数理解析研究所講究録
第 1582 巻 2008 年 151-160

Asymptotic stability and uniform asymptotic stability for second-order linear differential equations with damping

島根大学 総合理工学研究科 鬼塚政一 (Masakazu Onitsuka)

Department of Mathematics
Shimane University

1 序文

減衰項をもつ2階線形微分方程式

$$x''+a(t)x'+b(t)x=0 \tag{E}$$

を考える．ただし，係数 $a(t), b(t)$ は $t>0$ において連続微分可能な関数とする．このとき，方程式 (E) のすべての解は時間大域的に存在し，方程式 (E) は平衡点 $x=x'=0$ をもつ．

これまで多くの研究者によって，2階微分方程式の平衡点が uniformly asymptotically stable や asymptotically stable であるための十分条件の研究がなされてきた [2,6,7,9,10]. 方程式 (E) の係数 $a(t), b(t)$ がいずれも定数または周期関数である場合は平衡点の uniform asymptotic stability と asymptotic stability が一致する．それ等の定義から分かるように，一般に，uniformly asymptotically stable ならば，asymptotically stable である．ところが，asymptotically stable であるからといって uniformly asymptotically stable とは限らない．その例を次に示す．方程式

$$x''+\frac{2}{1+t}x'+x=0 \tag{1.1}$$

を考える．このとき，方程式 (1.1) の平衡点 $x=x'=0$ は asymptotically stable であるが，uniformly asymptotically stable でない．実際，方程式 (1.1) の基本解行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sin t}{1+t} & \dfrac{\cos t}{1+t} \\ \dfrac{\cos t}{1+t}-\dfrac{\sin t}{(1+t)^2} & -\dfrac{\sin t}{1+t}-\dfrac{\cos t}{(1+t)^2} \end{pmatrix}.$$

であるから，Coppel の定理 [1] を用いてこの事実を確認できる．この例が示すように，uniform asymptotic stability と asymptotic stability の間には隔たりがある．ところが，それらの差に関する研究はこれまで殆どなされてこなかった．すなわち，平衡点の non-uniform asymptotic stability に関する研究は数少ない．そこで，本研究では方程式 (E) の non-uniform asymptotic stability に焦点を当て，議論を展開する．

以後，方程式 (E) の平衡点 $x=x'=0$ が asymptotically stable であるための十分条件とその例をいくつか紹介する．非負値関数 $\phi(t)$ が *integrally positive* であるとは，ある $\omega>0$ に対して $\tau_n+\omega\leq\sigma_n\leq\tau_{n+1}$ をみたす任意の集合 $I=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\tau_n,\sigma_n]$ において

$$\int_I \phi(t)dt=\infty$$

となることをいう ([3–6, 8, 9, 11] を見よ)．さらに，I の条件に加えて

$$\tau_{n+1}\leq\sigma_n+\Omega$$

をみたす $\Omega>0$ が存在するとき，$\phi(t)$ は *weakly integrally positive* であるという ([5, 9] を参照)．例えば，$1/(1+t)$ や $\sin^2 t/(1+t)$ は weakly integrally positive であるが，integrally positive でない．

Sugie and Onitsuka [9] は方程式 (E) を含む 2 階半分線形微分方程式の Global asymptotic stability について考察した．方程式 (E) に対する結果を次に記載する．

定理 A. ある数 $\bar{a}, \bar{b}, \underline{b}>0$ が存在し，任意の $t>0$ に対して

$$|a(t)|\leq\bar{a} \tag{1.2}$$

かつ

$$\underline{b}\leq b(t)\leq\bar{b} \tag{1.3}$$

が成り立つと仮定とする．このとき，関数 $2a(t)b(t)+b'(t)$ が非負で *weakly integrally positive* ならば，方程式 (E) の平衡点 $x=x'=0$ は *asymptotically stable.*

定理 A を用いれば，方程式

$$x''+\frac{1}{1+t}x'+x=0 \tag{E-1}$$

の平衡点 $x=x'=0$ が asymptotically stable であることがわかる．実際，$a(t)=1/(1+t)$ は有界で $b(t)=1$ より，条件 (1.2) と (1.3) をみたす．また

$$2a(t)b(t)+b'(t)=\frac{2}{1+t}$$

であるから，$2a(t)b(t)+b'(t)$ は非負で weakly integrally positive となる．したがって，定理 A の条件をすべて満足するので，方程式 (E-1) の平衡点は asymptotically stable である．

次に，Duc 等 [2] が与えた方程式 (E) の平衡点が asymptotically stable であるための十分条件を紹介する．

定理 B. 条件 (1.2) と

$$\int_0^{\infty} b(t)dt=\infty \tag{1.4}$$

を満足すると仮定する．このとき，ある数 $\bar{b}, K, k>0$ が存在し，任意の $t>0$ に対して

$$0<b(t)\leq\bar{b}, \tag{1.5}$$

$$|a'(t)|\leq Kb(t) \quad \text{かつ} \quad kb^2(t)\leq 2a(t)b(t)+b'(t) \tag{1.6}$$

が成り立つならば，方程式 (E) の平衡点 $x=x'=0$ は *asymptotically stable.*

彼らは，方程式

$$x'' + \frac{1}{1+t}x' + \frac{1}{1+t}x = 0 \tag{E-2}$$

を例に挙げている．係数 $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ であるから，条件 (1.2), (1.4) そして (1.5) は明らかに成立する．また，$K = k = 1$ と選べば

$$|a'(t)| = \frac{1}{(1+t)^2} < \frac{1}{1+t} = Kb(t) \quad かつ \quad kb^2(t) = \frac{1}{(1+t)^2} = 2a(t)b(t) + b'(t)$$

となるので，条件 (1.6) を満足する．よって，(E-2) の平衡点は asymptotically stable である．

以上のことをまとめると，方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点は asymptotically stable であることがわかった．それでは，これ等の平衡点は uniformly asymptotically stable であるのか？

Ignatyev [7] は uniformly asymptotically stable であるための十分条件を与えた．

定理 C. 条件 (1.2) と (1.3) をみたすとする．このとき，$L, l > 0$ が存在し，任意の $t > 0$ に対して

$$|b'(t)| \le L \quad かつ \quad l \le 2a(t)b(t) + b'(t) \tag{1.7}$$

が成り立つならば，方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *uniformly asymptotically stable.*

定理 C を方程式 (E-1) と (E-2) にそれぞれ適用できるかどうかを確認する．まず，方程式 (E-1) において $a(t) = 1/(1+t), b(t) = 1$ であるから，条件 (1.2) と (1.3) を満足する．ところが，$b'(t) = 0$ より，$2a(t)b(t) + b'(t) = 2/(1+t)$ となるから，(1.7) をみたす $l > 0$ を選ぶことができない．よって，定理 C は方程式 (E-1) に適用できない．一方，方程式 (E-2) において $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ である．このとき，条件 (1.2) を満足するが，(1.3) をみたさない．よって，定理 C は方程式 (E-2) にも適用できない．それでは，方程式 (E-1) や (E-2) の平衡点は uniformly asymptotically stable でないのか？この問いに答えるため，本研究では，変数係数をもつ damped linear oscillator の平衡点が uniformly asymptotically stable でないための十分条件を与えることを目的とする．

次節では，方程式 (E) の平衡点が uniformly asymptotically stable でないための十分条件を与える．その証明には，リヤプノフの手法を用いる．また，方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点が uniformly asymptotically stable であるか否か？の問いに答えを与える．最終節では，方程式 (E) の平衡点が asymptotically stable かつ non-uniformly asymptotically stable であるための十分条件をいくつか与え，応用を示す．

2 非一様漸近安定性

本節では，方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が uniformly asymptotically stable でないための十分条件を与える．便宜上，初期時刻 $t_0 > 0$ とし，初期条件 $(x(t_0; t_0, x_0, x_0'), x'(t_0; t_0, x_0, x_0')) = (x_0, x_0')$ をみたす方程式 (E) の解とその導関数をそれぞれ $x(t; t_0, x_0, x_0')$, $x'(t; t_0, x_0, x_0')$ と表す．線形微分方程式において，uniformly asymptotically stable と exponential asymptotically stable は同値であることが知られている (例えば，[1] を見よ)．本節

では，方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が uniformly asymptotically stable でないことを示す代わりに，exponential asymptotically stable でないことを示す．本研究で得られた定理を紹介する．

定理 2.1. 係数 $a(t)$, $b(t)$ は

$$\limsup_{t\to\infty} a(t) \le 0 \le \liminf_{t\to\infty} b(t) \tag{2.1}$$

かつ

$$\liminf_{t\to\infty}(2a^2(t) + a'(t)) \ge 0 \ge \limsup_{t\to\infty}(2a(t)b(t) + b'(t)) \tag{2.2}$$

をみたすとする．このとき，方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *uniformly asymptotically stable* でない．

証明. 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が uniformly asymptotically stable でないことを証明するため，任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して，ある数 $\delta(\varepsilon) > 0$ と数列 $\{\tau_n\}$, $\{t_n\}$ 及び点列 $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ が存在し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tau_n > 0, \qquad t_n \ge \tau_n$$

かつ

$$|\xi_n| + |\eta_n| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

をみたし

$$|x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| + |x'(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| \ge \delta e^{-\varepsilon(t_n - \tau_n)}$$

が成り立つことを示す．

変数変換 $z = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}x$ を行えば，方程式 (E) は方程式

$$z'' + (-\varepsilon + a(t))z' + \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon a(t)}{2} + b(t)\right) z = 0$$

になる．この方程式は方程式系

$$\begin{aligned} z' &= w, \\ w' &= -g(t)z - h(t)w \end{aligned} \tag{S}$$

に書き換えられる．ただし，$g(t) = \varepsilon^2/4 - \varepsilon a(t)/2 + b(t)$, $h(t) = -\varepsilon + a(t)$ である．条件 (2.1) と (2.2) を使うと，ある数 $T(\varepsilon) > 0$ が存在し，$t \ge T$ に対して

$$a(t) \le \frac{\varepsilon^3}{10}, \quad b(t) \ge -\frac{\varepsilon^3}{10}, \quad 2a^2(t) + a'(t) \ge -\frac{\varepsilon^3}{10}, \quad 2a(t)b(t) + b'(t) \le \frac{\varepsilon^3}{10}$$

を満足する．したがって，$0 < \varepsilon < 1$ であることを考慮すると，$t \ge T$ に対して

$$g(t) \ge \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^4}{20} - \frac{\varepsilon^3}{10} > \frac{\varepsilon^2}{10} \tag{2.3}$$

かつ

$$
\begin{aligned}
2g(t)h(t)+g'(t) &= -\frac{\varepsilon^3}{2}+\frac{3\varepsilon^2 a(t)}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\left(2a^2(t)+4b(t)+a'(t)\right) \\
&\qquad\qquad + 2a(t)b(t)+b'(t) \\
&\le -\frac{\varepsilon^3}{2}+\frac{3\varepsilon^5}{20}+\frac{\varepsilon^3}{4}+\frac{\varepsilon^3}{10}<0
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

が成り立つ.

さて，$\delta(\varepsilon)=2\varepsilon/3\sqrt{10}$ とし，点列 $\{(\xi_n,\eta_n)\}$ と数列 $\{\tau_n\}$, $\{t_n\}$ を任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\xi_n=\eta_n=e^{-\frac{\varepsilon}{2}(n+T)},\quad \tau_n=n+T,\quad t_n=2(n+T) \tag{2.5}
$$

とおく．初期時刻 $\tau_n>T$ からはじまり，初期条件 $(x(\tau_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n),x'(\tau_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n))=(\xi_n,\eta_n)$ を満足する方程式 (E) の解とその導関数を用いて，関数

$$
z_n(t)=e^{\frac{\varepsilon}{2}t}x(t;\tau_n,\xi_n,\eta_n),\quad w_n(t)=e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\left(\frac{\varepsilon}{2}x(t;\tau_n,\xi_n,\eta_n)+x'(t;\tau_n,\xi_n,\eta_n)\right)
$$

とすれば，(2.5) より，$(z_n(t),w_n(t))$ は初期条件 $(z_n(\tau_n),w_n(\tau_n))=(1,\varepsilon/2+1)$ をみたす方程式系 (S) の解になる．方程式系 (S) に対するリヤプノフ関数として

$$
V(t,z,w)=z^2+\frac{w^2}{g(t)}
$$

を考える．不等式 (2.4) より，方程式系 (S) の解に沿った微分は $t\ge\tau_n$ において

$$
\dot{V}_{(S)}(t,z,w)=-\frac{2g(t)h(t)+g'(t)}{g^2(t)}w^2\ge 0
$$

をみたす．簡単のため，$v_n(t)=V(t,z_n(t),w_n(t))$ と書く．このとき，$v_n'(t)\ge 0$ であるから，評価 (2.3) と $0<\varepsilon<1$ より，$t\ge\tau_n$ に対して

$$
\begin{aligned}
1<1+\frac{(\varepsilon/2+1)^2}{g(\tau_n)}&=v_n(\tau_n)\le v_n(t)=z_n^2(t)+\frac{w_n^2(t)}{g(t)} \\
&\le z_n^2(t)+\frac{10w_n^2(t)}{\varepsilon^2}\le\frac{10}{\varepsilon^2}\left(z_n^2(t)+w_n^2(t)\right)
\end{aligned}
$$

がわかる．したがって，$t\ge\tau_n$ に対して，不等式

$$
\frac{\varepsilon}{\sqrt{10}}<\sqrt{z_n^2(t)+w_n^2(t)}\le|z_n(t)|+|w_n(t)|
$$

が成り立つ．さらに (2.5) より，任意の $n\in\mathbb{N}$ において

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\sqrt{10}}<|z_n(t_n)|+|w_n(t_n)|&\le e^{\frac{\varepsilon}{2}t_n}\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)|x(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|+|x'(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|\right\} \\
&\le\frac{3}{2}e^{\frac{\varepsilon}{2}t_n}(|x(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|+|x'(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|)
\end{aligned}
$$

を得る．この不等式を整理すれば，不等式

$$|x(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|+|x'(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|>\delta e^{-\frac{\varepsilon}{2}t_n}=\delta e^{-\varepsilon(t_n-\tau_n)}$$

が成り立つ．故に，方程式 (E) の平衡点 $x=x'=0$ は uniformly asymptotically stable でない． □

定理 2.1 を方程式 (E-1) と (E-2) に適用できるかどうかをそれぞれ確認する．まず，方程式 (E-1) において $a(t)=1/(1+t)$, $b(t)=1$ であるから，条件 (2.1) を満足する．また

$$2a^2(t)+a'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\quad \text{かつ}\quad 2a(t)b(t)+b'(t)=\frac{2}{1+t}$$

なので，条件 (2.2) もみたす．よって，方程式 (E-1) の平衡点は uniformly asymptotically stable でない．次に，方程式 (E-2) において $a(t)=b(t)=1/(1+t)$ であるから，明らかに，条件 (2.1) はみたされる．また，$a'(t)=b'(t)=-1/(1+t)^2$ より

$$2a^2(t)+a'(t)=2a(t)b(t)+b'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}$$

となるので，条件 (2.2) を満足する．故に，(E-2) の平衡点は uniformly asymptotically stable でない．上記のことをまとめると方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点は asymptotically stable でかつ uniformly asymptotically stable でないことがわかった．

ここで，新たな疑問が生じる．方程式 (E-1) と (E-2) に類似したタイプの方程式

$$x''+x'+\frac{1}{1+t}x=0 \tag{E-3}$$

の平衡点 $x=x'=0$ は asymptotically stable であることが定理 B により判定できるが，それでは，その平衡点は not uniformly asymptotically stable なのか否か？実際に，定理 C の条件を方程式 (E-3) が満足するかどうか確認する．係数 $b(t)=1/(1+t)$ であることから，条件 (1.3) を満足する $\underline{b}>0$ を選ぶことができないので，定理 C は適用できない．次に，定理 2.1 の条件を確認する．係数 $a(t)=1$ であることから，条件 (2.1) をみたさないので，定理 2.1 を適用することはできない．したがって，これまでの定理では方程式 (E-3) の平衡点が uniformly asymptotically stable であるかどうかは判定できない．ところが，それに答えを与える定理を得ることができた．以下に記載する．

定理 2.2. ある正の数 $\underline{a}>0$ が存在し，任意の $t>0$ に対して

$$a(t)\ge \underline{a} \tag{2.6}$$

と仮定する．このとき

$$\limsup_{t\to\infty} b(t)\le 0 \tag{2.7}$$

ならば，方程式 (E) の平衡点 $x=x'=0$ は *uniformly asymptotically stable* でない．

証明. 任意の $0 < \varepsilon < \underline{a}$ に対して，変数変換 $z = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}x,\ w = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}(\varepsilon x/2 + x')$ を行えば，定理 2.1 の証明と同様に方程式 (E) は方程式系 (S) に書き換えられる．条件 (2.7) より，ある数 $T(\varepsilon) \geq 0$ が選べ，$t \geq T$ に対して

$$b(t) \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

となるから，(2.6) と併せて考えれば，$t \geq T$ において

$$g(t) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\underline{a}\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon - \underline{a}) < 0 \quad \text{かつ} \quad h(t) \geq -\varepsilon + \underline{a} > 0$$

が成り立つ．このとき，z-軸の正の部分におけるベクトル場は

$$z' = 0 \quad \text{かつ} \quad w' = -g(t)z > 0$$

であり，w-軸の正の部分におけるベクトル場は

$$z' > 0 \quad \text{かつ} \quad w' = -h(t)w < 0$$

となるから，T 以降の時刻で第 1 象限内に入る方程式系 (S) の解は $t \geq T$ において第 1 象限内に留まることになる．

さて，$\delta(\varepsilon) = 1$ とし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，(2.5) をみたす点列 $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ と数列 $\{\tau_n\}$ 及び $\{t_n\}$ を作る．初期時刻 $\tau_n > T$ からはじまり，初期条件 $(x(\tau_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n), x'(\tau_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)) = (\xi_n, \eta_n)$ を満足する方程式 (E) の解とその導関数を用いて関数

$$z_n(t) = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}x(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n), \quad w_n(t) = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\left(\frac{\varepsilon}{2}x(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n) + x'(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n)\right)$$

とおく．このとき，(2.5) より，$(z_n(t), w_n(t))$ は初期条件 $(z_n(\tau_n), w_n(\tau_n)) = (1, \varepsilon/2 + 1)$ をみたす方程式系 (S) の解になる．関数 $W(z) = z^2$ を考えると，方程式系 (S) の解に沿った微分は

$$\dot{W}_{(S)}(z, w) = 2zw$$

である．簡単のため，$w_n(t) = W(z_n(t))$ と表す．$(z_n(\tau_n), w_n(\tau_n)) = (1, \varepsilon/2 + 1)$ は第 1 象限内の点であることから，方程式系 (S) の解 $(z_n(t), w_n(t))$ は $\tau_n > T$ 以降の時刻で第 1 象限内に留まることになるので，$t \geq \tau_n$ において

$$w'(t) = 2z_n(t)w_n(t) > 0$$

が成り立つ．したがって，(2.5) より，$t \geq \tau_n$ に対して

$$1 = z_n^2(\tau_n) = w_n(\tau_n) \leq w_n(t) = z_n^2(t)$$

をみたす．$t_n > \tau_n$ より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$1 \leq |z_n(t_n)| = e^{\frac{\varepsilon}{2}t_n}|x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)|$$

であるから，不等式

$$|x(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|+|x'(t_n;\tau_n,\xi_n,\eta_n)|\geq\delta e^{-\frac{\varepsilon}{2}t_n}=\delta e^{-\hat{\varepsilon}(t_n-\tau_n)}$$

が得られる．故に，方程式 (E) の平衡点 $x=x'=0$ は uniformly asymptotically stable でない． □

方程式 $(E\text{-}3)$ の平衡点が not uniformly asymptotically stable であるかどうかを確認する．$a(t)=1$ であるから，条件 (2.6) をみたす．また，$b(t)=1/(1+t)$ より，$b(t)$ は 0 に漸近するので，条件 (2.7) を満足する．故に，方程式 $(E\text{-}3)$ の平衡点は uniformly asymptotically stable でない．以上のことから方程式 $(E\text{-}3)$ の平衡点は asymptotically stable かつ not uniformly asymptotically stable であることがわかった．

3 定理の応用

前節において，方程式 $(E\text{-}1)$–$(E\text{-}3)$ の平衡点 $x=x'=0$ がいずれも asymptotically stable であるが，uniformly asymptotically stable でないことがわかった．第 3 節では，これ等 3 つの例に限らず，より一般的な定理 2.1–2.3 の応用を示す．

定理 2.1 と定理 A を併せることにより，次の系が得られる．

系 3.1. 条件 (1.2), (1.3), (2.1) 及び (2.2) をみたすと仮定する．このとき，関数 $2a(t)b(t)+b'(t)$ が非負で *weakly integrally positive* ならば，方程式 (E) の平衡点 $x=x'=0$ は *asymptotically stable* かつ *not uniformly asymptotically stable.*

証明. 定理 2.1 と定理 A のすべての条件を満足するので明らかである． □

この系は応用上有用な Bessel の微分方程式

$$(1+t)^2x''+(1+t)x'+\left\{(1+t)^2-n^2\right\}x=0,\qquad n\in\mathbb{R}\tag{B}$$

に適用できる．Bessel の微分方程式の両辺を $(1+t)^2>0$ で割れば

$$a(t)=\frac{1}{1+t}\quad\text{かつ}\quad b(t)=1-\frac{n^2}{(1+t)^2}$$

なので，条件 (1.2), (1.3) と (2.1) を満足する．また

$$2a^2(t)+a'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\quad\text{かつ}\quad 2a(t)b(t)+b'(t)=\frac{2}{1+t}$$

となるから，(2.2) もみたす．さらに，関数 $2a(t)b(t)+b'(t)$ は非負で weakly integrally positive である．よって，系 3.1 より方程式 (B) の平衡点 $x=x'=0$ は asymptotically stable かつ not uniformly asymptotically stable.

定理 2.1 と定理 B を用いることにより，以下を得る．

系 3.2. 条件 (1.4)–(1.6) を満足すると仮定する．このとき，条件

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty}(2a(t)b(t) + b'(t)) = 0 \tag{3.1}$$

ならば，方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *asymptotically stable* かつ *not uniformly asymptotically stable.*

証明. 条件 (3.1) ならば，(1.2) が成り立つので，条件 (1.4)–(1.6) と合わせて考えると，定理 B のすべての条件を満足する．よって，平衡点は asymptotically stable. また，条件 (1.6) と条件 (3.1) より

$$\lim_{t\to\infty} b(t) = \lim_{t\to\infty} |a'(t)| = 0$$

となるので，条件 (2.1) と (2.2) を満足する．故に，定理 2.1 を用いれば，平衡点は uniformly asymptotically stable でない． □

系 3.2 は方程式 $(E\text{-}2)$ に適用できる．実際，$a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ より

$$2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

となるので，条件 (1.4), (1.5) そして (3.1) を満足する．また，$K = k = 1$ とすれば，序文でも述べたように条件 (1.6) も成り立つ．故に，方程式 $(E\text{-}2)$ の平衡点 $x = x' = 0$ は asymptotically stable かつ not uniformly asymptotically stable.

定理 2.2 と定理 B を併せることにより，次の系が得られる．

系 3.3. 条件 (1.2), (1.4)–(1.6), (2.6), (2.7) をみたすと仮定する．このとき，方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *asymptotically stable* かつ *not uniformly asymptotically stable.*

証明. 明らかに，定理 2.2 と定理 B の条件を満足する．故に，平衡点は asymptotically stable かつ not uniformly asymptotically stable. □

参考文献

[1] W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Heath, Boston, 1965. MR0190463 (32 #7875)

[2] L. H. Duc, A. Ilchmann, S. Siegmund and P. Taraba, On stability of linear time-varying second-order differential equations, Quart. Appl. Math. 64 (2006), no. 1, 137–151. MR2211381 (2006m:34126)

[3] A. F. Güvenilir and A. O. Çelebi, A note on asymptotic stability of a class of functional differential equations. B. N. Prasad birth centenary commemoration volume, II, Differential Equations Dynam. Systems 2 (1994), no. 3, 173–204. MR1795826 (2001i:34127)

[4] L. Hatvani, Attractivity theorems for non-autonomous systems of differential equations, Acta Sci. Math. (Szeged) 40 (1978), no. 3-4, 271–283. MR0515208 (80d:34064)

[5] L. Hatvani, On the asymptotic stability for a two-dimensional linear nonautonomous differential system, Nonlinear Anal. 25 (1995), 991–1002. MR1350721 (96k:34105)

[6] L. Hatvani, The effect of damping on the stability properties of the equilibria of nonautonomous systems, (Russian) Prikl. Mat. Mekh. 65 (2001), no. 4, 725–732; translation in J. Appl. Math. Mech. 65 (2001), no. 4, 707–713. MR1883809 (2002h:34097)

[7] A. O. Ignatyev, Stability of a linear oscillator with variable parameters, Electron. J. Differential Equations 1997, no. 17, 6 pp. (electronic). MR1476064 (98i:34076)

[8] V. M. Matrosov, On the stability of motion, J. Appl. Math. Mech. 26 1963 1337–1353. MR0153934 (27 #3895)

[9] J. Sugie and M. Onitsuka, Global asymptotic stability for damped half-linear differential equations, Acta Sci. Math. (Szeged), in press.

[10] J. Sugie, M. Onitsuka and A. Yamaguchi, Asymptotic behavior of solutions of nonautonomous half-linear differential systems, Studia Sci. Math. Hungar. 44 (2007), no. 2, 159–189. MR2325518

[11] B. Zhang, Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear damped wave equation, Differential Equations Dynam. Systems 2 (1994), no. 3, 173–204. MR1386268 (97d:35152)