

A combinatorial realization of the Heisenberg action on the space of conformal blocks

東京大学大学院数理科学研究科 藤田 玄 (Hajime Fujita)*
Graduate school of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo

1 序

いま、 C を種数 g の閉 Riemann 面、 R_g を C 上の平坦 $SU(2)$ 束のモジュライ空間とする。平坦接続のホロノミー表現を考えることで R_g は C の基本群の $SU(2)$ 表現の共役類の空間 $Hom(\pi_1(C), SU(2))/SU(2)$ に同相であり、さらに Kähler 多様体の構造をもつことが知られている。 R_g 上に正則 Hermite 直線束 $\mathcal{L} \rightarrow R_g$ でその曲率形式が R_g の Kähler 形式に一致するものが構成できる。正整数 k に対して \mathcal{L} の k 回テンソル積の大域正則切断の空間 $H^0(R_g; \mathcal{L}^{\otimes k})$ を考える。これは有限次元のベクトル空間になり、さらに、共形場理論 (Wess-Zumino-Witten 模型) において定義される共形ブロックの空間とよばれる空間と自然に同一視されることが知られている。([2])

以下、本研究の動機のひとつである Andersen-Masbaum ([1]) の結果を述べておこう。まず、モジュライ空間 R_g には C の $\mathbb{Z}_2 (= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -係数の 1 次元コホモロジー群 $H^1(C; \mathbb{Z}_2)$ がベクトル束のテンソル積により作用する。ここで、コホモロジー群 $H^1(C; \mathbb{Z}_2)$ は構造群が \mathbb{Z}_2 の C 上の平坦直線束の同型類の空間と同一視されることに注意する。さらに、各 $a \in H^1(C; \mathbb{Z}_2)$ の定める作用は \mathcal{L} への位数 2 の作用 $\tilde{a} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ に持ち上がるのがわかる。こうして各正整数 k に対して、共形ブロックの空間 $H^0(R_g; \mathcal{L}^{\otimes k})$ への作用

$$\tilde{a}^{\otimes k} : H^0(R_g; \mathcal{L}^{\otimes k}) \rightarrow H^0(R_g; \mathcal{L}^{\otimes k})$$

が誘導される。Andersen-Masbaum は代数幾何的手法を駆使してこの作用の指標を以下のように決定した。

* 日本学術振興会特別研究員 PD

定理 1.1 (Andersen-Masbaum [1]). 各 $a(\neq 0) \in H^1(C; \mathbb{Z}_2)$ に対して、 \bar{a} の誘導する作用 $\bar{a}^{\otimes k}$ の指標が次で与えられる:

$$\text{Tr}(\bar{a}^{\otimes k}; H^0(R_g; \mathcal{L}^{\otimes k})) = \frac{1 + (-1)^k}{2} \left(\frac{k+2}{2} \right)^{g-1}.$$

単位元 $0 \in H^1(C; \mathbb{Z}_2)$ の誘導する作用の指標は $H^0(R_g; \mathcal{L}^{\otimes k})$ の次元に他ならないが、その公式は Verlinde の公式として知られている。これらの事実を合わせると、 $H^1(C; \mathbb{Z}_2)$ の全ての要素に対する作用の指標がわかったことになる。また、この公式は個別の a に対するものであるが、 $H^1(C; \mathbb{Z}_2)$ 全体で考えると、その作用は \mathcal{L} には持ち上がりず、実際にはその中心拡大で定義される Heisenberg 群の作用として持ち上がる。(ここで、中心は \mathcal{L} の自己同型のスカラー倍として現れる。) 中心の $H^0(R_g; \mathcal{L}^{\otimes k})$ への作用はスカラー倍であるので、定理 1.1 によって、この Heisenberg 群の作用の指標がすべて決定され、作用の同型類が決まったことになる。

ところで、曲面にパンツ分解 (互いに交わらない $3g-3$ 本の単純閉曲線による球面から 3 つの円板を除いたものへの曲面の分解) を固定すると、共形ブロックの空間の次元は分解の双対グラフの許容ウェイトとよばれる組み合わせ的な対象 (定義は後述) の個数として記述されることが知られている。本研究の目的は、この双対グラフとその許容ウェイトという組み合わせ的な対象を用いて Andersen-Masbaum の結果を再現し、さらにその Heisenberg 作用の表現行列を得ることである。なお、本研究の詳細は [4] を参照。我々の構成の多くは共形ブロックのアーベル化による非可換テータ関数の表示 [6] におけるある部分を組み合わせ的に書き直したものである。

注意 1.1. 実際は [1] に先行する結果として位相的な枠組みでの対応する結果 [3] がある。彼らは量子不変量の理論とある種のコボルディズム圏を用いて位相的量子場の理論を構成し、そこに出てくるベクトル空間 (正確にはある加群) への Heisenberg 作用を考察した。

2 3 価グラフに付随する格子および許容ウェイト

いま、 $\Gamma = \{f_l, v_i\}$ を $3g-3$ 本の辺 $\{f_l \mid l = 1, \dots, 3g-3\}$ と $2g-2$ 個の頂点 $\{v_i \mid i = 1, \dots, 2g-2\}$ からなる 3 価グラフとする。 $3g-3$ 個の文字 $\{e_l \mid l = 1, \dots, 3g-3\}$ を考え、 $\{e_l\} \cup \{f_l\}$ で生成されるベクトル空間 $\mathbb{R}\langle\{e_l\}\rangle \oplus \mathbb{R}\langle\{f_l\}\rangle (\cong \mathbb{R}^{6g-6})$ およびその上の標準的なシンプレクティック構造 (e_l と f_l が互いに双対基底になる) を考える。

2.1 4 つの格子

以下のように $\mathbb{R}\langle\{e_l\}\rangle \oplus \mathbb{R}\langle\{f_l\}\rangle$ 内の 4 つの格子を定義する。

定義 2.1. 文字 $\{e_i\}$ および辺 $\{f_i\}$ で生成される格子をそれぞれ $\Lambda_0 := \mathbb{Z}\langle\{e_i\}\rangle$ 、 $\Lambda_0^* := \mathbb{Z}\langle\{f_i\}\rangle$ とする。次に、辺 f_{i_m} ($m = 1, 2, 3$) をもつ頂点 v_i に対してベクトル E_m^i を以下で定義する;

$$\begin{aligned} E_1^i &:= \frac{1}{2}(-e_{i_1} + e_{i_2} + e_{i_3}) \\ E_2^i &:= \frac{1}{2}(e_{i_1} - e_{i_2} + e_{i_3}) \\ E_3^i &:= \frac{1}{2}(e_{i_1} + e_{i_2} - e_{i_3}). \end{aligned}$$

ただし、頂点 v_i がループをもつ (例えば $f_{i_2} = f_{i_3}$) ときは

$$\begin{aligned} E_1^i &:= -\frac{1}{2}e_{i_1} + e_{i_2} \\ E_2^i &= E_3^i := \frac{1}{2}e_{i_1}. \end{aligned}$$

である。ベクトルの集合 $\{E_m^i \mid m = 1, 2, 3, i = 1, \dots, 2g - 2\}$ で生成される $\mathbb{R}\langle\{e_i\}\rangle$ 内の格子を Λ とする。また、シンプレクティック構造に関する Λ の双対格子を Λ^* とする。すなわち、 Λ の任意の元とシンプレクティック形式でペアリングをとって整数値をとる Λ_0^* の元のなす格子が Λ^* である。直接計算により Λ^* は Λ_0^* の部分格子 $\{\sum_i n_i f_i \in \Lambda_0^* \mid n_{i_1} + n_{i_2} + n_{i_3} \in 2\mathbb{Z}\}$ に等しいことがわかる。定義から Λ_0 は Λ の部分格子であり、 $\Lambda/\Lambda_0 \cong \mathbb{Z}_2^{2g-3}$ であることもわかる。

2.2 Heisenberg 群の構成

グラフのデータと付随する格子から曲面のホモロジー群の中心拡大として構成される Heisenberg 群を再現するために、まず曲面のホモロジー群を再現する。そのために、付加的なデータとして、グラフの \mathbb{R}^3 への埋め込み $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を固定し、埋め込みの像の正則近傍 B_Γ をとり、その境界を C_Γ とする。このとき、 C_Γ は 3 価グラフ Γ のデータから決まるパンツ分解が与えられている種数 g の向き付けられた閉曲面になる。

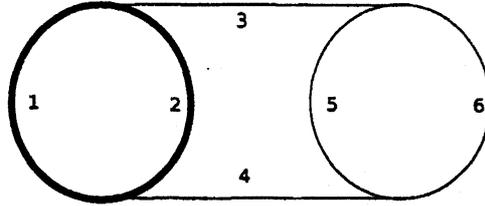
主張 2.2. 3 価グラフ Γ に対して以下が成り立つ。

1. 自然な同型 $\Lambda^*/2\Lambda_0^* \cong H_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2) (\cong \mathbb{Z}_2^g)$ がある。
2. 埋め込み $\Gamma \subset B_\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ に対して自然な短完全系列

$$0 \rightarrow \Lambda_0/2\Lambda \rightarrow H_1(C_\Gamma; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \Lambda^*/2\Lambda_0^* \rightarrow 0$$

がある。さらに、正則近傍への持ち上げ $\Gamma \hookrightarrow C_\Gamma \subset B_\Gamma$ は上の短完全系列の分裂を与える。

Proof. 定義より $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ の代表元 $\sum_i n_i f_i$ として、各頂点において2つ辺のみで $f_i = 1$ となるものが取れる。このような元は $H_1(\Gamma)$ の元を定める。例えば、下のグラフにおいて $\lambda = f_1 + f_2 \in \Lambda^*$ は太線のサイクルに対応する。



逆にグラフ上のサイクルは前述のような Λ^* の元を定める。(2) の系列の全射は包含写像から誘導される写像 $H_1(C_\Gamma) \rightarrow H_1(B_\Gamma) \cong H_1(\Gamma) \cong \Lambda^*/2\Lambda_0^*$ である。この写像の核はいわゆるメリディアンが生成する部分群であるが、それはパンツ分解を定める単純閉曲線の集合 ($\leftrightarrow \{e_i\}$) で生成される。格子 2Λ の元 (例えば $e_1 + e_2 + e_3$) はパンツの境界に対応し、したがって剰余群 $\Lambda_0/2\Lambda$ からメリディアンの生成する部分群への全射が誘導される。 $\Lambda_0/2\Lambda$ が \mathbb{Z}_2^g に同型であることは比較的容易にわかる。 \square

これにより、(コ) ホモロジー群が $\Lambda_0/2\Lambda \oplus \Lambda^*/2\Lambda_0^* \cong H_1(C_\Gamma; \mathbb{Z}_2) (\cong H^1(C_\Gamma; \mathbb{Z}_2))$ と再現されることがわかる。さらに、 Λ_0 と Λ_0^* の間の自然なペアリングから左辺に誘導される双線形形式は交差形式から決まる右辺のシンプレクティック形式に一致する。

定義 2.3. 直積集合 $\mathcal{G}(\Gamma) := \mathbb{C}^\times \times (\Lambda_0/2\Lambda \oplus \Lambda^*/2\Lambda_0^*)$ に積構造を

$$(c_1, \mu_1, \lambda_1) \cdot (c_2, \mu, \lambda_2) = (c_1 c_2 (-1)^{\lambda_2 \cdot \mu_1}, \mu_1 + \mu_2, \lambda_1 + \lambda_2)$$

で定義する。ここで \cdot は $\Lambda_0/2\Lambda$ と $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ の間のペアリングである。定義より、 $\mathcal{G}(\Gamma)$ は中心拡大

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathcal{G}(\Gamma) \rightarrow \Lambda_0/2\Lambda \oplus \Lambda^*/2\Lambda_0^* \rightarrow 0$$

を定め、Heisenberg 群となる。拡大に付随する2-コサイクルが定めるコホモロジー類が一致することを示すことで次がわかる。

主張 2.4. Heisenberg 群 $\mathcal{G}(\Gamma)$ は [1] での Heisenberg 群と同型である。

2.3 量子 Clebsch-Gordan 条件と許容ウェイト

3 価グラフ Γ に付随する許容ウェイトの定義を述べる。

定義 2.5. 正整数 k に対して、半整数による辺の集合のラベリング $j: \{f_i\} \rightarrow \{0, \dots, k/2\}$ が各頂点 v_i (辺 e_{i_m} をもつ) で、以下のレベル k 量子 Clebsch-

Gordon 条件がみたされるときレベル k の許容ウェイトであるという;

$$\begin{cases} j_{i_1} + j_{i_2} + j_{i_3} \in \mathbb{Z} \\ |j_{i_1} - j_{i_2}| \leq j_{i_3} \leq j_{i_1} + j_{i_2} \\ j_{i_1} + j_{i_2} + j_{i_3} \leq k. \end{cases}$$

ここで $j(f_i) := j_i$ とおいた。また、 v_i がループをもつとき (例えば $f_{i_2} = f_{i_3}$) は $j_{i_2} = j_{i_3}$ とする。レベル k の許容ウェイト全体のなす有限集合を $QCG_k(\Gamma)$ とする。

はじめに述べたように、有限集合 $QCG_k(\Gamma)$ の元の個数は共形ブロックの空間の次元に一致し、とくに $QCG_k(\Gamma)$ で \mathbb{C} 上自由に生成されるベクトル空間を $\mathbb{C}(\Gamma; k)$ とすると、これは共形ブロックの空間とベクトル空間として同型になる。許容ウェイト j に対応する $\mathbb{C}(\Gamma; k)$ の基底を $|j\rangle$ と表すことにする。

3 Heisenberg 作用の構成

ここでは、3 価グラフ Γ と正整数 k に対して $\Lambda_0/2\Lambda$ と $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ の $\mathbb{C}(\Gamma; k)$ への作用を構成し、それらを組み合わせることで $\mathcal{G}(\Gamma)$ の作用を構成する。

3.1 $\Lambda_0/2\Lambda$ -作用

定義 3.1. ベクトル空間 $\mathbb{C}(\Gamma; k)$ への $\Lambda_0/2\Lambda$ の作用を $\mu = (\mu_i) \in \Lambda_0/2\Lambda$ 、 $j \in QCG_k(\Gamma)$ に対して

$$\mu : |j\rangle \mapsto (-1)^{2j_\mu} |j\rangle$$

により定義する。ここで、 j_μ は $j_\mu := \sum_{i, \mu_i \neq 0} j_i$ で定義される。量子 Clebsch-Gordan 条件の整数性条件 $j_{i_1} + j_{i_2} + j_{i_3} \in \mathbb{Z}$ によりこの作用は μ の Λ_0 への持ち上げ方によらないことがわかる。

3.2 $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ -作用

まず、 $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ の有限集合 $QCG_k(\Gamma)$ への作用を、グラフ上のサイクル λ が通る辺上のウェイトのみを j_i から $\frac{k}{2} - j_i$ に変えることで定義する;

$$\lambda : j \mapsto \lambda \cdot j = (j_1, \dots, \frac{k}{2} - j_i, \dots, j_{3g-3})$$

これが実際に量子 Clebsch-Gordan 条件を不変にすることは直接確かめられる。

例 3.2. 図 1 のグラフを考える。このときサイクル $\lambda = f_1 + f_2$ の作用は

$$\lambda : j \mapsto \lambda \cdot j = (k/2 - j_1, k/2 - j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$$

で与えられる。

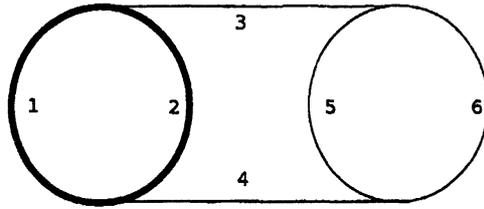


図 1:

この作用から置換表現として $\mathbb{C}(\Gamma; k)$ への $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ -作用が誘導される;

$$\lambda : |j\rangle \mapsto |\lambda \cdot j\rangle.$$

定義から、この作用の指標は $\{j \in QCG_k(\Gamma) \mid \lambda \cdot j = j\}$ の個数に一致する。しかし、具体例で調べてみればわかるのだが、一般にこの数は $\frac{1+(-1)^k}{2} \binom{k+2}{2}^{g-1}$ に一致しない。つまり、この置換表現では Andersen-Masbaum らの Heisenberg 作用を再現できない。そこで、以下のように作用をねじることを考える。

定義 3.3. 写像 $\delta = (\delta_j) : \Lambda^*/2\Lambda_0^* \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^{QCG_k(\Gamma)}$ であって条件

$$\delta_j(\lambda_1 + \lambda_2) = \delta_{\lambda_2 \cdot j}(\lambda_1) \delta_j(\lambda_2) \quad (*)$$

をみたすものを用いて、 $\mathbb{C}(\Gamma; k)$ への $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ -作用を

$$\lambda : |j\rangle \mapsto \delta_j(\lambda) |\lambda \cdot j\rangle$$

により定義する。

注意 3.1. 条件 (*) は δ が群 $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ の $(\mathbb{C}^\times)^{QCG_k(\Gamma)}$ -値の振れ 1-コサイクルであることを意味する。ここで、 $\Lambda^*/2\Lambda_0^*$ は $(\mathbb{C}^\times)^{QCG_k(\Gamma)}$ に置換表現により作用する。

このようなコサイクルに対して Heisenberg 群 $\mathcal{G}(\Gamma)$ の表現が定義できる。

主張 3.4. 振れ 1-コサイクル δ に対して写像 $\rho_\delta : \mathcal{G}(\Gamma) \rightarrow GL(\mathbb{C}(\Gamma; k))$ を

$$\rho_\delta(c, \mu, \lambda) : |j\rangle \mapsto c^k (-1)^{2j\mu} \delta_j(\lambda) |\lambda \cdot j\rangle$$

$$((c, \mu, \lambda) \in \mathcal{G}(\Gamma), \quad j \in QCG_k(\Gamma))$$

で定義すると、 ρ_δ は準同型になる。

証明は直接計算するだけである。

さきほども述べたように一般には ρ_δ の定める表現は [1] でのものと同型ではない。そこで、どのようなコサイクルをとれば同型な表現が得られるかが問題となるわけだが、その問いに対する 1 つの非常に自然な答えとして、コサイクルに対する外線条件というものを見出した。外線条件の定義を述べる前に、主結果を述べておく。

定理 3.5. 捩れ 1-コサイクル δ が 外線条件を満たすとき、 $(\mu, \lambda) \neq 0$ に対して

$$\text{Tr}(\rho_\delta(1, \mu, \lambda); \mathbb{C}(\Gamma; k)) = \frac{1 + (-1)^k}{2} \left(\frac{k+2}{2} \right)^{g-1}$$

となる。特に、Heisenberg 作用 ρ_δ は [1] でのものと同型になる。

証明は、 $\{j \in QCG_k(\Gamma) \mid \lambda \cdot j = j\}$ のような集合の個数 (の交代和) を、許容ウェイトの個数を頭わに書き下す公式 (Verlinde の公式) から導くことでなされる。

注意 3.2. 共形ブロックの元は Jacobian (= 正則直線束のモジュライ) 上の直線束の切断としてのテータ関数の類似として、非可換テータ関数ともよばれる。テータ関数の空間へも曲面のホモロジー群の中心拡大で定義される Heisenberg 群の作用がある。ホモロジー群のシンプレクティック基底を取ることで、その作用が具体的に表示され、以下の特徴をもつ;

1. メリディアン方向の作用は各テータ関数を固有ベクトルとする。
2. ロンギチュード方向の作用はテータ関数の集合への置換として作用する。

本研究の考察対象である Heisenberg 作用はこの Heisenberg 作用の非可換版とみなすことができ、我々の構成した表示も上と同様の特徴をもっている。

3.3 外線条件

外線条件を定義するために、まず λ -外線というものを定義する。

定義 3.6 (λ -外線). グラフ上のサイクル $\lambda \in \Lambda^*/2\Lambda_0^*$ に対して、以下の条件を満たす辺 f_i を λ -外線という;

辺 f_i 自身は λ に含まれず、 f_i のただひとつの頂点が λ 上にある。

λ -外線全体の集合を $Ex(\lambda)$ と表すことにする。

例 3.7. 下のグラフにおいて太線が表すサイクルに対する外線を示した。

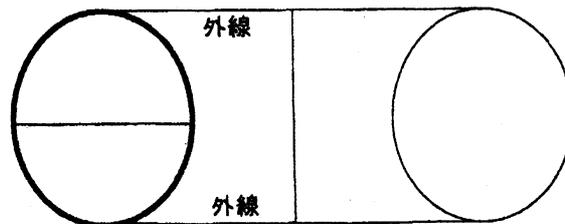


図 2:

定義 3.8 (外線条件). 写像 $\delta = (\delta_j) : \Lambda^*/2\Lambda_0^* \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^{QCG_k(\Gamma)}$ が以下の条件をみたすとき δ は外線条件を満たすという; $\lambda \cdot j = j$ を満たすすべての (λ, j) に対して

$$\delta_j(\lambda) = \exp \left(2\pi\sqrt{-1} \sum_{f_l \in Ex(\lambda)} j_l \right)$$

が成り立つ。

前節で述べた主結果は、外線条件を満たすコサイクルを用いて共形ブロックの空間への Heisenberg 作用を組み合わせたに再現できることを主張するものだが、そのようなコサイクルの 1. 存在問題 2. 一意性の問題 3. 意味付け、という問いが自然に出る。最後に、集会后に得られた進展も含めこれらの問題について述べておく。

4 残された問題

1. 存在問題

本報告での主結果は「外線条件を満たす捩れ 1-コサイクルがあれば、共形ブロックの空間への Heisenberg 作用を再現できる」というものであるが、そのようなコサイクルが存在するか、構成できるかはまた別問題である。集会で発表した時点では、全ての平面グラフ (とある非平面グラフ) に対しての具体的な構成は得られたが、任意に与えられたグラフに対してのそのようなコサイクルの存在証明は得られていない、と述べた。しかしその後、あらゆる 3 価グラフに対しての存在証明が得られ、さらにその証明を見ることで構成の有限アルゴリズムも得られた。(構成にはいくつかの任意性があり、標準的なものが見つかったわけではない。) 存在証明は捩れコホモロジー群 $H^1(\Lambda^*/2\Lambda_0^*; (\mathbb{C}^\times)^{QCG_k(\Gamma)})$ の構造を記述することの副産物として得られた。詳細は [5] を参照。

2. 一意性の問題

これは 2 つの問題を意味している。ひとつめは、外線条件を満たすコサイクルが一意か、という問題である。上で述べたように、具体的な構成において任意性があることからわかるように一般に一意性は成立しない。しかし、対応する幾何的な状況を踏まえると、与えられたグラフに対して標準的な構成法があるとも期待される。その一方で、コホモロジー類としては一意であることは比較的容易にわかる。ふたつめは、3. の問題とも関わる問題であるが、共形ブロックの空間への Heisenberg 作用についての既存の結果 ([1]) を再現するには外線条件が必要十分条件か、つまり、コサイクル δ で定義された Heisenberg 表現 ρ_δ が既知のものと同型なら δ は外線条件をみたすか、という問題である。ある意味でこれが正しいということがわかった。以下少し詳しく述べる。2 つのコサイクル δ_1 と δ_2 に対して次の 2 つを仮定する;

(a) δ_1 は外線条件を満たす。(b) 与えられたグラフの部分グラフによる分解を考えると、部分グラフに付随する許容ウェイトで生成されるベクトル空間にも δ_1 と δ_2 から 2 つの作用が誘導されるが、任意の分解に対してそれらの作用が同型である。; このとき δ_2 も外線条件を満たすことがわかる。詳細は [5] を参照。

3. 意味付け

まず幾何的な枠組みでの意味付けであるが、これは現段階では全くわかっていない。幾何的な意味づけを探るアプローチとしてはアーベル化による非可換テータ関数の記述が考えられる。(はじめにも述べたが、組み合わせ的な記述そのものがこの枠組みから取り出されたものであった。)

次に、組み合わせ的な枠組みにおいてであるが、これは、一意性からの帰結として「外線条件は共形ブロックの空間への Heisenberg 作用を実現するための必要十分条件である」という形でおおまかには述べられる。また、純粋に組み合わせ的な特徴付けとして、外線条件を満たすコホモロジー類は、グラフの切り貼りに関するある種の関手性と種数 1 のグラフに対する振る舞いで特徴付けられることもわかった。詳細は [5] を参照。

参考文献

- [1] J. E. Andersen and G. Masbaum, *Involutions on moduli spaces and refinements of the Verlinde formula*, Math. Ann., 314 (1999), 291-326.
- [2] A. Beauville and Y. Laszlo, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Comm. Math. Phys., 164 (1994), 385-419.
- [3] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum and P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology 34, No.4 (1995), 883-927.
- [4] H. Fujita, *A combinatorial realization of the Heisenberg action on the space of conformal blocks*, arXiv:math.GT/0708.3309, submitted.
- [5] H. Fujita, *External edge condition and group cohomologies associated with the quantum Clebsch-Gordan condition*, arXiv:math.GT/0708.4190.
- [6] T. Yoshida *An abelianization of $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten model*, Ann. of Math., 164, No.1 (2006), 1-49.

e-mail : hajime@ms.u-tokyo.ac.jp