

# 佐藤超函数の枠組みにおける ある種の線形函数方程式について

(On some linear functional equations in the framework of hyperfunctions)

千葉大学大学院理学研究科 岡田 靖則 (Yasunori Okada)  
Graduate School of Science, Chiba University

## 概要

超函数 (hyperfunction) の境界値表示を §1 で紹介する. また, 超函数の枠組みで線形微分方程式あるいは線形函数方程式の大域解の有界性などを扱う試みについて §2 で報告する.

## 1 佐藤超函数の紹介

佐藤超函数 (hyperfunction) とは Schwartz による分布 (distribution) などと同様に函数概念を拡張したものであり, 佐藤 [10, 11, 12] で導入された. 以下では超函数とは佐藤超函数を指すものとする. 超函数は実解析的多様体の上の層  $\mathscr{D}$  をなし, 分布の層を部分層として含む. また, 超函数の層には解析的係数の線形偏微分作用素が作用する. 一つ一つの超函数は, 複素の楔領域の正則函数の形式的境界値の有限和として表され (境界値表示, §1.2 も参照のこと), 偏微分作用素の作用は, 正則函数への作用から自然に定まる.

超函数の層は脆弱である. すなわち, 開集合  $\Omega' \subset \Omega$  に対して制限写像  $\mathscr{D}(\Omega) \rightarrow \mathscr{D}(\Omega')$  は全射であり, 言い換えれば  $\Omega'$  上の超函数  $f$  は常に  $\Omega$  上の超函数に延長できる. この事実は境界値問題などに使われる他,  $\mathscr{D}$  は層の脆弱分解のための道具としても用いられる.

一方, 超函数  $u \in \mathscr{D}(\Omega)$  は一般には函数でないので, 各点での値を持つとは限らない. したがって, そのままでは不等式は使えない. また, 超函数の切断の空間  $\mathscr{D}(\Omega)$  には一般によい位相が入らないことが知られており, そのままでは双対性, 作用素の連続性などの議論は使えない. これらの道具を使うには, 定義正則函数のレベルで用いるとか, コンパクト台のもののみ取り出すなどの工夫が必要となる.

解析的線形微分方程式の研究で, 超函数で考えることの利点を十分に享受するには, さらにマイクロ函数や擬微分作用素, 量子化接触変換などを使うのが有効であることが知られている. しかし, これらの概念を用いなくても, 超函数の境界値表示を通して複素領域の微分方程式の議論を用いることで, 例えば解析的常微分方程式の可解性と斉次方程式の解

空間の次元公式, 双曲型方程式の初期値問題の適切性, 非特性境界値問題における自然な境界値写像の存在など, 超函数ならではの結果が, 既に 70 年代までに示されている。

この節ではユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上の超函数の層  $\mathcal{B}$  を考え, 超函数の境界値表示を紹介する. 超函数の理論の詳細や関連する話題については, 前述の佐藤による原典の他, いわゆる SKK 理論といわれる佐藤-河合-柏原 [13] をはじめ多くの文献があるが, ここでは日本語の教科書でフーリエ超函数にも詳しい金子 [6], 比較的新しい教科書として青木-片岡-山崎 [1] を挙げよう.

## 1.1 超函数の定義

**定義 1.1.**  $\mathbb{R}^n$  上の超函数の層  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  は,  $\mathbb{C}^n$  上の正則函数の層  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$  を用いて次のように定義される.

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} := \mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}).$$

(本来, 右辺と向き付け層とのテンソル積を取ったものとして定義するが, ユークリッド空間では向き付け層は  $\mathbb{Z}$  に同型であり, 今は無視する).

$\mathbb{R}^n$  に台を持つコホモロジー群  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$  を被覆コホモロジーで言い換えるなどすれば, 超函数を楔領域の正則函数の境界値で表せる.

## 1.2 超函数の境界値表示

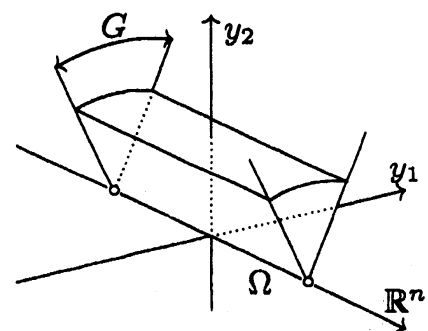
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を領域,  $G$  は  $\mathbb{R}^n$  の開凸錐,  $\Omega + iG[d]$  は  $\Omega + iG$  型の楔領域  $\{x + iy \in \Omega + iG; |y| < d\}$  とすると, 境界値写像

$$b_G : \varinjlim_{d>0} \mathcal{O}(\Omega + iG[d]) \rightarrow \mathcal{B}(\Omega)$$

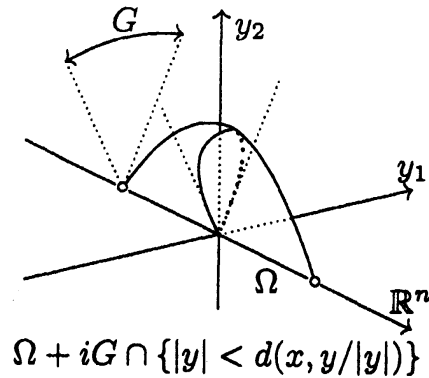
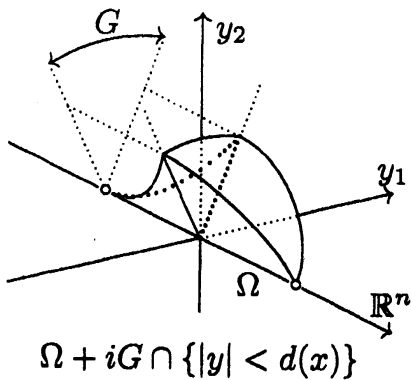
が定義される. すると,  $\Omega$  上の任意の超函数  $f(x)$  は, 適切な有限個の楔の正則函数の境界値の和で

$$f = \sum_j b_{G_j}(F_j)$$

と表示できる.  $F(z) \in \mathcal{O}(\Omega + iG[d])$  の境界値  $b_G(F) \in \mathcal{B}(\Omega)$  を  $F(x + iG_0)$  と書くこともある.



$\Omega + iG$  型の楔領域



実際には  $d$  は  $x \in \Omega$  に依存する正值函数でよく, またさらに  $y/|y| \in G \cap S^{n-1}$  にも依存してよい. このようなものを  $\Omega + iG$  型の無限小楔と呼び, そのようなところで正則な函数の全体を  $\mathcal{O}(\Omega + iG_0)$  と書く.

このとき  $F_j \in \mathcal{O}(\Omega + iG_j, 0)$  の境界値の和  $f(x) = \sum_j F_j(x + iG_j, 0)$  が超函数として 0 となるための条件は楔の刃定理によって記述される.

■楔の刃定理 超函数  $f \in \mathcal{B}(\Omega)$  が, 定義函数  $F_j \in \mathcal{O}(\Omega + iG_j, 0), (j \in J)$  を用いて,

$$f(x) = \sum_j F_j(x + iG_j, 0)$$

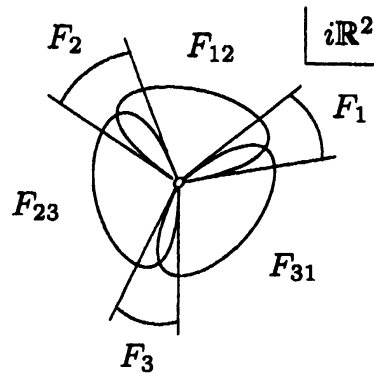
と境界値表示されているとする. このとき  $f = 0$  であるための条件は, ある  $F_{jk} \in \mathcal{O}(\Omega + i(G_j + G_k), 0), (j, k \in J)$  が存在して,

$$\forall j, \forall k, F_{jk} = -F_{kj}, \quad \text{および} \quad \forall j, F_j = \sum_k F_{jk}$$

が成り立つことである. ここで,  $G_j + G_k$  とは, 開凸錘  $G_j$  と  $G_k$  の和集合の凸包に一致することに注意する.

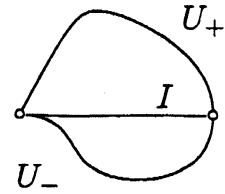
$n = 2$  で  $J = \{1, 2, 3\}$  の場合を考えてみる.

$F_{jk}$  は 2 つの添え字に関して交替的なので  $F_{12}, F_{23}, F_{31}$  のみを用いることにすると, 与えられた  $F_1, F_2, F_3$  に関して, その境界値の和が 0 となるのは,  $F_{12}, F_{23}, F_{31}$  が存在して, 定義域の共通部分で  $F_1 = F_{12} - F_{31}, F_2 = F_{23} - F_{12}, F_3 = F_{31} - F_{23}$  が成り立つときであり, またそのときに限る.  $F_j$  や  $F_{jk}$  たちの定義域の虚方向  $i\mathbb{R}^2$  の切り口は, 例えば図のようなものである.



■1 変数超函数の境界値表示 区間  $I \subset \mathbb{R}$  上の 1 変数超函数の空間は

$$\mathcal{B}(I) \simeq \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U}} \frac{\mathcal{O}(U \setminus I)}{\mathcal{O}(U)}$$



と書ける. ただし, 開集合  $U$  は  $I$  上の正值函数  $d_{\pm}(x)$  を用いて  $U = U_+ \sqcup I \sqcup U_-$ ,  $U_{\pm} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in I, 0 < \pm y < d_{\pm}(x)\}$  と表されるものとする.

実際, 1 次元の場合, 開凸錘は 3 種類 ( $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_-$ ,  $\mathbb{R}$ ) であり, また  $\mathcal{O}(I + i\mathbb{R}0)$  の元は  $\mathcal{O}(I + i\mathbb{R}_{\pm}0)$  のどちらかに引き受けてもらえばよいので,  $\sum_{\pm} b_{\mathbb{R}_{\pm}}(\mathcal{O}(I + i\mathbb{R}_{\pm}0)) = \mathcal{B}(I)$  である. よって,  $\mathcal{O}(U \setminus I) = \mathcal{O}(U_+) \oplus \mathcal{O}(U_-) \rightarrow \mathcal{B}(I)$  を考えて帰納極限を取ればよいが, 楔の刃定理をこの場合に言い換えると,  $F_{\pm} \in \mathcal{O}(U_{\pm})$  が  $F_+(x+i0) + F_-(x-i0) = 0$  をみたすことと,  $I$  の近傍で正則な函数  $F_{12} = -F_{21}$  を用いて  $F_+ = F_{12}$ ,  $F_- = F_{21} = -F_{12}$  と書けることが同値で, これはさらに  $U \setminus I = U_+ \sqcup U_-$  上で  $F_+$  と  $-F_-$  が定める正則函数が,  $U$  上の正則函数の  $U \setminus I$  への制限となることと同値になる.

さらに帰納極限を取らずに 1 つ固定した  $U$  に対して商空間を考えても,  $\frac{\mathcal{O}(U \setminus I)}{\mathcal{O}(U)} \simeq \mathcal{B}(I)$  となることが知られている.

## 2 大域解を扱う試み - 周期方程式の周期解 -

通常 of 超函数は, §1 でも述べたように普通の意味での値も持たず, 例えば有界性の概念も定義されない. そのこともあってか, 大域解の定性理論は超函数の得意分野とは言えないが, この節では超函数の枠組みで大域解の有界性を扱う試みについて報告し, 周期常微分方程式の周期解に関する Massera 型定理 (定理 2.1) の超函数版 (定理 2.9) を紹介する. ただし, 超函数版の Massera 型定理の (超函数解でなく) 普通の解への応用は, 現時点ではかなり限られた範囲に留まっている.

内容の詳細やその拡張, 応用例 (偏微分方程式など) については [9] を参照されたい.

### 2.1 Massera 型定理

以下では独立変数  $t \in \mathbb{R}$  をもつ 1 変数函数や常微分方程式を考え,  $\omega$  は正の定数とし, 函数  $f(t)$  が周期の 1 つとして  $\omega$  を持つとき,  $\omega$ -周期的であるという. Massera [8] は (非線形も含め) 周期常微分方程式が周期解を持つための criterion として,  $+\infty$  方向に有界な解を持つという性質を考察し, 線形の場合には次の定理を挙げた ([8, Theorem 4]).

定理 2.1.  $\mathbb{R}^n$ -値の未知関数  $x(t)$  に関する常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t)$$

において,  $a(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq m}$  および  $b(t) = (b_j(t))_{1 \leq j \leq m}$  は  $\mathbb{R}$  上連続かつ  $\omega$ -周期的とする. このとき, 方程式が  $t > 0$  上で有界な解を持てば,  $\omega$ -周期解を持つ.

この結果についてはさまざまな拡張があるが, 線形方程式の場合に限っていくつか挙げれば, 遅れを持つ方程式に対して Chow-Hale [2], 無限遅れを持つ方程式に関して 日野-村上 [4, 5] 進みと遅れを持つ方程式に関して Li-Lin-Li [7], 抽象関数微分方程式について申-内藤 [14], 反射的 Banach 空間, Montel 局所凸空間に対して Zubelevich [15] などがある.

## 2.2 超関数の有界性, 周期性

Massera 型定理を超関数の世界で考えるには, 超関数の周期性と有界性を考える必要がある. 周期性は, 周期だけ平行移動しても不変なものという定義が超関数でもそのまま採用できるが, 有界性はそのままでは議論できないので, 超関数に似た別のものを構成する方法をとることにする.

有界性を反映した超関数の概念としては, Chung-Kim-Lee [3] が “ $L^\infty$  は  $L^1$  の双対” という考え方に立脚し, 双対性を用いた  $\mathbb{R}^n$  上の有界超関数の空間  $B_{L^\infty}$  の構成や, 熱核の方法による研究を行なった. しかし, 我々は異なるアプローチを取り, 佐藤 [10] の 1 変数フーリエ超関数の理論と似たコホモロジー的方法を用いて,  $\mathbb{R}$  の方向別コンパクト化の上に “無限遠で有界な 1 変数超関数の層” を構成する.

■無限遠で有界な超関数の層  $\mathbb{D} := \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$  を  $\mathbb{R}$  の方向別コンパクト化とし,  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{D} + i\mathbb{R}$  によって  $\mathbb{C}$  を  $\mathbb{D} + i\mathbb{R}$  の部分集合とみなす.  $\mathbb{D} + i\mathbb{R}$  上の前層

$$\mathbb{D} + i\mathbb{R} \supset^{\text{open}} U \mapsto \mathcal{O}(U \cap \mathbb{C}) \cap L^\infty(U \cap \mathbb{C})$$

に付随する層を  $\mathcal{O}_{L^\infty}$  と定め, 無限遠で有界な正則関数の層と呼ぶ. 層化しているので,  $\mathcal{O}_{L^\infty}$  の切断は必ずしも有界関数ではなく, 例えば  $U \subset \mathbb{C}$  の場合  $\mathcal{O}_{L^\infty}(U) = \mathcal{O}(U)$  である.

定義 2.2.  $\mathbb{D}$  上の層  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  を

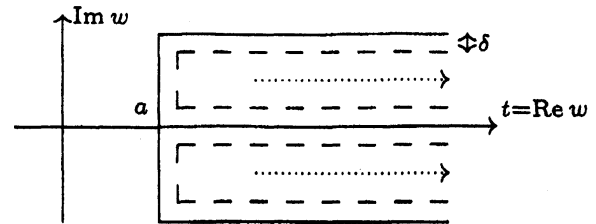
$$\mathcal{B}_{L^\infty} := \mathcal{H}_{\mathbb{D}}^1(\mathcal{O}_{L^\infty})$$

で定義し, 無限遠で有界な超関数の層と呼ぶ. 簡単のため, “無限遠で” は省くこともある.

$\mathcal{B}_{L^\infty}$  の切断は、定義関数で表される。

**事実 2.3.** 例えば  $[a, +\infty]$  のある近傍での  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  の切断  $u$  は、 $]a, +\infty[$  においては、

$$u = [f(w)] = f(t + i0) - f(t - i0)$$



という形に表せる。ここで、 $f(w)$  は  $\{w = t + is \in \mathbb{C} \mid t > a, 0 < |s| < d\}$  上で正則で、任意の  $\delta > 0$  に対して  $\{t > a + \delta, \delta < |s| < d - \delta\}$  上で有界となるような函数である。このような  $f$ 、あるいは上/下半平面に分けて  $f_{\pm}$  を、 $u$  の定義函数という。

実際には、1変数超函数の境界値表示のときと同様、定義函数の定義域は  $\{t + is \mid t > a, 0 < |s| < d(t)\}$  のように虚方向の幅が  $t$  に依存してもよいが、 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} d(t) > 0$  となる必要があるので、 $a$  をわずかにずらすことによって、最初から直積型の定義域を持つと仮定してよい。

■  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  の性質  $\mathcal{O}_{L^\infty}(\mathbb{D})$  係数の線形常微分作用素は、定義正則函数への作用を通して、 $\mathcal{B}_{L^\infty}$  に層準同型として作用する。特に、周期的実解析函数を係数とする線形常微分作用素はその例となる。また、コンパクト台の超函数を核とする合成積作用素など、ある種の積分作用素も、層準同型ではないものの有界超函数の空間たちに作用する写像の族を定め、それらは  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  の制限写像たちと可換である。

$\mathcal{B}_{L^\infty}$  は (層なので必然的に) 局所性を持ち、上記の作用素の作る方程式に対して、例えば  $+\infty$  の近傍のみで定義された解を考え得る。

さらに、 $\mathcal{B}_{L^\infty}$  は  $\mathbb{D}$  上脆弱であり、また  $\mathbb{R}$  に制限すると通常の1変数超函数の層と一致する ( $\mathcal{B}_{L^\infty}|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}$ )。したがって、例えば  $]0, +\infty[$  上の任意の超函数は、 $]0, +\infty[$  上の有界超函数に延長可能である。

なお、大域切断の空間  $\mathcal{B}_{L^\infty}(\mathbb{D})$  は、Chung-Kim-Lee [3] の有界超函数の空間  $B_{L^\infty}$  (の1次元の場合) と一致する。詳しく言えば、 $\mathcal{B}_{L^\infty}$  はフーリエ超函数の層  $\mathcal{Q}$  の部分層、 $B_{L^\infty}$  は  $\mathcal{Q}(\mathbb{D})$  の部分空間であり、 $\mathcal{B}_{L^\infty}(\mathbb{D})$  と  $B_{L^\infty}$  は  $\mathcal{Q}(\mathbb{D})$  の部分空間として等しい。

**事実 2.4.**  $L^\infty$ -函数は自然に有界超函数とみなせる。例えば  $f(t) \in L^\infty(]0, +\infty[)$  は  $\mathcal{B}_{L^\infty}(]0, +\infty[)$  に標準的に埋め込まれる。したがって、考える方程式に  $]0, +\infty[$  上の有界な古典解があれば、それは  $]0, +\infty[$  上の有界超函数解にもなっている。

さらに、局所可積分函数  $f(t) \in L^1_{loc}(]0, +\infty[)$  は、本質的有界でなくても、例えば

$$\sup_{a>1} \|u_0\|_{L^1(a, a+1)} < +\infty$$

という意味で“ $+\infty$  方向に有界的”であれば  $\mathcal{B}_{L^\infty}([0, +\infty])$  に埋め込まれる。

**例 2.5.** (1)  $(\partial_t - i)u = 0$  の解  $u = e^{it}$  は  $\mathbb{R}$  上の有界連続関数だから、標準的な埋め込み像  $\tilde{u} \in \mathcal{B}_{L^\infty}(\mathbb{D})$  を持つが、これは有界超関数としても  $(\partial_t - i)\tilde{u} = 0$  をみたす。

(2) 一方、 $(\partial_t - 1)v = 0$  の解  $v = e^t$  は  $+\infty$  の近傍では有界でなく、標準的には埋め込まれない。脆弱性を利用すると  $\tilde{v}|_{\mathbb{R}} = v$  となるような大域切断  $\tilde{v} \in \mathcal{B}_{L^\infty}(\mathbb{D})$  の存在はわかるが、 $\tilde{v}$  をどう選んでも  $(\partial_t - 1)\tilde{v}$  は無限遠に (のみ) 台を持ち、0 ではない。

**注意 2.6.** 有界超関数は、 $\mathbb{R}$  への制限が連続関数 (の埋め込み像) と一致しても、その連続関数がある有界になるとは限らない。例えば  $\sin e^t$  は  $\mathbb{R}$  上の有界連続関数だから自然な埋め込み像  $u \in \mathcal{B}_{L^\infty}(\mathbb{D})$  を持つ。  $\partial_t$  は  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  に作用するから、 $u$  の導関数  $\partial_t u$  も  $\mathbb{D}$  上の有界超関数である。しかし、 $\partial_t u$  の  $\mathbb{R}$  への制限は  $e^t \cos e^t$  であり、連続だが有界でない。

**■超関数, 有界超関数の周期性**  $\omega$ -周期的な超関数や有界超関数の概念は、単に  $u(t+\omega) - u(t) = 0$  の解として定めることができる。(有界超関数に対しても平行移動  $u \mapsto u(\cdot + \omega)$  は適切に定義されることに注意する。)

**事実 2.7.**  $\omega$  より大きな幅の区間上の  $\omega$ -周期的な超関数の空間、 $\mathbb{R}$  上定義された  $\omega$ -周期的な超関数の空間、 $\mathbb{D}$  上定義された  $\omega$ -周期的な有界超関数の空間は、すべて自然な制限写像で同型となる。特に、無限遠にのみ台を持つ周期有界超関数は自明なものしかない。

したがって、大域的に定義された周期超関数は自然に有界超関数とみなせるが、周期を持ち微分方程式をみたしても、古典的な周期関数とは限らない (微分方程式が特異点を持つ場合) ので注意が必要である。

**例 2.8.** (1)  $\delta(t)$  を Dirac のデルタ関数とする。局所有限和  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t-n)$  は  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  の元として意味を持ち、1-周期超関数を定める。さらに 1-周期的 (微分) 方程式  $\sin(2\pi t)u = 0$  の解である。

(2)  $\tan(t+i0)$  は  $\pi$ -周期超関数で、 $\pi$ -周期的微分方程式  $(\cos^2 t)\partial_t u = 1$  の解である。

## 2.3 主結果

解析的周期線形微分方程式

$$P(t, \partial_t)u = \sum_{j=0}^m a_j(t)\partial_t^j u = f(t) \quad (2.1)$$

あるいは解析的周期線形関数方程式

$$P(t, \partial_t)u = \sum_{j=0}^m a_j(t)k_j * u = f(t) \quad (2.2)$$

を考える. ここで  $a_j(t)$  は  $\omega$ -周期的な実解析関数,  $f(t)$  は  $\omega$ -周期的な超関数, また (2.2) においては  $k_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  はコンパクト台の超関数で,  $k_j * u$  は合成積を表すものとする. 特に  $k_j(t) = \partial_t^j \delta(t)$  ととれば, 作用素  $k_j *$  は  $\partial_t^j$  に等しくなるので, 方程式 (2.2) は (2.1) の一般化となっている. 微分方程式 (2.1) において方程式としての特異点 (ここでは  $a_m(t)$  の実の零点) があっても (その場合, 超関数解の一意接続性は成立しないが) 構わない. (2.1) の作用素  $P$  は  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  に層準同型として作用し, また (2.2) の作用素  $P$  は層準同型とはならないが,  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  の大域切断の空間や  $+\infty$  における茎に作用する.  $f(t)$  も自然に  $\omega$ -周期的な有界超関数とみなせるので, これらの方程式は超関数解と同様に有界超関数解を考えることもできる. このとき,

**定理 2.9** (超関数に対する Massera 型定理). (2.1) あるいは (2.2) の方程式  $Pu = f$  が  $t = +\infty$  の近傍で定義された  $\mathcal{B}_{L^\infty}$  解を持てば,  $\omega$ -周期的な超関数解を持つ.

証明は, 周期超関数は周期定義関数を持つことなど, 有界超関数や周期超関数の種々の性質をあらかじめ準備した上で, 定義正則関数の空間 (と coboundary のなす空間) において,  $\omega$ -平行移動不変な affine 閉部分集合に  $\omega$ -平行移動に関する不動点があることを示す, という方針で行われる.

**注意 2.10.** 超関数に対する Massera 型定理は, オリジナルと比べて仮定は弱い, 結論も弱まっている. 実際, オリジナルでは有界解の存在から周期的な古典解の存在が言えるが, 超関数版で存在がわかるのは周期超関数解である. Massera のオリジナルの方程式の場合は正規形なので解はすべて古典解であり, 実際には結論は弱まらないが, より一般の方程式を考えて滑らかな周期解の存在を示したい場合には, 対応する斉次方程式の解が必然的に滑らかになるように, 方程式に対する制約を強めるなどのことが必要となる.

## 参考文献

- [1] 青木貴史, 片岡清臣, 山崎晋. 超関数・FBI 変換・無限階擬微分作用素. 共立出版, 2004.



- [2] Shui Nee Chow and Jack K. Hale. Strongly limit-compact maps. *Funkcial. Ekvac.*, Vol. 17, pp. 31–38, 1974.
- [3] Soon-Yeong Chung, Dohan Kim, and Eun Gu Lee. Periodic hyperfunctions and Fourier series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 128, No. 8, pp. 2421–2430, 2000.
- [4] Yoshiyuki Hino and Satoru Murakami. Favard's property for linear retarded equations with infinite delay. *Funkcial. Ekvac.*, Vol. 29, No. 1, pp. 11–17, 1986.
- [5] Yoshiyuki Hino and Satoru Murakami. Periodic solutions of a linear Volterra system. In *Differential equations (Xanthi, 1987)*, Vol. 118 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pp. 319–326. Dekker, New York, 1989.
- [6] 金子晃. 超函数入門 (新版). 東京大学出版会, 1996.
- [7] Yong Li, Zhenghua Lin, and Zhaoxing Li. A Massera type criterion for linear functional-differential equations with advance and delay. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 200, No. 3, pp. 717–725, 1996.
- [8] José L. Massera. The existence of periodic solutions of systems of differential equations. *Duke Math. J.*, Vol. 17, pp. 457–475, 1950.
- [9] Yasunori Okada. Massera criterion for linear functional equations in a framework of hyperfunctions. to appear in *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*.
- [10] 佐藤幹夫. 超函数の理論. 数学, Vol. 10, pp. 1–27, 1958.
- [11] Mikio Sato. Theory of hyperfunctions. I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I*, Vol. 8, pp. 139–193, 1959.
- [12] Mikio Sato. Theory of hyperfunctions. II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, Vol. 8, pp. 387–437, 1960.
- [13] Mikio Sato, Takahiro Kawai, and Masaki Kashiwara. Microfunctions and pseudo-differential equations. In *Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of André Martineau)*, pp. 265–529. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 287. Springer, Berlin, 1973.
- [14] Jong Son Shin and Toshiki Naito. Semi-Fredholm operators and periodic solutions for linear functional-differential equations. *J. Differential Equations*, Vol. 153, No. 2, pp. 407–441, 1999.
- [15] O. Zubelevich. A note on theorem of Massera. *Regul. Chaotic Dyn.*, Vol. 11, No. 4, pp. 475–481, 2006.