

完全 2 分木に対する Path Distance Width の下界

群馬大学工学部 工学研究科 受川 和幸 (K.Ukegawa), 青木 一正 (K.Aoki), 大館 陽太 (Y.Otachi)
群馬大学工学部 情報工学科 小澤 恭平 (K.Kozawa), 山崎 浩一 (K.Yamazaki)
Department of Computer Science, Gunma University

1 はじめに

与えられたグラフに対し, そのグラフの幾つかの頂点を初期集団として選ぶ. 初期集団の頂点を掴んでグラフを吊るしたときにできる距離構造において, 最も頂点数が多い層の頂点数を初期集団に対する *path distance width* (PDW) と呼ぶ [2]. うまく初期集団を選ぶことにより最小化した PDW をグラフの PDW とする. PDW 問題とは, PDW を最小にするような初期集団を求める問題である. PDW 問題は入力をも木に限定しても NP 困難であることが知られている [1]. 本論文では, 深さ d の完全 2 分木の PDW の下界が $\left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2\lceil \log_2(d-\lceil \log_2 d \rceil)} \right\rceil$ であり, 特殊な深さ $d = 2^m + m$ においては, $2^{2^m} \leq pdw(T_{2^m+m}) \leq \frac{17}{16} \cdot 2^{2^m}$ であることを示した.

グラフ G の *band width* (BW) とは, 行列計算や VLSI 設計に応用があるグラフパラメータであり [3], $bw(G)$ と表す. BW と PDW の間には $bw(G) \leq 2pdw(G)$ という関係が成り立つ.

2 諸定義

グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとする. 頂点 $u, v \in V$ の距離を $distance(u, v)$ で表す. ある頂点集合 $V_1 \subseteq V$ に対して, 頂点 v と V_1 の距離を $distance(V_1, v) = \min_{u \in V_1} distance(u, v)$ で定義する. V_1 から距離 i 離れた頂点の集合を $V_{i+1} = \{v \in V \mid distance(V_1, v) = i\}$ とすると, V の分割 $L = (V_1, \dots, V_l)$ が一意に決まる. この頂点集合 V_1 を初期集団, L を距離構造, V_i を距離構造におけるレベル i , l を距離構造のレベル数とする. このとき, 初期集団 V_1 に対する G の *path distance width* (PDW) を $pdw_{V_1}(G) = pdw_L(G) = \max_{1 \leq i \leq l} |V_i|$ で定義し, グラフ G の PDW を $pdw(G) = \min_{V_1 \subseteq V} pdw_{V_1}(G)$ で定義する.

深さ d の完全 2 分木を T_d と表記する. T_d の部分完全 2 分木とは, T_d の部分グラフのうち, 完全 2 分木であり葉が T_d においても葉であるものをいう. T_d の距離構造 L において, T が原型を留めた部分木であるとは, T

が T_d の部分完全 2 分木で, T の全ての葉が同じレベル i にあり, 葉から距離 x 離れた頂点がレベル $i-x$ にあることをいう. 図 1 において, l は初期集団を表し, 色付きの頂点からなる部分グラフがそれぞれ原型を留めた部分木である. T_d の距離構造 L において極大部分木とは, 原型を留めた部分木のうち, それを真に含む原型を留めた部分木が存在しないものである. T_d において, 頂点 u の兄弟 v とは, u と共通の親を持つ頂点のことである. T_d の部分完全 2 分木 T の兄弟部分木 T' とは, T の根 u の兄弟 v を根に持つ部分完全 2 分木のことである.

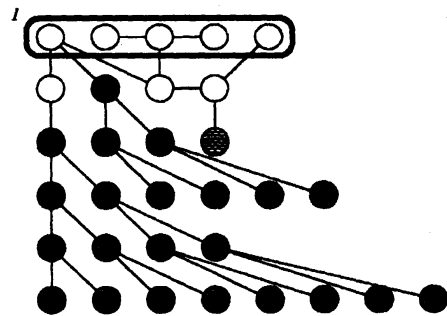


図 1 距離構造における原型を留めた部分木

3 頂点数とレベル数から決まる自明な下界

この節では, グラフの頂点数と距離構造のレベル数から決まる自明な PDW の下界について述べる. これは完全 2 分木だけでなく, 任意のグラフに対して成立する下界である.

補題 3.1. $G = (V, E)$ の距離構造 L のレベル数が l であるとき, $pdw_l(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{l} \right\rceil$ である.

系 3.2. $G = (V, E)$ に対して, $pdw_l(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor} \right\rceil$ である.

証明. G の距離構造が取り得る最大のレベル数は直径 $+1$ である. \square

各レベルに頂点を均等に置けるようなグラフであれ

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	18	19	20	...
$m(d)$	0		1			2					3					4	

表1 深さ d に対する $m(d)$ の値

ば、レベル数が大きい距離構造を使ったほうが PDW を小さくできることが分かる。

4 完全2分木に対する下界

この節では、完全2分木の特性より距離構造のレベル数が大きいときには、3章で示した自明な下界よりも強い下界が求められることを示し、自明な下界と合成してより良い完全2分木の下界を与える。

本節中で使用する $m(d) = \lfloor \log_2(d - \lfloor \log_2 d \rfloor) \rfloor$ は、 $2^m + m \leq d \leq 2^{m+1} + m$ なる深さ d を m に写す関数である。この $m(d)$ の値が変わる深さは、5節で述べる特殊な深さ(表1中、太字)である。

4.1 最下層が全て葉であるときの下界

補題 3.1 より、完全2分木 T_d では、各レベルに頂点を均等に置けたとしても PDW は $\lceil (2^{d+1} - 1)/(2d + 1) \rceil$ 以上であることが分かる。しかし、本当にこれだけで済むのだろうか。実際には、レベル数が大きくなるほど最下層に影響を与える極大部分木のサイズが大きくなるため、最下層の頂点数が多くなり、自明な下界を大きく超えてしまうことが分かる。この小節では、最下層にある葉の数とレベル数の関係について述べる。まずは、極大部分木の葉の数とレベルの関係を示す。

補題 4.1. L を T_d のある距離構造とする。 T_d の深さ n の極大部分木 T_n の葉が、 L においてレベル l にある場合、 $n \geq \lceil (l-3)/2 \rceil$ である。

証明. T_n の兄弟部分木を T'_n とし、 T_n と T'_n の根の共通の親を r とする。 T'_n の頂点で初期集団に含まれるものが無いとすると、 $T_n \cup T'_n \cup \{r\}$ が原型を留めた部分木となり、 T_n の極大性に矛盾するので、 T'_n の頂点で L の初期集団に含まれている頂点 u が存在する。 T_n の葉 v から u の距離は最大でも $2n+2$ であり、 v のレベルが l なので、 $2n+2 \geq l-1$ である。したがって、 $n \geq (l-3)/2$ 。 □

系 4.2. T_d のある距離構造 L のレベル数が l であり、最下層(レベル l)に含まれる頂点が全て T_d の葉であるとする。このとき、 $pdw_L(T_d) \geq 2^{\lceil (l-3)/2 \rceil}$ である。

証明. 葉をレベル l に持つ極大部分木 T の深さを n とすると、補題 4.1 より、 $n \geq \lceil (l-3)/2 \rceil$ である。 T の 2^n 個の葉は全てレベル l にあるため、 $pdw_L(T_d) \geq 2^{\lceil (l-3)/2 \rceil}$ となる。 □

4.2 最下層に葉でない頂点が1個でも含まれるときの下界

距離構造の最下層にある頂点が全て T_d の葉である場合の下界を示したが、最下層に T_d の葉でない頂点が1個でも含まれる場合はどうであろうか。この場合は、距離構造のレベル数が少なくなってしまうことを示す。

補題 4.3. T_d の、ある距離構造 L のレベル数が l であり、最下層(レベル l)に T_d の葉でない頂点が1個でも含まれているとすると、 $pdw_L(T_d) \geq \lceil (2^{d+1} - 1)/(d + 1) \rceil$ である。

証明. レベル l に含まれる葉でない頂点を u とする。 u から初期集団へのパスが1本のみだと仮定すると、 u の隣接頂点のうち、レベルが u より大きいものが存在する。これは、 u が最下層に存在することに矛盾。したがって、 u は初期集団へのパスを2本以上持つ。このパスの長さはそれぞれ $l-1$ である。よって、 $2(l-1)$ は T_d の直径 $2d$ 以下である。つまり、 $2(l-1) \leq 2d$ なので、 $l \leq d+1$ 。 □

補題 4.4. 任意の正整数 d に対して、 $d+1 \leq 2d+1-2m(d)$ 。

証明. 矛盾を導くために、 $d+1 > 2d+1-2m(d)$ と仮定すると、

$$d+1 > 2d - 2 \lfloor \log_2(d - \lfloor \log_2 d \rfloor) \rfloor + 1,$$

$$d < 2 \lfloor \log_2(d - \lfloor \log_2 d \rfloor) \rfloor$$

となり矛盾。 □

4.3 自明な下界と最下層が全て葉であるときの下界の合成

式の形から、距離構造のレベル数が小さいときは $\lceil \frac{2^{d+1}-1}{l} \rceil$ のほうが下界として強く、レベル数が大きいときは $2^{\lceil (l-3)/2 \rceil}$ のほうが下界として強いことが分かる。よって、次の系が与えられる。

系 4.5. $pdw(T_d) \geq \min_{l=1}^{2d+1} \max \left(2^{\lceil (l-3)/2 \rceil}, \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{l} \right\rceil \right)$ 。

証明. 系 4.2, 補題 4.3, 4.4 より。 □

定理 4.6. $pdw(T_d) \geq \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \right\rceil$ 。

証明. $\min_{l=1}^{2d+1} \max \left(2^{\lceil (l-3)/2 \rceil}, \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{l} \right\rceil \right) \geq \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \right\rceil$ を示せばよい。すなわち、 $1 \leq l \leq 2d+1$ で、

$2^{\lceil(l-3)/2\rceil}$ と, $\lceil(2^{d+1}-1)/l\rceil$ の少なくともどちらか片方は, $\lceil(2^{d+1}-1)/(2d+1-2m(d))\rceil$ 以上であることを示せばよい. そのために,

$$\left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{l} \right\rceil < \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \right\rceil$$

である場合を考える. このとき, $l > 2d+1-2m(d)$ であるが, 両辺ともに整数なので, $l \geq 2d+2-2m(d)$ である. $2^{\lceil(l-3)/2\rceil} \geq 2^{\lceil(2d+2-2m(d)-3)/2\rceil} = 2^{d-m(d)}$ なので,

$$2^{d-m(d)} \geq \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \right\rceil$$

を示せばよい. 矛盾を導くために, $2^{d-m(d)} < \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \right\rceil$ と仮定すると:

$$\begin{aligned} 2^{d-m(d)} + 1 &\leq \left\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \right\rceil \\ &< \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2^d}{2^{m(d)}} &< \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \\ &< \frac{2^{d+1}-1}{2^{d+1}} \\ &< \frac{2d+1-2m(d)}{2^{d+1}} \\ &< \frac{2d-2m(d)}{2^{d+1}} \end{aligned}$$

$$d-m(d) < 2^{m(d)}$$

$$\begin{aligned} d - \lfloor \log_2(d - \lfloor \log_2 d \rfloor) \rfloor &< 2^{\lfloor \log_2(d - \lfloor \log_2 d \rfloor) \rfloor} \\ &< 2^{\lfloor \log_2(d - \lfloor \log_2 d \rfloor) \rfloor} \\ &= d - \lfloor \log_2 d \rfloor \end{aligned}$$

$$\lfloor \log_2 d \rfloor < \lfloor \log_2(d - \lfloor \log_2 d \rfloor) \rfloor$$

となり, 明らかに矛盾. \square

5 特殊な深さの完全 2 分木に対する下界と上界

ここでは, 深さ $d = 2^m + m$ である完全 2 分木の PDW について述べる. この深さ d は, $m(d) = m$ であるような最小の深さであり, この深さにおいては, より良い下界 2^{2^m} と上界 $\frac{17}{16} \cdot 2^{2^m}$ を得ることができる.

5.1 特殊な深さの完全 2 分木に対する下界

この小節では, $pdw_L(T_{2^m+m}) \geq 2^{2^m}$ (定理 5.5) を示す. もし $pdw_L(T_{2^m+m}) < 2^{2^m}$ であるならば, その距離構造のレベル数は $l = 2^{m+1} + 1$ でなければならないことを示す (補題 5.2). 次に, そのレベル数においても $pdw_L(T_{2^m+m}) < 2^{2^m}$ とならないことを示す.

補題 5.1. T_d の距離構造 L が, レベル数 $l \leq 2d-1$ を持つとする. このとき, $d+2$ 以上のレベルに配置されている任意の頂点は, ある極大部分木の頂点である.

証明. L 上で, u をどの極大部分木の頂点でもない頂点とし, u が存在するレベルを l_u とする. まず, $l \leq 2d-1$ より, $\lfloor (l+3)/2 \rfloor \leq d+1$ である.

l_u 以上のレベルに u の子孫の葉が無いとすると, u は初期集団へのパスを独立に 2 本持つ. このパスの長さはそれぞれ l_u-1 である. よって, $2(l_u-1)$ は T_d の直径 $2d$ 以下である. つまり, $2(l_u-1) \leq 2d$ なので, $l_u \leq d+1$.

あるレベル $l_v > l_u$ に u の子孫の葉 v があるとする. v を含む極大部分木を T とし, T の根のレベルを r とすると, $l_u < r$. 補題 4.1 より, T の高さは $\lceil (l_v-3)/2 \rceil$ 以上なので, $r \leq l_v - \lceil (l_v-3)/2 \rceil = \lfloor (l_v+3)/2 \rfloor$. したがって, $l_u < \lfloor (l_v+3)/2 \rfloor$ である. l は L のレベル数なので, $l_v \leq l$. よって, $l_u < \lfloor (l_v+3)/2 \rfloor \leq \lfloor (l+3)/2 \rfloor \leq d+1$. \square

補題 5.2. $pdw_\Lambda(T_{2^m+m}) < 2^{2^m}$ を満たす T_{2^m+m} の距離構造 Λ があり, Λ のレベル数が λ であるとする. このとき, $\lambda = 2^{m+1} + 1$.

証明. $\lambda \leq 2^{m+1}$ とすると,

$$pdw_\Lambda(T_{2^m+m}) \geq \left\lceil \frac{2^{2^m+m+1}-1}{2^{m+1}} \right\rceil = \lceil 2^{2^m} - 2^{-m-1} \rceil = 2^{2^m}.$$

$\lambda \geq 2^{m+1} + 2$ であるとする,

$$pdw_\Lambda(T_{2^m+m}) \geq 2^{\lceil (2^{m+1}+2-3)/2 \rceil} = 2^{\lceil 2^{m-1}/2 \rceil} = 2^{2^m}.$$

\square

補題 5.3. $pdw_\Lambda(T_{2^m+m}) < 2^{2^m}$ を満たす T_{2^m+m} の距離構造 Λ があり, Λ のレベル数が λ であるとする. $p+1$ から λ の各レベル l に, それぞれ $\sum_{i=l-2^m-2}^{2^m-1} 2^i$ 個の頂点が配置されているとすると, レベル p に配置される頂点数は $2^{2^m} - 2^{p-2^m-1} + p - 2$ 以上である.

証明. 補題 5.2 より, $\lambda = 2^{m+1} + 1$ である. レベル $p+1$ から $2^{m+1} + 1$ までの層に配置されている頂点数の合計 ϕ は,

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{i=p+1}^{2^{m+1}+1} \sum_{j=i-2^m-2}^{2^m-1} 2^j \\ &= 2^{2^m+m+1} + 2^{2^m} - p \cdot 2^{2^m} - 2^{2^m} + 2^{p-2^m-1}. \end{aligned}$$

レベル p に置く頂点数を P とすると,

$$pdw_\Lambda(T_{2^m+m}) \geq \left\lceil \frac{2^{2^m+m+1} - 1 - (P + \phi)}{p-1} \right\rceil$$

である. $pdw_\Lambda(T_{2^m+m}) < 2^{2^m}$ より,

$$\begin{aligned} 2^{2^m} &> \left\lceil \frac{p \cdot 2^{2^m} - 2^{p-2^m-1} - 1 - P}{p-1} \right\rceil, \\ 2^{2^m} &\geq \frac{p \cdot 2^{2^m} - 2^{p-2^m-1} - 1 - P}{p-1} + 1. \end{aligned}$$

したがって, $P \geq 2^{2^m} - 2^{p-2^m-1} + p - 2$. \square

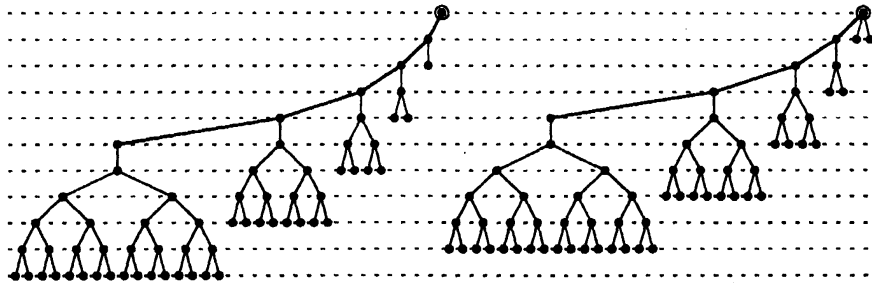


図2 パーツ S_1^2 と S_2^2

補題 5.4. $pdw_{\Lambda}(T_{2^m+m}) < 2^{2^m}$ を満たす T_{2^m+m} の距離構造 Λ があり、 Λ のレベル数が l であるとする。 Λ のレベル $l \geq 2^m + m + 2$ には、 2^{2^m-1} 個の葉と、 $\sum_{i=l-2^m-2}^{2^m-2} 2^i = 2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2}$ 個の節の、合計 $\sum_{i=l-2^m-1}^{2^m-2} 2^i = 2^{2^m} - 2^{l-2^m-2}$ 個が配置されている。

証明. 補題 5.2 より、 $l = 2^{m+1} + 1$ である。 $2^{m+1} + 1 \leq 2(2^m + m) - 1$ なので、補題 5.1 より、 Λ の $2^m + m + 2$ 以上のレベルに配置されている任意の頂点は、ある極大部分木の頂点である。したがって、レベル $l \geq 2^m + m + 2$ には葉と、レベル $l+1$ の頂点の親のみが存在する。また、レベル $l \geq 2^m + m + 2$ に配置された節の子は全てレベル $l+1$ に配置される。逆に述べると、 l に配置される節の数は、 $l+1$ に配置される全ての頂点数の半分である。

$l = 2^{m+1} + 1$ の場合、レベル l に置ける頂点は葉のみで、補題 4.1 より、その最小単位は 2^{2^m-1} である。したがって、この層には 2^{2^m-1} 個の葉を配置するしかない。この層に節は配置しないが、 $l = 2^{m+1} + 1$ のとき $2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2} = 0$ なので成立している。

レベル $l+1 > 2^m + m + 2$ で成立すると仮定する。つまり、レベル $l+1$ には 2^{2^m-1} 個の葉と、 $2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-1}$ 個の節の、合計 $2^{2^m} - 2^{l-2^m-1}$ 個が配置されているとする。レベル $l+1$ の頂点の親は、レベル l に配置されるので、 l には既に、 $2^{2^m} - 2^{l-2^m-1}$ の半分の $2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2}$ 個の節が配置されている。したがって、補題 5.3 より、 l にはさらに

$$2^{2^m} - 2^{l-2^m-1} + l - 2 - (2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2}) = 2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2} + l - 2$$

個以上の頂点を配置する必要がある。ただし、 2^{2^m} 以上にはできないので、追加できるのは $2^{2^m} - (2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2})$ 個未満である。レベル $l+1$ 以上の配置は確定しているので、 l に節を追加することはできない。補題 4.1 より、 l に配置できる葉の最小単位は $2^{\lfloor (l-3)/2 \rfloor}$ 個である。ここで、 $l < 2^{m+1} + 1$ のとき、 $l - 2^m - 2 < \lfloor (l-3)/2 \rfloor$ であることを確認する。 $l - 2^{m+1} < 1$ の両辺に $l - 4$ を足して、

2 で割ればよい。このことから、次の二つの関係が得られる。

$$\begin{aligned} 2^{2^m-1} - 2^{\lfloor (l-3)/2 \rfloor} &< 2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2}, \\ &< 2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2} + l - 2. \\ 2^{2^m-1} + 2^{\lfloor (l-3)/2 \rfloor} &> 2^{2^m-1} + 2^{l-2^m-2}, \\ &= 2^{2^m} - (2^{2^m-1} - 2^{l-2^m-2}). \end{aligned}$$

これは、 $2^{2^m-1} - 2^{\lfloor (l-3)/2 \rfloor}$ 個の葉ではならず、 $2^{2^m-1} + 2^{\lfloor (l-3)/2 \rfloor}$ 個の葉では多過ぎることを示している。よって、レベル l には 2^{2^m-1} 個の葉が配置されなければならない。 □

定理 5.5. $pdw(T_{2^m+m}) \geq 2^{2^m}$.

証明. $pdw_{\Lambda}(T_{2^m+m}) < 2^{2^m}$ を満たす T_{2^m+m} の距離構造 Λ があるとする。補題 5.2, 5.4 より、 Λ の $2^m + m + 2$ から $2^{m+1} + 1$ の各レベル l には、頂点が $2^{2^m} - 2^{l-2^m-2}$ ずつ配置されている。したがって、補題 5.3 より、レベル $2^m + m + 1$ には、

$$2^{2^m} - 2^{(2^m+m+1)-2^m-1} + (2^m + m + 1) - 2 = 2^{2^m} + m - 1$$

個以上配置する必要があるが、 $2^{2^m} + m - 1 \geq 2^{2^m}$ より矛盾。 □

5.2 特殊な深さの完全 2 分木に対する上界

T_d の部分完全 2 分木 T_l において、葉を 1 個だけ挿入したものをパーツ S_l^1 、葉の親を 1 個だけ挿入したものをパーツ S_l^2 とする (図 2 参照)。

パーツとして $S_{2^m+1}^1$ を 1 個、 $S_{2^m}^2$ を 1 個、 $S_l^k (3 \leq l \leq 2^m - 1)$ を $k = 1, 2$ に対してそれぞれ 2^{2^m-i-1} 個用意する。これらのパーツを T_d 上で l に関する降順で並べたとき、各パーツで挿入している頂点を T_d の距離構造における初期集団 V_1 とする。このとき、各レベル l における頂点

数 $N(l)$ は以下の通りである ($m \geq 3$).

$$N(l) = \begin{cases} 2^{2^m} - 3 \cdot 2^{2^m-2} & (l = 1) \\ 2^{2^m} - 2^{2^m-1} & (l = 2, 3) \\ 2^{2^m} - 2^{2^m-2} & (l = 4) \\ 2^{2^m} - 5 \cdot 2^{2^m-5} & (l = 5) \\ 2^{2^m} + (l-2) \cdot 2^{2^m-l} & (6 \leq l \leq 2^m) \\ 2^{2^m} + 2^{m-1} - 1 & (l = 2^m + 1) \\ 2^{2^m} + 2^{m-2} & (l = 2^m + 2) \\ 2^{2^m} - 2^{l-2^m-3} + 2^{2^m+m-l} & (2^m + 3 \leq l \leq 2^m + m) \\ 2^{2^m} - 2^{l-2^m-3} & (2^m + m < l \leq 2^{m+1}) \\ 2^{2^m} - 2^{2^m-2} & (l = 2^{m+1} + 1) \\ 2^{2^m} - 2^{2^m-1} & (l = 2^{m+1} + 2) \\ 2^{2^m} & (l = 2^{m+1} + 3) \end{cases}$$

定理 5.6. $m \geq 3$ のとき, $pdw(T_{2^m+m}) \leq \frac{17}{16} \cdot 2^{2^m}$.

証明. $1 \leq l \leq 5$ と $2^m + 3 \leq l \leq 2^{m+1} + 3$ では, 明らかに $N(l) \leq 2^{2^m}$ である. $(l-2) \cdot 2^{2^m-l}$ は l の増加に対して単調減少であるので, $\max_{6 \leq l \leq 2^m} (2^{2^m} + (l-2) \cdot 2^{2^m-l}) = 2^{2^m} + (6-2) \cdot 2^{2^m-6}$ である. また, $N(2^m + 1) - N(2^m + 2) = 2^{m-2} - 1$ より, $m \geq 2$ において $N(2^m + 1) \geq N(2^m + 2)$. さらに, $N(6) - N(2^m + 1) = 2^{m-1}(2^{2^m-m-3} - 1) + 1$ より, $m \geq 3$ において $N(6) \geq N(2^m + 1)$. よって, $N(l)$ は $m \geq 3$ において, 最大値 $N(6) = \frac{17}{16} \cdot 2^{2^m}$ をとる. \square

6 まとめ

完全 2 分木の PDW が $\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \rceil$ 以上であることを示した. また, 特殊な深さ $d = 2^m + m$ においては, $2^{2^m} \leq pdw(T_d) \leq (17/16) \cdot 2^{2^m}$ である. 今回は頂点を 1 個だけ含む S_1^1, S_2^1 というパーツを用いたが, 頂点を 2 個含む D_1^1, D_2^1 というパーツも用いることで, この上界が 2^{2^m} にできると予想している. 今後の課題として, 特殊な深さにおける上界と下界を一致させること, 一般の深さの完全 2 分木における上界の式を求めること, 下界を完全 k 分木に対する下界に拡張することが挙げられる.

	一般の深さ	特殊な深さ
上界		$\frac{17}{16} \cdot 2^{2^m}$
下界	$\lceil \frac{2^{d+1}-1}{2d+1-2m(d)} \rceil$	2^{2^m}

参考文献

[1] Koichi Yamazaki. On approximation intractability of the path-distance-width problem, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 110, pp. 317–325, 2001.

[2] Koichi Yamazaki, Hans L. Bodlaender, Babette de Fluiter, and Dimitrios M. Thilikos. Isomorphism on graphs of bounded distancewidth, *Algorithmica*, Vol. 24 No. 2, pp. 105–127, 1999.

[3] Y. Lai and K. Williams. A survey of solved problems and applications on bandwidth, edgesum, and profile of graphs. *Journal of Graph Theory* 31, pp. 75–94, 1999.