数理解析研究所講究録
第1574巻 2007年 22-30

デファイナブルGファイバー空間

川上　智博

640-8510 和歌山市栄谷930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実数体の通常の構造 $\mathcal{R}=(\mathbb{R},+,\cdot,>)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M}=(\mathbb{R},+,\cdot,>,\dots)$ において考察する。このような構造は、[12] により、非可算無限個存在することが知られている。もっと一般的に、実閉体上でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[3], [4] などに性質がまとめられている。ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきで考える。

本稿では、ベクトル束、ファイバー束、ファイバー空間のホモトピー性質について述べ、デファイナブルファイバー空間のホモトピー性質について考察する。また、それらの同変版についても考察する。

2. デファイナブルベクトル束・デファイナブルファイバー束・デファイナブルファイバー空間

まず、ベクトル束の定義を思い出そう。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 57R22, 57S10, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, ベクトル束, ファイバー束, ファイバー空間, デファイナブル群, デファイナブルベクトル束, デファイナブルファイバー束, デファイナブルファイバー空間.

定義 2.1. 位相空間 E, X と全射連続写像 $p: E \to X$ の組 $\eta = (E, p, X)$ がベクトル束とは、

(1) 任意の $x \in X$ に対して、$p^{-1}(x)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。

(2) X の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ と各 $i \in I$ に対して、同相写像 $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ が存在して、$p = p_{U_i} \circ h_i$ を満たす。ただし、$p_{U_i} : U_i \times \mathbb{R}^n \to U_i$ は射影とする。この h_i のことを局所自明化写像という。

(3) 任意の $x \in U_i$ に対して、$h_i | p^{-1}(x) : p^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ は線形同型写像である。ここで、$\{x\} \times \mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n$ を同一視する。

また、E を全空間, X を底空間, p を射影という。

定義 2.1 の (2) の n は X の連結成分ごとに変わりうるが、ここでは、変わらないものとする。

定義 2.2. $\eta = (E, p, X), \eta' = (E', p', X)$ をベクトル束とする。

(1) 連続写像 $f : E \to E'$ がベクトル束写像とは、$p = p' \circ f$ かつ任意の $x \in X$ に対して、$f | p^{-1}(x) : p^{-1}(x) \to (p')^{-1}(x)$ が線形写像であることである。

(2) ベクトル束写像 $f : E \to E'$ がベクトル束同型写像とは、f が全単射であって、$f^{-1} : E' \to E$ もベクトル束写像となることである。

次の命題はよく知られている。

命題 2.3. $\eta = (E, p, X)$ をベクトル束とし、$f : Y \to X$ を連続写像とするとき、$f^*(\eta) := (E', p', Y), E' = \{(e, y) \in E \times Y | p(e) = f(y)\}, p' : E' \to Y, p'((e, y)) = y$ は Y 上のベクトル束となる。 □

上の $f^*(\eta)$ を引き戻し束という。

連続写像 $f, h : X \to Y$ がホモトピックとは、連続写像 $H : X \times [0, 1] \to Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、$H(x, 0) = f(x)$ かつ $H(x, 1) = h(x)$ となることである。

定理 2.4 ([5]). $\eta = (E, p, X)$ をパラコンパクト空間上のベクトル束とする。$f, h : Y \to X$ をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とするとき、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はベクトル束同型である。

次にこの定理のセミアルジェブリック版を考える。セミアルジェブリック版は, $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ におけるデファイナブル版である。

定義 2.5. セミアルジェブリックベクトル束は、全空間 E をセミアルジェブリック空間、X をセミアルジェブリック集合、射影 $p: E \to X$ をセミアルジェブリック写像とし、開被覆を有限セミアルジェブリック開被覆とし、同相写像をセミアルジェブリック同相写像としたものである。

ここでは、セミアルジェブリック写像は連続であると仮定する。

セミアルジェブリックカテゴリーにおいても、セミアルジェブリック束写像、セミアルジェブリック束同型写像、引き戻し束を考えることができる。

セミアルジェブリック写像 $f, h : X \to Y$ がセミアルジェブリックホモトピックとは、セミアルジェブリック写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、$H(x,0) = f(x)$ かつ $H(x,1) = h(x)$ となることである。

定理 2.6 ([1]). $\eta = (E, p, X)$ をセミアルジェブリックベクトル束とする。$f, h : Y \to X$ をセミアルジェブリックホモトピックなセミアルジェブリック写像とするとき、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はセミアルジェブリックベクトル束同型である。

定理 2.6 の仮定は、[7] を用いて、$f, h : Y \to X$ をホモトピックなセミアルジェブリック写像という条件に弱めることができる。

次に Nash 版を考える。Nash は、セミアルジェブリックかつ C^ω ことである。Nash 多様体は、C^ω 多様体であって、そのチャートの個数が有限個で、それらの張り合わせ写像が Nash 写像であるものである。通常の C^∞ 多様体のように、Whitney の埋め込み定理は成立しない。Nash 多様体が、ある $\mathbb{R}^n$ に Nash 埋め込み可能のとき、アフィンという。セミアルジェブリックベクトル束と同様にして、Nash ベクトル束を考えることができる。

ところが、Nash ベクトル束に対しては、定理 2.4 のようなホモトピー性質は一般には成立しない ([1], [6])。Nash ベクトル束に条件をつけると同様な性質が成立することが知られている。その条件の説明のために次の定義が必要となるが、あとのセクションのために、同変版で定義する。

定義 2.7. G をコンパクト *Nash* 群、Ω を n 次元 G 表現とし、$B : G \to O_n(\mathbb{R})$ をその表現写像とする。$M(\Omega)$ を $n \times n$ 行列全体の集合で、$(g, A) \in G \times M(\Omega) \to B(g)AB(g)^{-1} \in M(\Omega)$ という G 作用をもっているとする。任意の自然数 k に対して、$\gamma(\Omega, k) = (E(\Omega, k), u, G(\Omega, k))$ を以下のように定義する。

$$G(\Omega, k) = \{A \in M(\Omega) | A^2 = A, A = A', TrA = k\},$$

$$E(\Omega, k) = \{(A, v) \in G(\Omega, k) \times \Omega | Av = v\},$$

$$u : E(\Omega, k) \to G(\Omega, k) : u((A, v)) = A,$$

ただし、A' は A の転置行列を表し、$Tr\ A$ は A のトレースを表すとする。このとき、$\gamma(\Omega, k)$ は代数的 G ベクトル束となり、*Nash* ベクトル束にもなっている。これを G と Ω に付随した普遍 G ベクトル束という。

上の定義において、G 作用を考えないときは、Ω の代わりに、その表現空間の次元 n を用いて、$\gamma(n, k) = (E(n, k), u, G(n, k))$ と表す。

Nash カテゴリーにおいても、Nash 束写像、Nash 束同型写像、引き戻し束を考えることができる。

Nash 写像 $f, h : X \to Y$ が Nash ホモトピックとは、Nash 写像 $H : X \times [0, 1] \to Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、$H(x, 0) = f(x)$ かつ $H(x, 1) = h(x)$ となることである。

定義 2.8. アフィン *Nash* 多様体 X 上の *Nash* ベクトル束 $\eta = (E, p, X)$ が強 *Nash* とは、ある $n \in \mathbb{N}$ とある *Nash* 写像 $f : X \to G(n, k)$ が存在して、η と $f^*(\gamma(n, k))$ が *Nash* ベクトル束同型となることである。

定理 2.9 ([1]). $f, h : X \to Y$ をアフィン *Nash* 多様体間の *Nash* ホモトピックな *Nash* 写像とし、$\eta = (E, p, Y)$ を強 *Nash* ベクトル束とする。引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ は *Nash* ベクトル束同型である。

続いてファイバー束を考える。ファイバー束の定義を思い出そう。

定義 2.10. 位相空間 $E, X,$ 位相群 $K,$ K の効果的作用をもった位相空間 F と全射連続写像 $p : E \to X$ の五つの組 $\eta = (E, p, X, F, K)$ がファイバー束とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1) X の開被覆 $\{U_i\}$ と同相写像 $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ が存在して、$p = p_{U_i} \circ \phi_i$ となる。ただし、$p_{U_i} : U_i \times F \to U_i$ を射影とする。

(2) $p_i : U_i \times F \to F$ を射影とし、$x \in U_i$ に対して、$\phi_{i,x} : p^{-1}(x) \to F$ を $\phi_{i,x}(z) = p_i \circ \phi_i(z)$ と定義する。$x \in U_i \cap U_j$ に対して、$\theta_{ji} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}$ とするとき、$\theta_{ji} \in K$ かつ $\theta_{ji} : U_i \cap U_j \to K$ が連続である。

このとき、E を全空間, X を底空間, p を射影, F をファイバー, K を構造群といい、$\{\phi_i, U_i\}$ を局所自明化という。

定義 2.11. $\eta = (E, p, X, F, K), \eta' = (E', p', X', F, K)$ をファイバー束とする。

(1) 連続写像 $\overline{f}: E \to E'$ がファイバー束写像とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(a) 連続写像 $f: X \to X'$ が存在して、$f \circ p = p' \circ \overline{f}$ となる。

(b) $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}, \{V'_\mu, \phi'_\mu\}$ をそれぞれ η, η' の局所自明化とする。$U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \neq \emptyset$ となる任意の α, μ に対して、$f_{\mu\alpha}(x) = \phi'_{\mu, f(x)} \circ \overline{f} \circ \phi^{-1}_{\alpha, x}$ とするとき、$f_{\mu\alpha} \in K$ かつ $f_{\mu\alpha}: U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \to K$ が連続である。

(2) ファイバー束写像 $\overline{f}: E \to E'$ がファイバー束同型とは、$X = X'$, $f = id_X$, f が全単射であって、$(\overline{f})^{-1}$ も束写像であることである。

定理 2.12 ([11]). $\eta = (E, p, X, F, K)$ をパラコンパクト空間上のファイバー束とし、$f, h: Y \to X$ をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とする。このとき、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はファイバー束同型である。

このデファイナブル版を考えよう。

デファイナブルファイバー束 ([10]) は、E をデファイナブル空間, X をデファイナブル集合, 開被覆を有限デファイナブル開被覆, 同相写像をデファイナブル同相写像と定義すればよい。デファイナブル束写像、デファイナブル束同型写像、引き戻し束を定義することができる。ここでは、デファイナブル写像は連続とする。

定理 2.13 ([10]). $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束とし、$f, h: Y \to X$ をホモトピックなデファイナブル写像とする。Y がコンパクトならば、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル束同型である。

定理 2.13 において、Y がコンパクトであるという条件は、除けるかもしれない。また、[7] より、f と h はデファイナブルホモトピックとなる。

問題 2.14. 定理 *2.13* において、底空間 X をデファイナブル空間に拡張できないか？

次にファイバー空間を考える。

定義 2.15. 位相空間 E, X と全射連続写像 $p: E \to X$ の三つの組 $\eta = (E, p, X)$ がファイバー空間とは、任意の位相空間 Y, 連続写像 $f: Y \to E$ と連続写像 $F: Y \times [0,1] \to X$ で, 各 $x \in Y$ に対して、$(p \circ f)(x) = F(x, 0)$ を満たすものに対して、連続写像 $H: Y \times [0,1] \to E$ で $p \circ H = F$ かつ各 $x \in Y$ に対して、$H(x, 0) = f(x)$ を満たすものが存在することである。

次にファイバー空間の同型を定義したいのだが、ベクトル束やファイバー束とは少し異なる。

定義 2.16. $\eta = (E, p, X), \eta' = (E', p', X)$ を X 上のファイバー空間とする。

(1) 連続写像 $f : E \to E'$ がファイバー写像とは、$p = p' \circ f$ を満たすことである。

(2) ファイバー写像 $f, h : E \to E'$ がファイバーホモトピー同値とは、あるホモトピー $H_t : E \times [0,1] \to E'$ が存在して、$p = p' \circ H_t, H_0 = f, H_1 = h$ となることである。

定義 2.17. $\eta = (E, p, X), \eta' = (E', p', X)$ を X 上のファイバー空間とする。η と η' がファイバーホモトピー同値とは、ファイバー写像 $\phi : E \to E'$ と $\psi : E' \to E$ が存在して、$\phi \circ \psi$ が $id_{E'}$ とファイバーホモトピー同値であり、$\psi \circ \phi$ が id_E とファイバーホモトピー同値であることである。

ファイバー空間に対しても、引き戻し束を考えることができる。

古典的な結果として、次の定理が知られている。

定理 2.18. $\eta = (E, p, X)$ をパラコンパクト空間 X 上のファイバー空間とし、$f, h : Y \to X$ をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とする。引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はファイバーホモトピー同値である。

ファイバー空間のデファイナブル版を自然に定義することができる。また、デファイナブルファイバー束写像、デファイナブルファイバーホモトピー同値を同様に定義することができる。

定理 2.19 ([9]). $\eta = (E, p, X)$ をデファイナブル空間 X 上のデファイナブルファイバー空間とし、$f, h : Y \to X$ をデファイナブル空間の間のデファイナブルホモトピックなデファイナブル写像とする。引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブルファイバーホモトピー同値である。

ベクトル束、ファイバー束、ファイバー空間の関係は、以下である。

定理 2.20. *(1)* ベクトル束はファイバー束である。

(2) パラコンパクト空間上のファイバー束は、ファイバー空間である。

3. 同変版について

定義 3.1. Gを位相群とする。ベクトル束$\eta=(E,p,X)$がGベクトル束とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1) E,XがG空間であり、$p:E\to X$がG写像である。

(2) 任意$x\in X, g\in G$に対して、$p^{-1}(x)\to p^{-1}(gx), y\mapsto gy$が線形同型写像である。

Gベクトル束写像、Gベクトル束同型写像を同様に定義することができる。

二つのG写像$f,h:X\to Y$がGホモトピックとは、G写像$H:X\times[0,1]\to Y$が存在して、任意の$x\in X$に対して、$H(x,0)=f(x), H(x,1)=h(x)$となることである。

定理 3.2 ([11]). Gをコンパクト*Lie*群とする。$\eta=(E,p,X)$をパラコンパクトG空間上のGベクトル束とし、$f,h:Y\to X$をパラコンパクトG空間の間のGホモトピックなG写像とする。このとき、引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$はGベクトル束同型である。

定理3.2の同変版を考えよう。Gをセミアルジェブリック群とするとき、セミアルジェブリックGベクトル束を定義することができる。

定理 3.3 ([2]). Gをコンパクトセミアルジェブリック群とし、X,YをセミアルジェブリックG集合、$f,h:Y\to X$をセミアルジェブリックGホモトピックセミアルジェブリックG写像とする。$\eta=(E,p,X)$をセミアルジェブリックGベクトル束とするとき、このとき、引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$はセミアルジェブリックGベクトル束同型である。

問題 3.4. 定理*3.3*において、Gのコンパクトの条件を除けないか、また、セミアルジェブリックG集合を、セミアルジェブリックG空間にできないかなどの問題が存在する。

定理3.3のNash版を考えよう。セクション2で述べたように、強Nashの条件の下で、結果を得ることができる。

定理 3.5 ([6]). Gをコンパクト*Nash*群、X,Yをアフィン*Nash* G多様体、$f,h:Y\to X$を*Nash* Gホモトピック*Nash* G写像とする。$\eta=(E,p,X)$を強*Nash* Gベクトル束とするとき、このとき、Yがコンパクトならば、引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$は*Nash* Gベクトル束同型である。

次にGファイバー束について考えよう。

Gを位相群とするとき、ファイバー束$\eta=(E,p,X,F,K)$がGファイバー束とは、E,XがG空間であり、pがG写像であり、E,XのG作用は、ファイバー束の同値写像を与えているときにいう。

定理 3.6 ([11]). GをコンパクトLie群とする。$\eta=(E,p,X,F,K)$をパラコンパクトG空間上のGファイバー束とし、$f,h:Y\to X$をパラコンパクトG空間の間のGホモトピックなG写像とする。このとき、引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$はGファイバー束同型である。

次に定理3.6のデファイナブル版を考えよう。

Gをデファイナブル群とするとき、同様にして、デファイナブルGファイバー束$\eta=(E,p,X,F,K)$を定義することができる。ここでは、XはデファイナブルG集合とする。

定理 3.7 ([8]). Gをコンパクトデファイナブル群、$\eta=(E,p,X,F,K)$をデファイナブルGファイバー束、$f,h:Y\to X$をGホモトピックなデファイナブルG写像とする。Yがコンパクトならば、引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$はデファイナブルG束同型である。

定理3.7において、Yがコンパクトであるという条件は、除けるかもしれない。また、[7]より、fとhはデファイナブルGホモトピックとなる。

被覆ホモトピー性質をG作用つきの場合に拡張することにより、Gファイバー空間、デファイナブルGファイバー空間を定義することができる。

定理 3.8 ([9]). Gをデファイナブル群、$\eta=(E,p,X)$をデファイナブルG空間X上のデファイナブルGファイバー空間とし、$f,h:Y\to X$をデファイナブルG空間の間のデファイナブルGホモトピックなデファイナブルG写像とする。引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$はデファイナブルGファイバーホモトピー同値である。

References

[1] J. Bochnak, M. Coste and M.-F. Roy, *Géométie algébrique réelle*, Erg. der Math. und ihrer Grenzg., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

[2] M. J. Choi, T. Kawakami and D.H. Park, *Equivariant semialgebraic vector bundles*, Topology Appl. **123** (2002), 383-400.

[3] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[4] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[5] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Springer, (1966).

[6] T. Kawakami, *Algebraic G vector bundles and Nash G vector bundles*, Chinese J. Math. **22(3)** (1994), 275–289.

[7] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2004), 1–15.
[8] T. Kawakami, *Definable G-fiber bundles and definable $C^r G$-fiber bundles*, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **1343**, 31-45.
[9] T. Kawakami, *Definable G fibrations*, preprint.
[10] T. Kawakami, *Homotopy property for definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.
[11] R. K. Lashof, *Equivariant Bundles*, Illinois J. Math. **26(2)** (1982), 257–271.
[12] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.