要になり、これの表示に多重ゼータ値がでてくる。このことから、多重ゼータ値の研究に associator が関係してくる。

2.1. Non-associative tangle 結び目の図を 2 本の水平線で切り取ったような、端点のある結び目の図のようなものを考える。上の水平線上に n_1 個の点、下の水平線上に n_2 個の点があり、これらの点を端点とする結び目の図、すなわちこれら

二本の線の間に入り、紐をあらわす線の交点で線の上下がわかるようにした図のことを **tangle** という。さらに、水平線上の n_1 個、あるいは n_2 個の点に対し、これを線上で括弧をつけたものを考え、これを **non-associative tangle** と呼ぶ。

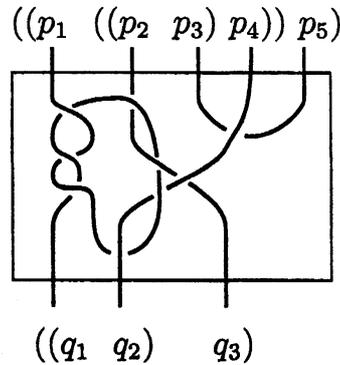
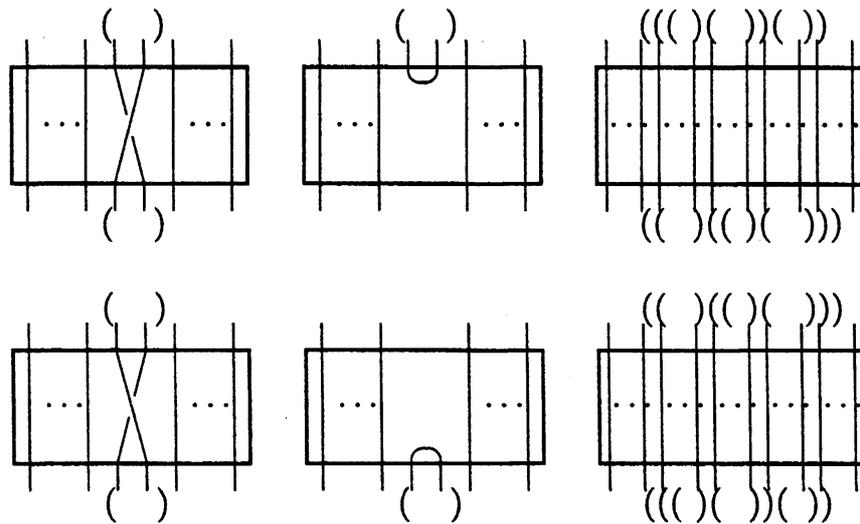


図 5: Non-associative tangle の例

Non-associative tangle は次の形の元の組み合わせに分解することができる。



交点 極大, 極小点 associator
(括弧の付け替え)

図 6: Non-associative tangle の生成元

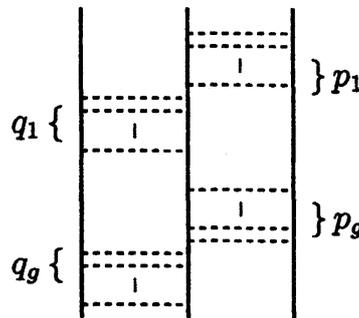
これらの生成元の Kontsevich 不変量を、括弧でくくられた点が括弧の外の点に比べて非常に近くにあるとして反復積分を用いて定義する。実際には発散する部分があるので、これを正規化して発散しないようにしたものとするのである。生成元に対しては以下のように定義し、一般の non-associative tangle については、生

図 9: コード図 A, B

とし, J に対応する A, B からなる語 Ω_J を

$$\Omega_J = B^{p_1} A^{q_1} B^{p_2} A^{q_2} \dots B^{p_g} A^{q_g}$$

と定義する. 対応するコード図は図 10 のようになる. これに対し,

図 10: Ω_J のあらわすコード図

$$p(J) = \sum_{k=1}^g p_k, \quad q(J) = \sum_{k=1}^g q_k, \quad |J| = p(J) + q(J), \quad g(J) = g,$$

$$\zeta_J = \zeta(p_1 + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_1 - 1}, \dots, p_g + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_g - 1})$$

とする. この ζ は多重ゼータ値のことで, 次で定義される.

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_r) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r}}$$

さらに

$$c_{J,0,0} = \frac{(-1)^{q(J)}}{(2\pi\sqrt{-1})^{|J|}} \zeta_J, \quad c_{J,0,\ell} = (-1)^\ell \sum_{J'} m_{J,J'} c_{J',0,0}$$

ここで $J' = (p'_1, q'_1, \dots, p'_g, q'_g)$ で, $\Omega_{J'}$ が Ω_J に B を ℓ 個最右端以外のところに挿入して得られる A, B の語となるもので, $m_{J,J'}$ はこのような方法で J から J' を得る方法の場合の数である. 同様に

$$c_{J,k,\ell} = (-1)^k \sum_{J'} m_{J,J'} c_{J',0,\ell}$$

とする。ここで $J' = (p'_1, q'_1, \dots, p'_{g'}, q'_{g'})$ で、 $\Omega_{J'} A^\ell$ が $\Omega_J B^\ell$ に A を k 個最左端以外のところに挿入して得られる A, B の語となるもので、 $m_{J,J'}$ はこのような方法で J から J' を得る方法の場合の数である。例えば、

$$c_{(1,1),0,1} = -2c_{(2,1),0,0} = \frac{2}{(2\pi\sqrt{-1})^3} \zeta(3)$$

$$c_{(1,1),1,1} = -2c_{(1,2),0,1} = 2c_{(1,1,1,1),0,0} + 4c_{(2,2),0,0} = \frac{2}{(2\pi\sqrt{-1})^4} (\zeta(2,2) + 2\zeta(3,1))$$

これらを用いると、 Φ は以下のように定義される。

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{[m/2]} \sum_{\substack{k,\ell \geq 0 \\ g(J)=g \\ k+\ell+|J|=m}} c_{J,k,\ell} A^k \Omega_J B^\ell$$

但し、 J が空列 ϕ のときは $c_{\phi,0,0} = 1$ とする。具体的に $m \leq 2$ の部分を求めると、

$$c_{(1,1),0,0} = \frac{\zeta(2)}{4\pi^2}, \quad c_{\phi,1,1} = -\frac{\zeta(2)}{4\pi^2}$$

より

$$\Phi = 1 + \frac{\zeta(2)}{4\pi^2} (BA - AB) + \dots$$

となる。また、 Φ^{-1} は Φ の A と B を入れ替えたものとなる。

これを一般の associator に拡張するために、 X 上のコード図 D の X の連結成分 C に関する 2 重化 Δ_C を定義する。 X_C を、 C のかわりに、 C_1, C_2 という 2 つ

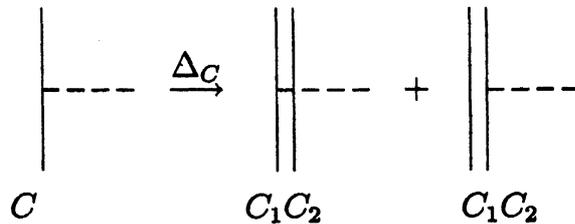


図 11: X の成分 C に対応する Δ_C

の C と同相な成分を持つ 1 次元多様体とし、 D の C に端点を持つコードに対し、 C_1 に対応する端点を持つコード図と C_2 に端点を持つコード図とを考える。 C 上に n 個の端点があるとき、それぞれを C_1 あるいは C_2 に割り振ることにより、 2^n 個

のコード図が考えられるが、これらのすべての和を $\Delta_C(D)$ とする。さらに、 n 重化を

$$\Delta_C^{(n)} = \Delta_{C_{n-1}} \cdots \Delta_{C_2} \Delta_C$$

で定義する。そして一般の associator については Φ の 3 本の線をそれぞれ多重化したものを対応させる。これで non-associative tangle の Kontsevich 不変量が定義されたことになる。

3. Pentagon, Hexagon 関係式 Tangle から反復積分で定義される Kontsevich 不変量はタングルの端点を固定した変形に関して不変になる。このことから、non-associative tangle の生成元がいくつかの関係式を満たさなければならないことがわかるが、中でも以下に述べる pentagon 関係式と hexagon 関係式が基本的である。

3.1. Pentagon 関係式 Kontsevich 不変量は下図のような変形では変化しない。これを non-associative tangle の Kontsevich に翻訳すると次の関係式が成り立つこととなる。

$$\Phi_{123} \cdot \Delta_2 \Phi_{123} \cdot \Phi_{234} = \Delta_1 \Phi_{123} \cdot \Delta_3 \Phi_{123}$$

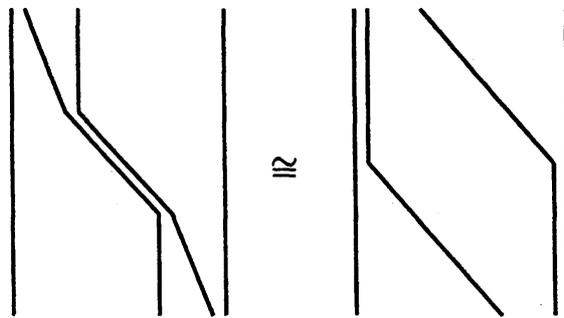


図 12: Pentagon 関係式

3.2. Hexagon 関係式 Kontsevich 不変量は下図のような変形では変化しない。これを non-associative tangle の Kontsevich に翻訳すると次の関係式が成り立つこととなる。

$$\Phi_{123} \cdot R_{12} \cdot \Phi_{213}^{-1} \cdot R_{13} \cdot \Phi_{231} = \Delta_2 R_{12}$$

3.3. $A_h(I^3)$ の構造 三本の線分の直和 I^3 上のコード図 A, B, C を、それぞれ 1 番目と 2 番目、2 番目と 3 番目、1 番目と 3 番目の線分を結ぶコード 1 つからなる

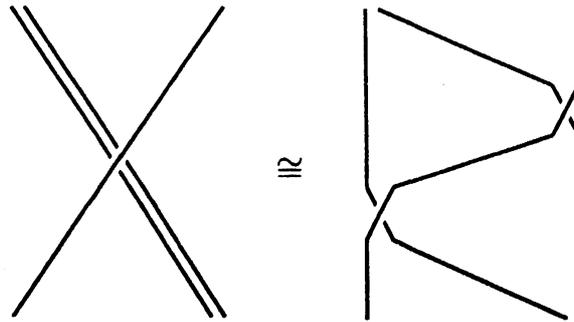


図 13: Hexagon 関係式

コード図とする。 $\widehat{\mathcal{A}}(I^3)$ は、コード図を繋ぐ操作により積が定義され、これにより線形環（多元環、代数とも呼ばれる）になる。この積に関して A, B, C が生成する部分線形環を $\widehat{\mathcal{A}}_h(I^3)$ とおく。4項関係式より、

$$\widehat{\mathcal{A}}_h(I^3) = \langle A, B, C \mid AC = CA + BA - AB \rangle$$

となり、任意の元は $C^n w$, w は A, B の語、という形の元の一次結合となる。特に、associator Φ については交換子の積の形で書けるので、 $\widehat{\mathcal{A}}_h(I^3)$ 中の A, B の生成する部分線形環 $C \langle A, b \rangle$ に含まれる。 $C \langle A, b \rangle$ は自由線形環で、非可換多項式環と見なせるものである。さらに、

$$\log \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\Phi - 1)^k}{k}$$

とすると、 $\log \Phi$ は $C \langle A, b \rangle$ 中の A, B の生成する自由リー環に含まれる。ただし、 $[A, B] = AB - BA$ とする。

3.4. Hexagon 関係式から定まる多重ゼータ値の関係式 Pentagon, Hexagon 関係式は4項関係式から従うものであるが、実際に Φ を代入してみると、Hexagon 関係式から多重ゼータ値の関係式が得られることがわかる。例として2次までの部分で計算してみる。まず、Hexagon 関係式は次のように変形される。

$$(\Delta_2 R_{12})^{-1} \cdot \Phi_{231} \cdot R_{13} \cdot \Phi_{213}^{-1} \cdot R_{12} \cdot \Phi_{123} = 1$$

この左辺を具体的に展開して2次までの項を見る。

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{A+C}{2} + \frac{(A+C)^2}{2^2 2!} - \dots\right) \left(1 + \frac{\zeta(2)}{4\pi^2} [C, B] + \dots\right) \left(1 + \frac{C}{2} + \frac{C^2}{2^2 2!} + \dots\right) \times \\
 & \quad \left(1 - \frac{\zeta(2)}{4\pi^2} [C, A] + \dots\right) \left(1 + \frac{A}{2} + \frac{A^2}{2^2 2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{\zeta(2)}{4\pi^2} [B, A] + \dots\right) \\
 = & 1 + \frac{(A+C)^2 + C^2 + A^2}{8} + \frac{\zeta(2)}{4\pi^2} ([C, B] - [C, A] + [B, A]) + \frac{-(A+C)^2 + CA}{4} + \dots \\
 = & 1 + \frac{[C, A]}{8} + \frac{\zeta(2)}{4\pi^2} (-3[C, A]) + \dots
 \end{aligned}$$

となり、これが1になることより

$$\frac{\zeta(2)}{4\pi^2} = \frac{1}{3 \times 8} = \frac{1}{24}$$

となり、

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

であることがわかる。

高次の項に関しても、定数項以外の単項式の各係数が0になるということより、多重ゼータ値に関する \mathbb{Q} 上の多数の関係式が得られる。これらにより関係式がすべて得られるのではないかと期待しているのであるが、具体的にはほとんど計算していない。ただ、Kurlin [2] により $L/[[L, L], [L, L]]$ での考察がなされたので、その結果を紹介する。ここで L は A, B で生成される自由リー環である。

3.5. Compressed associator $[[L, L], [L, L]]$ を法としたところでの associator を文献 [2] では compressed associator と呼び、pentagon, hexagon 関係式に基づく詳細な考察をおこなっている。そして Corollary 1.6 (c) で次が示されている。

$$\Phi \equiv \exp \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} \cdot \frac{\lambda^n + \mu^n - (\lambda + \mu)^n}{(\pi\sqrt{-1})^n} \right) \pmod{[[L, L], [L, L]}}$$

(右辺の各項 $\lambda^k \mu^\ell$ を $(\text{ad } A)^{k-1} (\text{ad } B)^{\ell-1} [A, B]$ と読み替える)

但し、奇数に対応する $\zeta(n)$ やこれらのなす単項式 $\zeta(3)^p \zeta(5)^q \zeta(7)^r$ については pentagon や hexagon 関係式からは何も制限がつかず、 $[[L, L], [L, L]]$ を法とするときは、これらの単項式に任意の値を代入しても associator となる。(KZ associator ではないが、pentagon, hexagon 関係式を満たし、non-associative tangle の不変量を定めるものとなる)

上の式は pentagon, hexagon 関係式を用いて得られたものであるが, 寺杉氏によるとモチーフを用いた考察からも同様の式が得られるそうである。(講演ではこの式を紹介せず, 低次の所での具体的な展開式のみを紹介したが, 講演後上記のような式が別の考察で知られているとの指摘を受け, 再度 [2] をチェックすると主結果の一つとして述べられていた)

2.2 節で与えられた Φ の具体的な記述を $[[L, L], [L, L]]$ を法として簡約化し, 上の式と比較することで多重ゼータ値に関する関係式を得ることができる.

4. **終わりに** 前節の [2] の結果と数論的考察の結果とが符合することからいっても, pentagon, hexagon 関係式は多重ゼータ値を \mathbb{Q} 上で見るための情報を本質的にあらわしているのではないかと思われる. そして, pentagon, hexagon 関係式から \mathbb{Q} 上の多重ゼータ値の関係式がすべて得られるのではないかと期待しているわけだが, 実際にこのことを示すのは大変そうである. そこで, まずは pentagon, hexagon 関係式と, double shuffle 関係式などとの関係を明らかにすべきであろう. これがわかれば, 今までの多重ゼータ値に関する研究を幾何学的に見直すことができ, 新たな展開が生まれるのではないかと密かに期待している.

参考文献

- [1] D. BarNatan: *On the Vassiliev Knot Invariants*, *Topology* **34** (1995) 423–472.
- [2] V. Kurlin: *Compressed Drinfeld Associators*, math.GT/0408398.
- [3] Thang Q. T. Le and Jun Murakami: *Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral*, *Commun. Math. Phys.* **168** (1995), 535–562.