数理解析研究所講究録
第 1553 巻 2007 年 66-79



# 複素Monge-Ampère方程式の最近の動向
## (S. Kołodziejの仕事を中心に)

大沢健夫
(名大・多元数理)

序. この半世紀ほどの間に、多重劣調和関数および多重極状集合を対象とする分科として、多重ポテンシャル論(pluripotential theory)が発展して来た。多重劣調和関数は元来、正則領域の境界の擬凸性を幾何学的に表現するための手段として岡潔によって導入された。岡の定理によれば、正則領域の境界は多重劣調和関数が $+\infty$ に発散する点の集合として特徴づけられる。つまり正則関数の除去不可能な特異点の集合は、多重劣調和関数の特異点集合(上の意味での)に他ならない。これに対して多重劣調和関数が $-\infty$ をとる点からなる多重極状集合は、'小さい'集合であり、$\mathbb{C}$の部分集合についてはこれは対数容量が0であることと同じである。

P. Lelongは正カレントやLelong数を導入して多重極状集合の研究を提唱し、多重極状性が除去可能性(後出)に一致するであろうと予想した。これと同じ頃 S.S. Chern - H.I. Levine - L. Nirenberg は複素多様体上のサイクルを計量に依存しない方法で測るためにリーマン面上のサイクルに対する調和周長(harmonic length)を一般化したが、そのために彼らが用いた不等式に基いて、E. Bedford - B.A. Taylor は複素Monge-Ampère方程式に対するDirichlet問題を解き、対数容量の一般化として相対容量の概念を導入した。その結果、Lelongの予想も解決された。Bedford-Taylorのこの仕事や、それに続くH. Alexander-Taylorの仕事を基礎に、多重ポテンシャル論はこの20年の間に大いに発展して来たわけであるが、その中でもS. Kołodziejの一連の仕事は重要な評価式を含んでおり、これは多重

ポテンシャル論を複素多様体上でも展開する上で不可欠であると思われる。

そこで、小論ではKołodziejの結果に辿り着くことを目的として、多重ポテンシャル論と複素Monge-Ampère方程式の概説を試みたいと思う。筆者の勉強不足のために解説が粗雑にならざるを得ない部分もあるが、そこには目を瞑って頂いて全体の流れを感じ取って下されば幸いである。

## §1. Dirichlet問題

$D$は$\mathbb{C}^n$の領域で、特に断わらなければ有界であり その境界$\partial D$は$C^2$級であるとする。よく知られているように、

**定理 0.** 任意の連続関数 $\varphi : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し、$\overline{D}$上の連続関数 $u$ で $D$上で $\Delta u = 0$ をみたし、$\partial D$上では$\varphi$に一致するものが唯一つ存在する。

$n \geq 2$ のとき、この結果を多変数の正則関数の理論に応用する際、以下のような不具合がある。

1. 調和関数の空間は正則な座標変換で不変ではない。
2. 多重調和関数の空間は正則な座標変換で不変だが、その境界値は微分方程式で縛られる。つまり多重調和関数のクラスはDirichlet問題にとって狭過ぎる。

そこでH. Bremermannは多重劣調和関数に対してDirichlet問題を解こうと考えた。

**定義.** $u : D \longrightarrow [-\infty, \infty)$ に対し、$u$が多重劣調和(plurisubharmonic = PSH)であるとは、

1) $u$は上半連続(usc)であり

かつ

2) $\forall z_0 \in D$, $\forall \xi_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対して $\zeta \longmapsto u(z_0 + \zeta \xi_0)$ は劣調和($\equiv -\infty$も許す)

であることを言う。

D上の多重劣調和関数全体の集合を$PSH(D)$で表す. $z=(z_1,\cdots,z_n)$を$\mathbb{C}^n$の座標とし、$|z|=\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)^{1/2}$とおくと、$\log|z|\in PSH(\mathbb{C}^n)$である。$D\neq\mathbb{C}^n$のとき、Dが正則領域ならば$\delta(z):=\inf_{w\in\partial D}|z-w|$に対し、$-\log\delta\in PSH(D)$である(岡潔). また、一変数の場合(=劣調和関数)と違って、PSH関数($n\geq 2$)に対してはRiesz分解(劣調和 = 調和 + ポテンシャル)に対応するものは無い。

PSH関数の中でDirichlet問題の解となるクラスをBremermannは次の様に設定した。

**定義.** $u\in PSH(D)$に対し、$u$が極大である($u\in \mathcal{M}PSH(D)$)とは、D内の相対コンパクトな開集合Gおよび$\forall v:\overline{G}\xrightarrow{usc}[-\infty,\infty)$ s.t. $v\in PSH(G)$かつ$v|\partial G=u|\partial G$, に対してつねに$v|G\leq u|G$が成立することを言う.

この極大性は一変数の場合、劣調和関数の中で調和関数を特徴づけたのだった。

**定理 1.** (Bremermann 1959) Dが強擬凸ならば, $\forall\varphi\in C^0(\partial D)$ (=$\{\partial D$上の実数値連続関数$\}$)に対し、$\mathcal{M}PSH(D)\cap C^0(\overline{D})$の要素$u$で$u|\partial D=\varphi$をみたすものが唯一つ存在する。

Bremermannの定理において、Dの擬凸性は落とせない。例えば$D=\{z\in\mathbb{C}^2\mid 1<|z|<2\}$とすると、境界値$\varphi$として

$$\varphi(z)=\begin{cases}0 & (|z|=2)\\ 1 & (|z|=1)\end{cases}$$

を与えたとき. $\forall u\in PSH(D)\cap C^0(\overline{D})$に対して$u|\{z_2=1\}\cap\overline{D}$の$z_1=0$

における値は $|z_1| = 1$ におけるその上限を越えることはない（最大値原理）が、これは $u|\partial D = \varphi$ と背反する。よってこの領域に対してはBremermannのDirichlet問題は解けない。

極大PSHの例としては $(z_1, z_2) \longmapsto \log|z_1 z_2|$ などがある。

命題 1. $u \in C^2(D)$ のとき次は同値である。

1) $u \in \mathcal{M}PSH(D)$

2) $u \in PSH(D)$ であり、かつ

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) \equiv 0$$

Hans-Joachim Bremermann (1926−1996)

(1) $\Rightarrow$ 2) : Bremermann, 2) $\Rightarrow$ 1) N. Kerzmann 1977.)

## §2. 複素Monge-Ampère方程式（CMAE）

Dは強擬凸であるとする。命題1により、多変数関数論の枠内ではラプラス作用素の代わりにモンジュ・アンペール作用素

$$u \longmapsto (dd^c u)^n \qquad (d^c = i(\bar{\partial} - \partial))$$

に対してDirichlet問題を考えるのが自然である。

E. Bedford - B. A. Taylor (1976) はこれを次の形で考えた。

CMAE（Dirichlet問題）

$$(*) \quad \begin{cases} u \in PSH(D) \cap C^0(\bar{D}) \\ (dd^c u)^n = f d\lambda \\ u|\partial D = \varphi, \quad \varphi \in C^0(\partial D) \end{cases}$$

ただし $f \in C^0(\bar{D})$, $f \geq 0$ とする。

(*) の劣解 (subsolution): $\mathcal{C}$ を $n$ 次半正値Hermite行列全体の集合とし、$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty)$ を $\mathcal{F}(A) = (\det A)^{1/n}$ により定める。さらにこの対応を拡げて D上の $\mathcal{C}$ 値測度 $\mu$ に対し

$$\mathcal{F}\mu(E) := \inf \sum_j \mathcal{F}(\mu(E_j))$$

とおく。ここで inf は E の非交有限Borel分割 $E = \dot{\bigcup_j} E_j$ 全てにわたる (C. Goffman - J. Serrin 1964).

$u \in PSH(D)$ に対し、一旦 $(\partial^2 u / \partial z_j \partial \bar{z}_k)$ を $\mathcal{C}$ 値測度と見なした後、

$$\Phi(u) = 4(n!)^{1/n} \mathcal{F}(\partial^2 u / \partial z_j \partial \bar{z}_k)$$

とおく。これを用いて (*) の劣解の集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} = \left\{ v \in PSH(D) \cap C^0(\bar{D}) \,\middle|\, \Phi(v) \geq f^{1/n} d\lambda ,\ v|\partial\Omega \leq \varphi \right\}$$

により定め、$u = \sup_{\mathcal{S}} v$ とおく。すると次が成立する。

**定理 2.** (Bedford - Taylor 1976) $u$ は (*) の唯一の解である。

ちなみに、L. Caffarelli - J. J. Kohn - L. Nirenberg - J. Spruck (1985) によれば、$\varphi, f \in C^\infty$ ならば $u|D \in C^\infty$ である。Bedford - J.E. Fornaess (1979) によれば $\varphi, f \in C^\infty$ であっても $u \in C^\infty(\bar{D})$ であるとは限らない。

**§3. 多重ポテンシャル論** 'Encyclopedia of Mathematics' (ソ連・ロシア版) の Supplement III には PLURIPOTENTIAL THEORY の項目があり、そこには 'Pluripotential theory is a natural branch of potential theory in the setting of function theory of several complex variables' とある。

(原文は 'a natural branch' ではなく 'the natural brand' となっているが何かの間違いだろう)

このような、ポテンシャル論の立場から見た多重ポテンシャル論というものはBedford, Taylor らの理論ともよく符合している。一方、P. Lelong は、多重劣調和関数や正カレントというものは 'les objets souples de l'analyse complexe' であり、正則関数や解析的集合に比べて切り貼りがしやすく扱い易いので、これらを多変数関数論の研究に大いに活用しようという立場から研究をはじめたようである。実際、正則関数と多重劣調和関数は、関理論や∂方程式論においては切り離せない。しかし、Lelong が提起した除去可能性と多重極状性の同値性の問題は、定理2の応用として解決された。それはポテンシャル論的立場からの理解の深まりといえよう。

**定義.** $E \subset D$ に対し、$E$ の $D$ に対する相対容量 $cap(E, D)$ を

$$cap(E, D) = \sup\left\{ \int_E (dd^c u)^n \;\middle|\; u \in PSH(D),\ -1 \le u < 0 \right\}$$

によって定義する。さらに、$E$ の外相対容量 $cap^*(E, D)$ を

$$cap^*(E, D) = \inf\left\{ cap(U, D) \;\middle|\; E \subset U \text{ open} \right\}$$

で定める。

この定義が可能であるのは次の命題による。

**命題2.** (Chern-Levine-Nirenberg 1969) $K \subset\subset U \subset\subset D$ に対し、正数 $C$ が存在して、$u_1, \cdots, u_k \in PSH(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$ および $D$ 上の $(n-k, n-k)$ 型正閉カレント $T$ に対してつねに

$$\| dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T \|_K \le C \|u_1\|_U \cdots \|u_k\|_U \|T\|_U$$

が成立する。ただし $\| \ \|_K$, $\| \ \|_U$ はそれぞれ $K$, $U$ 上の全変動を表す。

$\mathrm{cap}(E,D)=0$ をみたす集合は'小さい'と考えられる。実際には $\mathrm{cap}^*(E,D)$ について次の命題が成立する。

**命題 3**. $D$ が超凸 (i.e. $\exists \psi \in PSH(D)\cap C^0(\bar{D})\setminus\{0\}$ s.t. $\psi|\partial D=0$) ならば $D$ の部分集合 $E$ に対し次は同値である。

1) $E\subset\{v=-\infty\}$ をみたす $v\in PSH\cap L^1_{loc}(D)$ が存在する。

2) $\mathrm{cap}^*(E,D)=0$.

**定義**. $E$ が多重極状である :$\Longleftrightarrow$ $E$ の各点が $\mathrm{cap}^*(E\cap U,U)=0$ をみたす近傍 $U$ をもつ。

**定義**. $E$ が除去可能 (*negligible*) であるとは、$\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset PSH(D)$ が存在して $E\subset\{u<u^*\}$ となることをいう。ただし $u=\sup_\alpha u_\alpha$, $u^*(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{|z'-z|<\varepsilon} u(z')\right)$.

**定義**. (極値的 PSH) $E\subset D$ に対し.

$$u_E := \sup\left\{u\in PSH(D)\,\middle|\, u<0,\ u|E\leq -1\right\}$$

**定理 3**. (Bedford-Taylor 1982) $D$ が超凸ならば、$\forall E\subset\subset D$ に対して

$$\mathrm{cap}^*(E,D)=\int_D (dd^c u_E^*)^n.$$

この結果を用いると次が得られる。(Lelong 予想の解決)

**定理 4**. (Bedford-Taylor 1982) 除去可能集合は多重極状である。

さらに B. Josefson による次の結果 (これも Lelong の予想であった) の別証が得られる。

**定理 5**. (Josefson 1978) $\mathbb{C}^n$ の部分集合 $E$ が多重極状ならば、$PSH(\mathbb{C}^n)$ の要素 $h$ が存在して $E\subset h^{-1}(-\infty)$ となる。

極値的PSHはBedford-Taylor以前に、CMAEとは独立にJ. Siciak (1962), V. P. Zahariuta (1975)により整関数論において上とは異なる情況で導入されていた。H. AlexanderとTaylorは、これら新旧二つの極値的PSHの関係を調べた。

$$\mathcal{L}\ (=\text{Lelong族}) :=$$
$$= \left\{ u \in PSH(\mathbb{C}^n) \,\middle|\, u(z) - \log(1+|z|) < c\ (= c(u)) \right\}$$

とおく。

定義. $E \subset \mathbb{C}^n$ に対し、

$$L_E(z) = \sup\left\{ u(z) \,\middle|\, u \in \mathcal{L},\ u|E \leq 0 \right\}$$

とおく。$L_E$ はSiciak-Zahariutaの極値的関数(extremal function)と呼ばれる。(ポーランドでは単にSiciakの極値的関数と呼んでいるようである。)

Kを$\mathbb{C}^n$のコンパクト集合とし、正数Rに対して

$$T_R(K) = \exp\left(-\sup\left\{ L_K^*(z) \,\middle|\, |z| \leq R \right\}\right)$$

とおく。$B_R$で開球$\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z| < R \}$を表す。

定理 **6**. (Alexander-Taylor 1984)　$K \subset B_r$, $r < R$ ならば

$$\exp\left(-A(r)(\mathrm{cap}(K, B_R))^{-1}\right) \leq T_R(K) \leq \exp\left(-2\pi(\mathrm{cap}(K, B_R))^{-1/n}\right).$$

ただし $A(r)$ は $r$ には依存するがKにはよらない正数を表す。

ちなみに、$u \in \mathcal{L}$ に対し $u$ のRobin関数 $\rho_u$ を

$$\rho_u(z) = \limsup_{t \in \mathbb{C}} \left( u(tz) - \log|tz| \right)$$

によって定め、Eの容量 $Cap(E)$ を

$$Cap(E) = \exp\left(-\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \rho_{L_E^*}(z)\right)$$

によって定義すると、$Cap(E)$ が Choquet の公理系をみたすことが言える。これを示したのが Kołodziej（コウォージー）の最初の論文 'The logarithmic capacity in $\mathbb{C}^n$, Ann. Polon. Math. 48 (1988), 253-267' であった。

## §4. Kołodziej の仕事

1. 予備的考察と問題の発見. Kołodziej は (*) を次のように一般化した問題を考えた（1994年頃）. 以下でもDは強擬凸とする。

$L^\infty$- CMAE（Dirichlet問題）

$$(**)\quad \begin{cases} u \in PSH \cap L^\infty(D) \\ (dd^c u)^n = d\mu \\ \lim\limits_{\zeta\to z} u(\zeta) = \varphi(z), \quad \varphi \in C^0(\partial D) \end{cases}$$

(**)が可解ならば、容易にわかるように測度 $d\mu$ は次の条件をみたさなければならない： $\exists C>0$ s.t. $\forall E\subset D$, $\mu(E) \le C\, cap(E, D)$.

しかしこれは十分条件ではない.

反例： $D = \left\{ z\in\mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{2} \right\}$, $d\mu = \dfrac{d\lambda}{|z|^2(\log|z|)^2}$ . ただし $d\lambda$ は Lebesgue 測度を表す.

そこでシャープな十分条件を求めることが問題になるが、これに答えたのが 'Some sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator, Ann. Polon. Math. 65 (1996), 11-21' であり、その中で基本的な評価式が確立されたのである。

2. Kołodziej の測度族と評価式. $\psi$ は $[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への単調増加関数で、$\lim_{t\to\infty}\psi(t)/t = \infty$ かつ $\exists a>0\ \exists t_0>0$ s.t. $\forall t>t_0$ $2t \le \psi(2t) \le a\psi(t)$ であるとする. このような $\psi$ に対して

$$L^{\psi}(D) = \left\{ f\in L^1(D) \,\middle|\, \int_D \psi(|f|)d\lambda < \infty \right\}$$

$$L^{\psi}_{c_0}\ (= L^{\psi}_{c_0}(D)) = \left\{ f\in L^1(D) \,\middle|\, f\ge 0 \text{ かつ } \int_D \psi(f)d\lambda \le c_0 \right\}$$

とおく.

定義. $h:[0,\infty)\longrightarrow(1,\infty)$ が $K_n$ 級 (Kołodziej class of order $n$) であるとは, $h$ が以下の 1) ～ 3) をみたすことをいう.

1) $h$ は連続で、かつ単調増加である.

2) $\displaystyle\int_1^{\infty}(xh^{1/n}(x))^{-1}dx < \infty$

3) $\exists a>0\ \exists b>1\ \exists x_0>0$ s.t.
$\forall x>x_0$ $h(ax)\le bh(x)$.

$h\in K_n$ に対して

$$\psi_h(t) = |t|(\log(1+|t|))^n h(\log(1+|t|))$$

とおく.

定理 7. $\forall h\in K_n$, $\forall c_0$, $\forall f\in L^{\psi_h}_{c_0}$ に対し (*) は唯一つの解をもつ.

証明のスケッチ: $A>0$, $h\in K_n$ に対して $F(x)=Ax/h(x^{-1/n})$ とおき、D上の非負Borel測度の集合 $\mathcal{F}(A,h)$ を

$$\mathcal{F}(A,h) = \left\{ \mu \,\middle|\, \mu(K) \le F(\mathrm{cap}(K,D)),\ \forall K \underset{\text{コンパクト}}{\subset} D \right\}$$

によって定める。このとき

(†)　$h \in K_n$ かつ $\exists k$ s.t. $h(x) \le \mathrm{const.}(1+x)^k$ ならば
$\forall c_0\ \exists A > 0$ s.t.

$$L^{1/n}_{c_0} \subset \mathcal{F}(A,h).$$

これによって、$f_j \in L^{1/n}_{c_0} \cap C^0(\overline{D}) \xrightarrow[L^1]{} f \in L^{1/n}_{c_0}$ としたときの $f_j$ に対して定まる(*)の解 $u_j$ の収束が保証される。(実際の議論はかなり複雑に見えるが、煎じ詰めればこういうことのようである。)

定理7を用いて次の結果が得られる。

定理 **8**.　(**)は劣解をもてば唯一つの解をもつ。

(†)を示すために用いられる次の評価式は基本的であり、他にも色々な応用がありそうである。

補題 **1**.（Kołodziejの評価式）　$u \in PSH(D) \cap C^0(\overline{D})$, $u|\partial D = 0$ かつ $\int_D (dd^c u)^n \le 1$ ならば，$\forall \alpha < 2$ に対して

$$\lambda(\{u < s\}) \le c \exp(-2\pi\alpha|s|)$$

が成り立つ。ただし $c$ は $u$ には依らない定数である。

証明のスケッチ：　$n=1$ のとき、これは対数容量のよく知られた性質(辻正次著. Potential Theory in Modern Function Theory, 1959, Theorem III 10)から簡単に分ることであり．$n>1$ のときは $n=1$ のときの結果と定理6をFubiniの定理を用いて組み合わせることにより示される．

3. 多様体への一般化. 'Development of Mathematics 1950–2000' という書物の中の C.O. Kiselman による論説 'Plurisubharmonic Functions and Potential Theory in Several Complex Variables' に挙げられている文献の中で, Kołodziej の論文 'The complex Monge-Ampère equation, Acta Math. 180 (1998), 69-117' は最新のものである。以下ではこれと 'Stability of solutions to the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds, Indiana Univ. Math. J. 52 (2003), 667-686.' を紹介するが, Kiselman が論説のアブストラクトに 'We survey the development of the theory of plurisubharmonic functions and the potential theory associated with them from their emergence in 1942 to 1997' と書いたことからも察せられるように, Kołodziej のこれらの仕事の真の評価は次世代の数学者たちに委ねられているようである, 見物する側としては鬼が出るか蛇が出るかといった所かもしれないが, 興味深く発展を見守りたい。

$(M, \omega)$ を $n$ 次元コンパクト Kähler 多様体とする. すなわち $M$ はコンパクトな $n$ 次元複素多様体であり, $\omega$ は Kähler 計量 $\sum g_{j\bar{k}}\, dz^j d\bar{z}^k$ の基本形式

$$\frac{i}{2} \sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k \qquad ( d\omega = 0 )$$

であるとする. $M$ 上の実関数 $\varphi$ を未知関数とする次の方程式を考える.

$$(\star) \qquad (\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n$$

ただし $f \geq 0$ であり, 右辺は $\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n$ をみたすものとする.

定理 9 ( S.T. Yau 1978 ) $f > 0$, $f \in C^k(M)$, $k \geq 3$ ならば $(\star)$ の解 $\varphi \in C^{k+1,\alpha}(M)$ $(0 \leq \alpha < 1)$ が定数差を除いて唯一つ存在する.

Yau がこれに基いて Calabi 予想を解決したことは有名である.

そこで、Bedford-Taylorの定理を一般化して定理7を得たのと同様に、$L^{\psi_h}_{c_0}$をうまく定義することにより

$$f_j \in L^{\psi_h}_{c_0} \cap C^k \xrightarrow{L^1} f \in L^{\psi_h}_{c_0}$$

としたときに、$f_j$に対するYauの解 $\varphi_j$ が収束するようにできるかという問題が生ずる。これに肯定的に答えたのがKołodziejの結果である。

まず $L^{\psi_h}_{c_0}$ の定義だが、それは次の通り。

1) $\varphi \in \omega\text{-PSH} :\Longleftrightarrow \omega_\varphi := \omega + dd^c\varphi \geq 0$

2) $\mathrm{cap}_\omega(E) := \sup\left\{ \int_E \omega_\varphi^n \;\middle|\; \varphi \in \omega\text{-PSH},\ 0 \leq \varphi \leq 1 \right\}$

3) $h \in K_n$, $c_0 \in \mathbb{R}$ に対して $\psi_h$は以前と同様とし、

$$L^{\psi_h}_{c_0} = \left\{ f \in L^1(M) \;\middle|\; f \geq 0, \int_M f\omega^n = 1, \int_M \psi_h(f)\,\omega^n \leq c_0 \right\}$$

とおく。

さらに $A > 0$ に対し

$$\mathcal{F}(A, h) = \left\{ f \in L^1(M) \;\middle|\; f \geq 0, \int_M f\omega^n = 1, \int_E f\omega^n \leq F(\mathrm{cap}_\omega(E)), \forall E \right\}$$

とおく。定理7と同様、$\mathcal{F}(A,h)$を補助的に用いて次が得られる。

**定理10.** $\forall h \in K_n$, $\forall f \in L^{\psi_h}_{c_0}$ に対し、$\exists \varphi \in C^0(M)$ s.t.

$$\omega_\varphi^n = f\omega^n \quad \text{かつ} \quad -C \leq \varphi \leq 0$$

ただし $C$ は $h$ と $c_0$ に依存する定数である。

解の一意性を保証するのは次の結果である。

定理 **11**. $f \in \mathcal{F}(A, h)$ かつ $\omega_{\varphi_1}^n = f\omega^n = \omega_{\varphi_2}^n$ ならば $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{const.}$

## §5. ここ数年間の動向

文献を挙げるに止めるが、いずれもKołodziejの上の仕事に深く関わっている。


- S. Kołodziej, The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory, Memoirs of AMS Vol. 178 No. 840 (2005) [サーベイ]

- V. Guedj and A. Zeriahi, Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds, J. Geom. Anal. 15 (2005), 607-639.

- G. Tian and Z. Zhang, On the Kähler-Ricci flow on projective manifolds of general type, Chinese Ann. Math. B27(2) (2006), 179-192.

- P. Eyssidieux, V. Guedj and A. Zeriahi, Singular Kähler-Einstein metrics, math. AG/0603431.

- X. Zhu, A mean value inequality for plurisubharmonic functions on a compact Kähler manifold, 数理研講究録 1487 (2006), 175-184.

- D.H. Phong, N. Sesum, and J. Sturm, Multiplier ideal sheaves and the Kähler-Ricci flow, arXiv: math. DG/0611794 v1 (27 Nov 2006).