

乱流局所統計量の揺らぎについて

気象研究所 毛利英明 (Hideaki Mouri)¹
Meteorological Research Institute
同志社大学 高岡正憲 (Masanori Takaoka)²
Doshisha University

1 はじめに

局所等方乱流に関する Kolmogorov [1] の 1941 年理論では, 小スケールにおける統計量は動粘性係数 ν と平均エネルギー散逸率 $\langle \varepsilon \rangle$ から一意的に決まると考える. つまり Kolmogorov 速度 $u_K = (\nu \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$ と Kolmogorov 長 $\eta = (\nu^3 / \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$ から, スケール r における 2 点間速度差 $\delta u_r = u(x+r) - u(x)$ の統計は

$$\frac{\langle \delta u_r^n \rangle}{u_K^n} = F_n \left(\frac{r}{\eta} \right) \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \dots \quad (1)$$

と表される. ここで $\langle \cdot \rangle$ は座標 x に関する空間平均, F_n は普遍関数である. しかしながら Landau [2] が指摘したように, 局所エネルギー散逸率 ε は大スケールの変動を持つ [3]. 大スケール変動は普遍的でないから, Kolmogorov 理論が厳密でない可能性がある. 実際, 異なる流れ場のもとで異なる振舞を示すような小スケール統計量が存在する可能性が指摘されている [3, 4, 5, 6].

Oboukhov [7] は, 局所エネルギー散逸率 ε が一定値をとるような部分領域において Kolmogorov 理論が厳密に成立すると考えた. すると全乱流領域については, 小スケール統計量は ε の大スケール変動を通してのみ流れ場の影響を受けるということになる. 乱流が何らかの素領域から構成されるという発想は今なお興味深い. そこで我々は乱流の部分領域における統計量を格子乱流の実験データを用いて調べることにする.

2 風洞実験

気象研究所風洞を用い格子乱流の実験を行った. 測定部の寸法は流れ方向 x に 18 m, スパン方向に 3 m, 高さ方向に 2 m. 測定部の上流側に $0.04 \times 0.04 \text{ m}^2$ の角材で作った格子を設置した. 格子間隔は 0.20 m. 平均気流速度 U を約 21 m s^{-1} に設定した. 気流温度は $11.8 \pm 1.2^\circ\text{C}$.

格子面から 4 m 下流の風洞中心軸上で, 流れ方向速度 $U + u$ とスパン方向速度 v の同時測定を X 型熱線流速計を用い行った. 熱線はタングステン製で, 直径 $5 \mu\text{m}$, 有効長 1.25 mm, 間隔 1 mm, 温度 280°C . データ集録には分解能 18 bit の A/D コンバータを用いた. サンプル

¹〒 305-0052 つくば市長峰 気象研究所 (hmouri@mri-jma.go.jp)

²〒 610-0394 京田辺市多々羅都谷 同志社大学工学部 (mtakaoka@mail.doshisha.ac.jp)

ν	$0.142 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
$\langle \varepsilon \rangle = 15\nu \langle (\partial_x v)^2 \rangle / 2$	$7.98 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$
U	21.16 m s^{-1}
$\langle u^2 \rangle^{1/2}$	1.10 m s^{-1}
$\langle v^2 \rangle^{1/2}$	1.06 m s^{-1}
$u_K = (\nu \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$	0.103 m s^{-1}
$L_u = \int_0^\infty \langle u(x+r)u(x) \rangle dr / \langle u^2 \rangle$	17.9 cm
$L_v = \int_0^\infty \langle v(x+r)v(x) \rangle dr / \langle v^2 \rangle$	4.69 cm
$L_\varepsilon = \int_0^\infty \langle \varepsilon(x+r)\varepsilon(x) - \langle \varepsilon \rangle^2 \rangle dr / \langle \varepsilon^2 - \langle \varepsilon \rangle^2 \rangle$	0.471 cm
$\lambda = [2\langle v^2 \rangle / \langle (\partial_x v)^2 \rangle]^{1/2}$	0.548 cm
$\eta = (\nu^3 / \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$	0.0138 cm
$Re_\lambda = \langle v^2 \rangle^{1/2} \lambda / \nu$	409

ング周波数は $f_s = 70 \text{ kHz}$. データ長は 4×10^8 点. データ集録前に 24 dB/octave のアナログフィルタを用い 35 kHz 以上の高周波数成分を除去した.

表に乱流統計諸量の値を示す. Taylor の凍結仮説を用い時間変動を空間変動に変換した. 速度の空間微分は空間差分から評価した:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{8v(x+\delta x) - 8v(x-\delta x) - v(x+2\delta x) + v(x-2\delta x)}{12\delta x} \quad \text{但し} \quad \delta x = \frac{U}{f_s}. \quad (2)$$

局所エネルギー散逸率は $\varepsilon = 15\nu(\partial_x v)^2/2$ と評価した. 通常の評価 $15\nu(\partial_x u)^2$ と異なるが, 以下で δu_r との関係調べる際に偽の相関を避けるためである [8].

図1に $\langle \delta u_r^2 \rangle$ および u, v, ε 相関を示す. 冪則 $\langle \delta u_r^2 \rangle \propto r^{2/3}$ を持つ慣性領域が狭いながら存在している. 速度相関は $r \simeq 10^4 \eta$ まで顕著だが, このスケールをエネルギー保有渦の最大サイズと看做することが出来よう. 相関長 L_u はエネルギー保有渦の平均サイズに相当する. 局所エネルギー散逸率 ε は小スケールに属する物理量だから, その相関の減衰は早い.

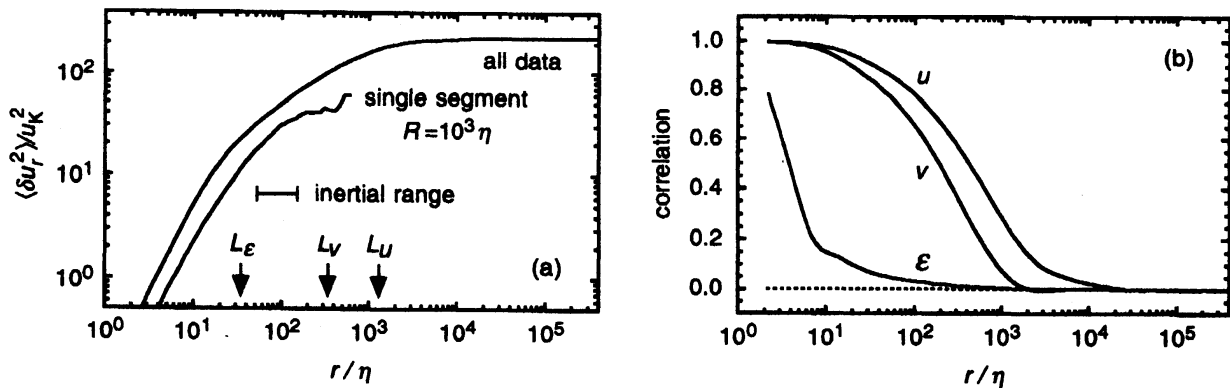


図1: (a) $\langle \delta u_r^2 \rangle / u_K^2$ と $R = 10^3 \eta$ の単一区間での $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$. (b) $\langle u(x+r)u(x) \rangle / \langle u^2 \rangle$, $\langle v(x+r)v(x) \rangle / \langle v^2 \rangle$, $\langle \varepsilon(x+r)\varepsilon(x) - \langle \varepsilon \rangle^2 \rangle / \langle \varepsilon^2 - \langle \varepsilon \rangle^2 \rangle$. 横軸は r/η あるいは r/η_R .

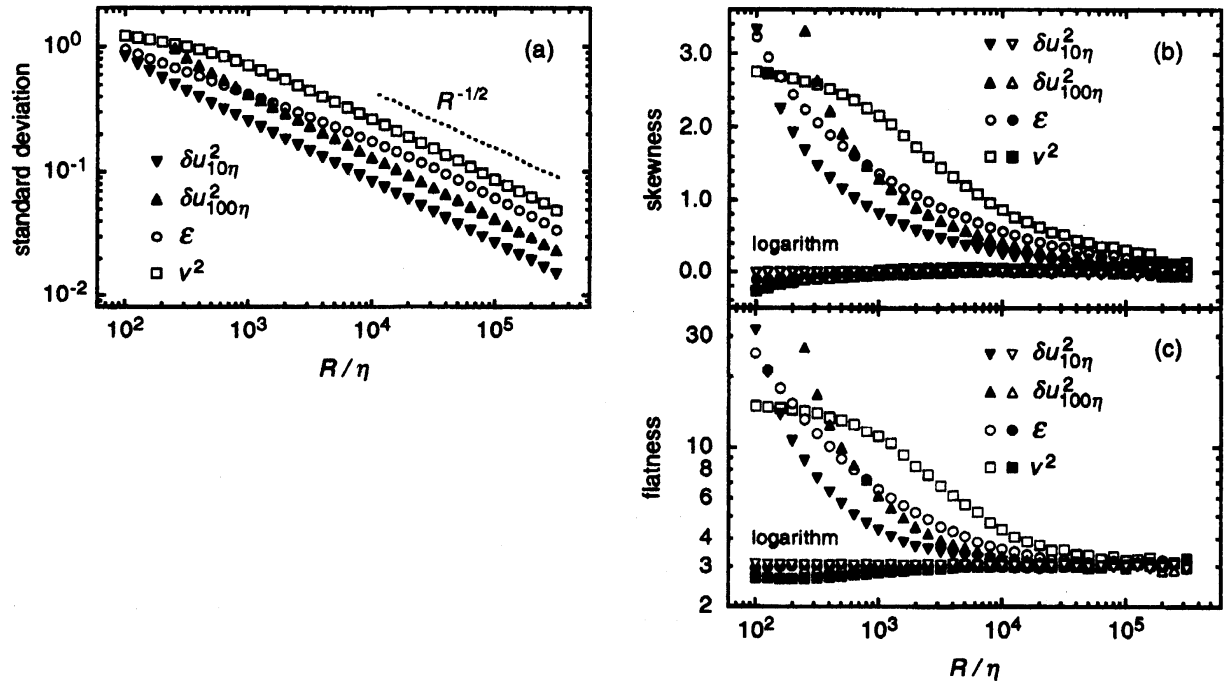


図 2: $\delta u_{10\eta R,R}^2/u_{K,R}^2$, $\delta u_{100\eta R,R}^2/u_{K,R}^2$, ϵ_R , v_R^2 の統計. (a) 平均値で規格化した標準偏差. (b) Flatness. (c) Skewness. 横軸は R/η .

3 結果と議論

実験データを長さ R の区間に分割する. これらが Oboukhov [7] の部分領域に相当する. 各区間で以下の量を計算する:

$$\epsilon_R = \frac{1}{R} \int_{x-R/2}^{x+R/2} \epsilon(x') dx', \quad (3)$$

$$\delta u_{r,R}^2 = \frac{1}{R-r} \int_{x-R/2}^{x+R/2-r} \delta u_r^2(x') dx'. \quad (4)$$

$$v(x+r)v(x)_R = \frac{1}{R-r} \int_{x-R/2}^{x+R/2-r} v(x'+r)v(x') dx', \quad (5)$$

ここで x は区間の中心座標. 区間平均エネルギー散逸率 ϵ_R から各区間での Kolmogorov 速度 $u_{K,R} = (\nu\epsilon_R)^{1/4}$ と Kolmogorov 長 $\eta_R = (\nu^3/\epsilon_R)^{1/4}$ を得る. また $r=0$ に対する $v(x+r)v(x)_R$ を区間平均エネルギー v_R^2 とする. 図 1a に $\delta u_{r,R}^2/u_{K,R}^2$ の例を r/η_R の関数として示す.

3.1 $\delta u_{r,R}^2/u_{K,R}^2$ の揺らぎ

各区間で $\delta u_{r,R}^2/u_{K,R}^2$ は異なる値を持つ. この揺らぎの性質を区間長 R を変化させ調べる. スケール r として散逸領域内のスケール $10\eta_R$ と慣性領域内のスケール $100\eta_R$ を用いる. 実

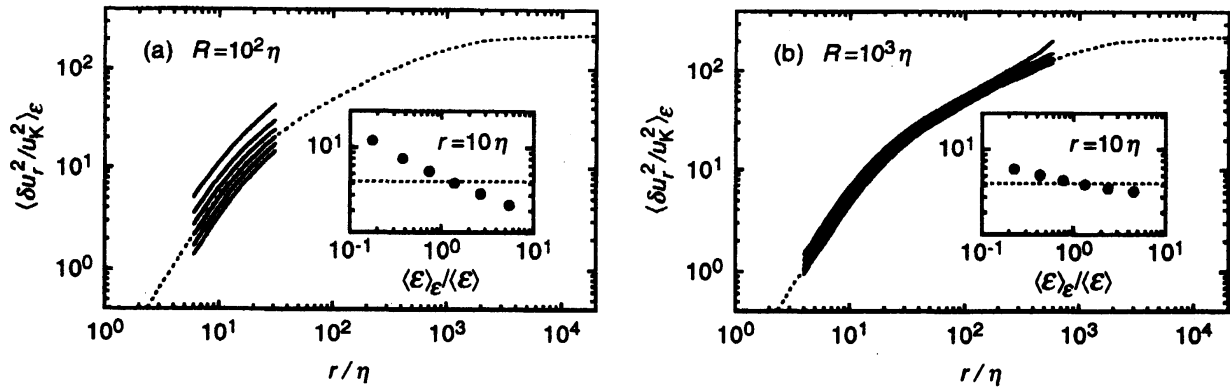


図3: 実線は $\langle \delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2 \rangle_\epsilon$. 点線は $\langle \delta u_r^2 \rangle / u_K^2$. 挿入図は $r = 10\eta_R$ における $\langle \delta u_{10\eta_R,R}^2 / u_{K,R}^2 \rangle_\epsilon$ の $\langle \epsilon \rangle_\epsilon / \langle \epsilon \rangle$ 依存性. 但し点線は $r = 10\eta$ における $\langle \delta u_r^2 \rangle / u_K^2$ の値. (a) $R = 10^2\eta$. (b) $R = 10^3\eta$. 横軸は r/η_R あるいは r/η .

験データから得られる δu_r のスケールはサンプリング間隔 U/f_s の整数倍に限られる. 異なる区間で η_R が異なることを考慮しつつ, $\delta u_{10\eta_R,R}^2$ と $\delta u_{100\eta_R,R}^2$ の値は内挿から計算した.

図2aに平均値で規格化した標準偏差を示す. 区間長 R が大きい場合も $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$ は顕著な揺らぎを持つ. 図には示さないが $\delta u_{r,R}^2$ の揺らぎと $u_{K,R}^2$ の揺らぎは, ほぼ同じ振幅を持ち互いに相関している.

図2bと図2cに $\ln(\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2)$ の skewness と flatness を示す (白三角). 区間長 R に関わらず skewness と flatness の値は Gauss 分布における値 0 と 3 に等しい. つまり $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$ は対数正規分布に従う.³ 対数正規分布は, 多数の独立なランダム変数の積からなる変数が従う分布であり, 何らかの非線形過程の存在を示唆する. 具体的に特定することは出来ないが, このような非線形過程が $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$ の対数正規分布の原因と考えられる. 対数正規分布は ϵ_R と v_R^2 にも見られる (黒丸と黒四角).

区間長 R が $10^4\eta$ より大きい場合, 異なる振舞が見られる [3]. 標準偏差は $R^{-1/2}$ に比例する (図2a). $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$, ϵ_R , v_R^2 の skewness と flatness は Gauss 分布における値 0 と 3 に等しい (図2bと図2c: 黒三角, 白丸, 白四角). 対数正規分布との区別は skewness と flatness のみを用いる限り困難だが, $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$, ϵ_R , v_R^2 は Gauss 分布に従うと考えてよい. 揺らぎが $R^{-1/2}$ スケーリングと Gauss 性を示す例は熱学や統計力学に数多く見られる [10]. 今回の $R \gtrsim 10^4\eta$ の場合と同じく (図1a), 相関が顕著であるようなスケールに比べ, 対象とするスケールが非常に大きいからである.

3.2 $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$ の条件付き平均

各区間で $\delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2$ の値が大きく異なることから, 乱流の大スケールにおける揺らぎは Oboukhov [7] の予想より大きいことが解る. Kolmogorov 理論 [1] は乱流の部分領域で成立

³Kolmogorov [9] が 1962 年に小スケール間欠性に関し提案した対数正規分布とは区別すべきであろう.

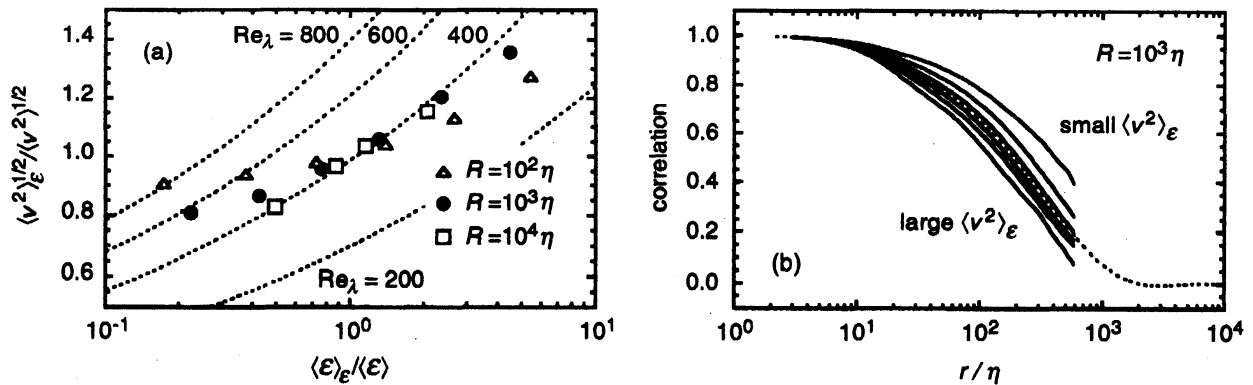


図 4: (a) $\langle v^2 \rangle_\epsilon^{1/2} / \langle v^2 \rangle^{1/2}$ の $\langle \epsilon \rangle_\epsilon / \langle \epsilon \rangle$ 依存性. 微細長 Reynolds 数 $15^{1/2} \langle v^2 \rangle_\epsilon / (\nu \langle \epsilon \rangle_\epsilon)^{1/2}$ は点線上で一定. (b) 実線は $R = 10^3 \eta$ での $\langle v(x+r)v(x) \rangle_\epsilon / \langle v^2 \rangle_\epsilon$. 点線は $\langle v(x+r)v(x) \rangle / \langle v^2 \rangle$. 横軸は r/η_R あるいは r/η .

しない. しかしながら平均エネルギー散逸率 ϵ_R が同じような値をとる区間の統計量を平均することで, なんらかの普遍性が見出される可能性もあろう. このような条件付き平均 $\langle \cdot \rangle_\epsilon$ を, $\langle \epsilon \rangle/4$, $\langle \epsilon \rangle/2$, $\langle \epsilon \rangle$, $2\langle \epsilon \rangle$, $4\langle \epsilon \rangle$ で区切られた ϵ_R の領域について調べる.

図 3 に $\langle \delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2 \rangle_\epsilon$ を示す. 平均は各 r/η_R 上で行った. 区間長 R が $10^3 \eta \simeq L_u$ である場合 (図 3b), $\langle \delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2 \rangle_\epsilon$ は $\langle \epsilon \rangle_\epsilon$ に依存しない. 後者が 20 倍に変化する間に前者は 1.5 倍にしか変化していない. 区間長 R が $10^2 \eta$ である場合 (図 3a), $\langle \delta u_{r,R}^2 / u_{K,R}^2 \rangle_\epsilon$ は $\langle \epsilon \rangle_\epsilon$ に依存する.

この結果は, 区間長 R が相関長 L_u より大きい場合, 平均エネルギー散逸率が平均エネルギー伝達率に等しいような平衡状態が各区間で成立していることを示す. ここで L_u はエネルギー保有渦の平均サイズであった. 平衡状態はエネルギーが最大スケールから最小スケールまで伝達されることで達成される. スケール r の特性時間は $(r^2/\epsilon_R)^{1/3}$. エネルギーがスケール $r_n = r_0/2^n$ ($n = 0, 1, \dots$) を伝達されていくなら [6], その全所要時間は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n^{2/3}}{\epsilon_R^{1/3}} = \frac{1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{r_0^{2/3}}{\epsilon_R^{1/3}}. \quad (6)$$

これはエネルギー保有スケールの特性時間と同程度である. 一方, 区間長 R が相関長 L_u より小さいと平衡状態は成立しない. 個々のエネルギー保有渦の内部でエネルギー散逸が一様でないからである. 実際, 局所エネルギー散逸率 ϵ の相関関数は $r \lesssim L_u$ において零でない (図 1b).

3.3 $\delta u_{r,R}^n / u_{K,R}^n$ は流れ場の影響を受けるのか?

これまでの議論から, 問題なのは, 区間長 R が相関長 L_u と同程度である場合, 小スケール統計量が大スケール流れ場の影響を受けるのは区間平均エネルギー散逸率 ϵ_R の変動を通し

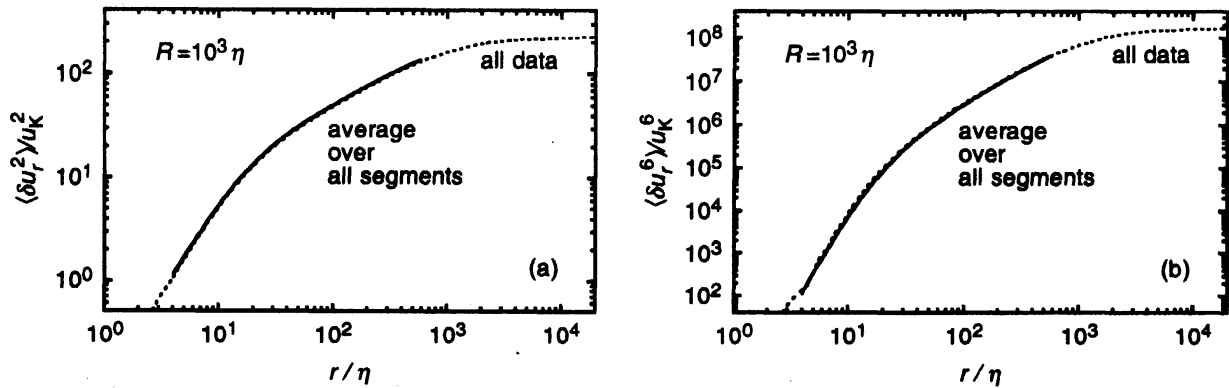


図 5: 実線は $R = 10^3 \eta$ での $\langle \delta u_{r,R}^n / u_{K,R}^n \rangle$. 点線は $\langle \delta u_r^n \rangle / u_K^n$. (a) $n = 2$. (b) $n = 6$. 横軸は r/η_R あるいは r/η .

てのみなのか?ということになる. 各区間の統計量は流れ場の影響を, より複雑な形で受けることを議論しよう.

図 4a に $\langle v_R^2 \rangle_\epsilon / \langle v^2 \rangle$ を $\langle \epsilon_R \rangle_\epsilon / \langle \epsilon \rangle$ の関数として示す. 前者は後者に呼応して変動し, 微細長 Reynolds 数 $\propto \langle v_R^2 \rangle_\epsilon / \langle \epsilon_R \rangle_\epsilon^{1/2}$ は全実験データにおける値 $Re_\lambda = 409$ とほぼ等しい. この傾向は区間長 R が大きい場合に顕著となる. 異なる区間が大スケール流れ場に関し微細長 Reynolds 数という共通の情報を持つことは, 各区間が個々に大スケール流れ場の影響を受けることを示唆する.

各区間で微細長 Reynolds 数が一定となるのは, エネルギー保有渦の強さとサイズが微調整されているからかもしれない. 経験則 $\langle \epsilon \rangle \propto \langle v^2 \rangle^{3/2} / L_v$ から $Re_\lambda \propto (\langle v^2 \rangle^{1/2} L_v / \nu)^{1/2}$ を得る. つまり $L_v \propto \langle v^2 \rangle^{-1/2}$ なら Re_λ は一定である. 実際, 弱いエネルギー保有渦ほどサイズが大きい. 図 4b に相関関数の条件付き平均 $\langle v(x+r)v(x) \rangle_\epsilon / \langle v_R^2 \rangle_\epsilon$ を示す. 区間平均エネルギー $\langle v_R^2 \rangle_\epsilon$ が小さいほど, 相関関数は大スケール側に伸びている. 相関長 $\int_0^\infty \langle v(x+r)v(x) \rangle_\epsilon dr / \langle v_R^2 \rangle_\epsilon$ も, 実際の計算は困難だが, $\langle v_R^2 \rangle_\epsilon$ が小さいほど大きい筈である.

図 5 に $\delta u_{r,R}^n / u_{K,R}^n$ の全区間での平均 $\langle \delta u_{r,R}^n / u_{K,R}^n \rangle$ を $\langle \delta u_r^n \rangle / u_K^n$ と比較する. これらは区別が見つからない (図 3b も参照).⁴ 各区間のあいだで ϵ_R 従って $u_{K,R}$ や η_R は揺らぐが, その大きさは $\langle \delta u_{r,R}^n / u_{K,R}^n \rangle$ が $\langle \delta u_r^n \rangle / u_K^n$ と顕著に異なるほどでない. つまり ϵ_R の揺らぎを通して大スケール流れ場が全乱流領域での小スケール統計量に影響するのでない. これは一般的な結果である. というのは $Re_\lambda \simeq 9000$ の大気境界層乱流においてすら本研究で調べた格子乱流と同じく $\langle \epsilon_R \rangle$ の標準偏差は平均 $\langle \epsilon_R \rangle$ と同程度だからである [3, 11]. 先行研究 [6] から, 流れ場が $\langle \delta u_r^n \rangle / u_K^n$ に影響することが示唆されているが, もし事実なら流れ場の影響は各区間の $\delta u_{r,R}^n / u_{K,R}^n$ に既に内在していることになる.

各区間が個々に大スケール流れ場を反映する理由は, エネルギー保有渦の間の相互作用に関連するのかもしれない. エネルギー保有渦は相互作用から得た流れ場に関する情報を, 各区間の小スケールへ伝えているのであろう. 別の可能性としてエネルギー伝達が挙げられ

⁴区間長が $R \lesssim 10^2 \eta$ である場合, $\langle \delta u_{r,R}^n / u_{K,R}^n \rangle$ と $\langle \delta u_r^n \rangle / u_K^n$ は一致しない.

る。エネルギーが2スケール間で伝達される際、3番目のスケールが仲介役として存在する。この3番目のスケールが大きい場合にエネルギー伝達率が大きいことが知られている [6].

4 まとめにかえて

本研究では剪断のない格子乱流を調べた。剪断のある境界層乱流などで δu_r が u と相関を持つ一方、剪断のない乱流では相関を持たないことが先行研究 [4, 5] に報告されている。小スケール統計量に対し剪断は異なる影響を持つようである。このような流れ場に対し本研究と同じ解析を行うことが望ましい。本研究で格子乱流に関し見出された $\delta u_{r,R}^2/u_{K,R}^2$, ϵ_R , v_R^2 の対数正規分布 (図 2), 相関長 L_u よりも大きい区間長 R におけるエネルギー散逸とエネルギー伝達の平衡 (図 3), あるいは微細長 Reynolds 数の不変性 (図 4a) が他の流れ場に関しても見出されるなら、これらが普遍的であるということになり興味深い。

参考文献

- [1] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301 (1941). 英訳は Proc. R. Soc. London Ser. A **434**, 9 (1991).
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (Pergamon, London, 1959), Chap. 3; ランダウ・リフシッツ, 流体力学 第1巻 (東京図書, 1970), 第3章.
- [3] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima, Phys. Fluids **18**, 015103 (2006).
- [4] A. A. Praskovsky, E. B. Gledzer, M. Y. Karyakin, and Y. Zhou, J. Fluid Mech. **248**, 493 (1993).
- [5] K. R. Sreenivasan and B. Dhruva, Prog. Theor. Phys. Suppl. **130**, 103 (1998).
- [6] P. D. Mininni, A. Alexakis, and A. Pouquet, Phys. Rev. E **74**, 016303 (2006).
- [7] A. M. Oboukhov, J. Fluid Mech. **13**, 77 (1962).
- [8] S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan, and L.-P. Wang, Phys. Rev. Lett., **74**, 1755 (1995).
- [9] A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Statistical Physics, 3rd ed. (Pergamon, Oxford, 1979), Part 1, Chap. 12; ランダウ・リフシッツ, 統計物理学 第3版 下巻 (岩波書店, 1980), 第12章.
- [11] J. Cleve, M. Greiner, and K. R. Sreenivasan, Europhys. Lett. **61**, 756 (2003).