数理解析研究所講究録
第 1596 巻 2008 年 83-90

BEBIANO-LEMOS-PROVIDÊNCIA INEQUALITY IS MORE STRICT THAN FURUTA INEQUALITY

富永 雅 (Masaru Tominaga)
富山工業高等専門学校
(Toyama National College of Technology)
mtommy@toyama-nct.ac.jp

Abstract. 本稿では，20 周年を迎える Furuta inequality:

$$A \geq B \geq 0,\ r \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A^{1+r} \ \geq\ \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}} \quad \text{for } p \geq 1.$$

に関する最近の結果を概説する．

Furuta inequality を応用し Bebiano-Lemos-Providência は，次を導いた: For $A, B \geq 0$

$$\|A^{\frac{1+t}{2}} B^t A^{\frac{1+t}{2}}\| \quad \leq \quad \|A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{s}{2}} B^s A^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}} A^{\frac{1}{2}}\| \quad \text{for } s \geq t \geq 0.$$

そこで両者の相互関係を調べ，前者の優位性を示す．これを行うにあたり，作用素不等式とノルム不等式との自由な書き換えは本稿での展開を容易にする．

更に，Furuta inequality のノルム不等式化は，逆不等式・補間不等式を導くことを容易にする．また，同様の議論を grand Furuta inequality に対しても適用し，そのノルム不等式化や逆不等式を導くことにする．

1. はじめに

Furuta inequality が導かれてから 20 周年を迎えた．この間，多くの論文に引用され，今や "Furuta inequality" をタイトルに含む論文数は MathSciNet によると 100 編を超える．ここではその Furuta inequality に関する著者の最近の結果 ([5], [6]) の概要報告を行う．

本稿で，作用素 (operator) は，ヒルベルト空間上の有界線形作用素 (bounded linear operator) を意味し，正作用素 (positive operator) A を $A \geq 0$ で表す．

本稿の主役 Furuta inequality [8] (see also [4], [9], [14], [16]) は次で表される作用素不等式である:

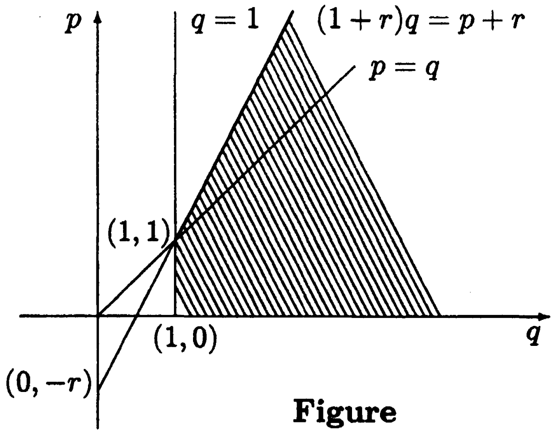
The Furuta inequality. *If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,*
(i) $\left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}$ *and* (ii) $\left(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}$
hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p+r$.

この Furuta inequality の本質は次にある: For each $r \geq 0$

$$\text{(FI)} \qquad A \geq B \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A^{1+r} \ \geq\ \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}$$

holds for $p \geq 1$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47A63.
Key words and phrases. grand Furuta inequality, Furuta inequality, Löwner-Heinz inequality, Araki-Cordes inequality, Bebiano-Lemos-Providência inequality, norm inequality, positive operator, operator inequality, reverse inequality.



Figure

更にその後，次の Furuta inequality (FI) の一般化，つまり grand Furuta inequality [10] が導き出された:

$$\text{(GFI)} \qquad A \geq B \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

for $0 \leq t \leq 1$, $p \geq 1$, $s \geq 1$ and $r \geq t$.

先の Furuta inequality (FI) は，次の有用な作用素不等式，Löwner-Heinz inequality (cf. [15]) の拡張として位置づけられている:

$$(1.1) \qquad A \geq B \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A^\alpha \geq B^\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

この Löwner-Heinz inequality (1.1) は，次のノルム不等式，Araki-Cordes inequality ([1], [3]) に同値である: For $A, B \geq 0$

$$(1.2) \qquad \|A^pB^pA^p\| \leq \|ABA\|^p \qquad \text{for} \quad 0 \leq p \leq 1.$$

((1.2) は Cordes (cf. [3]) による不等式 $\|A^pB^p\| \leq \|AB\|^p$ に同値である．)

一方，Bebiano-Lemos-Providência [2] は，次のノルム不等式(以下，BLP norm inequality) を導いている: For $A, B \geq 0$

$$(1.3) \qquad \|A^{\frac{1+t}{2}}B^tA^{\frac{1+t}{2}}\| \leq \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}}A^{\frac{1}{2}}\| \qquad \text{for} \quad s \geq t \geq 0.$$

この不等式 (1.3) は，前出の不等式とある関係を連想させる．事実，不等式 (1.3) は Furuta inequality (FI) から導かれ，また，形式上の話ではあるが左右各辺の両端から $A^{\frac{1}{2}}$ を消去した結果得られる

$$\|A^{\frac{t}{2}}B^tA^{\frac{t}{2}}\| \leq \|(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}}\| \qquad \text{for} \quad s \geq t \geq 0$$

は (1.2) に同値である．

そこで本稿第 2 章では，Furuta inequality と BLP norm inequality との関係について吟味し，結果として Furuta inequality の優位性を確認する．そのために，作用素不等式とノルム不等式の同値な書き換えは，展開を容易にする．第 3 章では，第 2 章でのノルム不等式を用いて，Furuta inequality の逆不等式 (reverse inequality)，加えて，補間不等式 (Complementary inequality) を与える．

更に，第 4 章では，先の第 2, 3 章と同様に grand Furuta inequality (GFI) と同値なノルム不等式を，更にこれを基に (GFI) の逆不等式を導く．

2. Furuta norm inequality

本章では，Furuta inequality (FI) と BLP norm inequality (1.3) との関係 (差異) について考察する．そのための手法として，(Löwner-Heinz inequality (1.1) と Araki-Cordes inequality (1.2) との関係同様に) BLP norm inequality (1.3) を作用素不等式に書き換え，更に，Furuta inequality (FI) と先の書き換えた不等式の両者について適当な置換を行うことにする．BLP norm inequality (1.3) に対応する作用素不等式は次の通りである: For $A,B \geq 0$

$$A^s \natural_{\frac{t}{s}} B^s \ \leq\ A^{1+s} \text{ for some } s \geq t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad B^t \ \leq\ A^{1+t} \tag{2.1}$$

where $A\natural_\alpha B$ for $0 \leq \alpha \leq 1$ is defined by

$$A\natural_\alpha B := A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for } A,B>0.$$

(2.1) において，B を $B^{\frac{1+t}{t}}$ で置き換え，$p := \frac{s}{t}(\geq 1)$ と書き改めると次のようになる: For $A,B \geq 0$

$$A^s \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \ \leq\ A^{1+s} \text{ for some } p \geq 1 \text{ and } s \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad B^{1+\frac{s}{p}} \ \leq\ A^{1+\frac{s}{p}}. \tag{2.2}$$

本稿では上記不等式 (2.2) を BLP operator inequality とする．

一方，Furuta inequality (FI) に適当な置き換えを行うと次を得ることができる:

Theorem 2.1. *Let A and B be positive operators. Then*

$$A^s \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \ \leq\ A^{1+s} \textit{ for some } p \geq 1 \textit{ and } s \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad B^{1+s} \ \leq\ A^{1+s}. \tag{2.3}$$

Proof. We put

$$C := (A^{-\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{-\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}, \quad \text{or} \quad B^{p+s} = A^{\frac{s}{2}}C^pA^{\frac{s}{2}}.$$

Then the assumption says that $A \geq C \geq 0$, and so Furuta inequality (FI) ensures that

$$B^{1+s} = (A^{\frac{s}{2}}C^pA^{\frac{s}{2}})^{\frac{1+s}{p+s}} \leq A^{1+s}.$$

That is, the desired inequality (2.3) is proved. □

ここで，条件 $p \geq 1$, $s \geq 0$ より $0 \leq \frac{p+s}{p(1+s)} \leq 1$ なので Löwner-Heinz inequality (1.1) を用いると

$$\left(A^s \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \ \leq\ A^{1+s} \quad \Longrightarrow \right) \quad B^{1+s} \ \leq\ A^{1+s} \quad \Longrightarrow \quad B^{1+\frac{s}{p}} \ \leq\ A^{1+\frac{s}{p}}.$$

これは，(2.3) から (2.2) が導かれることを示しているので，結果として BLP operator inequality (2.2) に対する Furuta inequality (FI) の優位性がわかる．

次は，(2.3) に同値なノルム不等式，Furuta norm inequality である:

Corollary 2.2. *Let A and B be positive operators. Then*

$$\|A^{\frac{1+s}{2}}B^{1+s}A^{\frac{1+s}{2}}\|^{\frac{p+s}{p(1+s)}} \quad \leq \quad \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\| \tag{2.4}$$

for $p \geq 1$ and $s \geq 0$.

Theorem 2.1 と Corollary 2.2 に Löwner-Heinz inequality (1.1) を適用すると次を得る:

Corollary 2.3. *Let A and B be positive operators. Then*

$$(2.5) \quad A^s \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \leq A^{1+s} \text{ for some } p \geq 1 \text{ and } s \geq 0 \implies B^{1+t} \leq A^{1+t}$$

for $t \in [0,s]$, or equivalently

$$(2.6) \quad \|A^{\frac{1+t}{2}} B^{1+t} A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{p(1+t)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}} B^{p+s} A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

for $p \geq 1$ and $s \geq t \geq 0$.

Remark 2.4. (2.6) から直接的に BLP inequality (1.3) を算出することができる．事実，(2.6) において B を $B^{\frac{t}{1+t}}$ で置き換えると

$$\|A^{\frac{1+t}{2}} B^t A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{p(1+t)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}} B^{\frac{t(p+s)}{1+t}} A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\|.$$

ここで，$p = \frac{s}{t}$ と置くと，$\frac{p+s}{p(1+t)} = 1$，$\frac{t(p+s)}{1+t} = s$ より (1.3) を得る．

3. Furuta inequality の逆不等式と補間不等式

本章では，ノルム化された Furuta inequaltiy (2.6) の逆不等式，更には補間不等式を与える．

M. Fujii-Y. Seo [7] は，定数 "generalized Kantorovich constant" ([11], [13])

$$(3.1) \quad K(h,p) := \frac{1}{h-1}\frac{h^p-h}{p-1}\left(\frac{p-1}{h^p-h}\frac{h^p-1}{p}\right)^p \quad \text{for } h(\neq 1),\ p \in \mathbb{R} \text{ and } K(1,p) = 1$$

を用いて Araki-Cordes inequality (1.2) の逆不等式を導いた:

Theorem A. *If A and B are positive operators such that $0 < m \leq B \leq M$ for some scalars $0 < m < M$ and $h := \frac{M}{m}$ (> 1), then*

$$(3.2) \quad \|A^p B^p A^p\| \leq K(h,p)\, \|ABA\|^p \quad \textit{for} \quad p \geq 1.$$

(1.2) と (3.2) を用いることにより，(2.6) の逆不等式を与える:

Theorem 3.1. *Let A and B be positive operators such that $0 < m \leq B \leq M$ for some scalars $0 < m < M$ and $h := \frac{M}{m} > 1$. Then*

$$(3.3) \quad \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}} B^{p+s} A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\| \leq K\left(h^{1+t}, \frac{p+s}{1+t}\right)^{\frac{1}{p}} \|A^{\frac{1+t}{2}} B^{1+t} A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{p(1+t)}}$$

for $p \geq 1$ and $s \geq t \geq 0$.

Proof. It follows from (1.2) and (3.2) that for $p > 1$ and $s \geq t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}} B^{p+s} A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\| &\leq \|A^{\frac{p}{2}}(A^{\frac{s}{2}} B^{p+s} A^{\frac{s}{2}}) A^{\frac{p}{2}}\|^{\frac{1}{p}} \\ &= \|A^{\frac{p+s}{2}} B^{(1+t)\cdot\frac{p+s}{1+t}} A^{\frac{p+s}{2}}\|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K\left(h^{1+t}, \frac{p+s}{1+t}\right)^{\frac{1}{p}} \|A^{\frac{1+t}{2}} B^{1+t} A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{p(1+t)}} \end{aligned}$$

because $\frac{p+s}{1+t} \geq 1$. So the desired inequality (3.3) holds. □

ノルム不等式 (3.3) に同値な作用素不等式は次の通り:

Corollary 3.2. *Let A and B be positive operators such that $0 < m \le B \le M$ for some scalars $0 < m < M$ and $h := \frac{M}{m} > 1$. Then*

$$(3.4) \qquad B^{1+t} \le A^{1+t} \text{ for some } t \ge 0 \implies A^s \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \le K(h^{1+t}, \frac{p+s}{1+t})^{\frac{1}{p}} A^{1+s}$$

for some $p \ge 1$ and $s \ge t$.

Remark 3.3. Theorem 3.1 と Corollary 3.2 において $t = s$ とすると, (3.3) と (3.4) はそれぞれ (2.4) と (2.3) の逆不等式であることがわかる.

Theorem 3.1 と Corollary 3.2 から 次のように (1.3) と (2.2) の逆不等式を得る:

Corollary 3.4. *Suppose the hypothesis of Theorem 3.1. Then the following inequalities hold:*

$$(3.5) \qquad \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}}A^{\frac{1}{2}}\| \le K\left(h^t, \frac{s}{t}\right)^{\frac{t}{s}} \|A^{\frac{1+t}{2}}B^tA^{\frac{1+t}{2}}\|$$

for $s \ge t \ge 0$, or equivalently

$$(3.6) \quad B^{1+\frac{s}{p}} \le A^{1+\frac{s}{p}} \text{ for some } p \ge 1 \text{ and } s \ge 0 \implies A^s \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \le K(h^{1+\frac{s}{p}}, p)^{\frac{1}{p}} A^{1+s}.$$

Proof. The inequality (3.6) is given by taking $p := \frac{s}{t} \ge 1$ in Corollary 3.2. Moreover the inequality (3.5) is given by replacing B with $B^{\frac{t}{1+t}}$ in Theorem 3.1. □

次の系は, (3.4) において $t = 0$ とすることにより得られ, 更に $p = 1$ とおくと Löwner-Heinz inequality (1.1) の補間不等式が得られることを示している:

Corollary 3.5. *Let A and B be positive operators such that $0 < m \le B \le M$ for some scalars $0 < m < M$ and $h := \frac{M}{m} > 1$. Then*

$$(3.7) \qquad A \ge B > 0 \implies A^s \natural_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \le K(h, p+s)^{\frac{1}{p}} A^{1+s} \text{ for } p \ge 1 \text{ and } s \ge 0.$$

In particular,

$$(3.8) \qquad A \ge B > 0 \implies B^{1+s} \le K(h, 1+s) A^{1+s} \quad \text{for } s \ge 0.$$

次に, Theorem 3.1 の仮定の下, $\lambda > 0$ に対して

$$\|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|^p - \lambda \|A^{\frac{1+t}{2}}B^{1+t}A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{1+t}}$$

の上限を求める. その準備として次を定義する: $q \ge 1$ と $h := \frac{M}{m}$ $(0 < m < M)$ に対して

$$I_q = I_{q,m,M} := \left[\frac{q(h-1)}{h^q-1}, \frac{q(h^q-h^{q-1})}{h^q-1}\right]$$

また

$$(3.9) \qquad F(m, M, q; \lambda) := \begin{cases} (1-\lambda)M^q & \text{if } 0 < \lambda < \frac{q(h-1)}{h^q-1} \\ \lambda m^q \dfrac{h-h^q}{h-1}\left\{(\lambda K(h,q))^{\frac{1}{q-1}} - 1\right\} & \text{if } \lambda \in I_q \\ (1-\lambda)m^q & \text{if } \lambda > \frac{q(h^q-h^{q-1})}{h^q-1}. \end{cases}$$

$\lambda > 0$ に関して関数 $f(\lambda) := F(m,M,q;\lambda)$ は単調に減少し，$\lambda = K(h,q)^{-1}(\in I_q)$ は $f(\lambda)=0$ の唯一解である．

更に，M. Fujii-Y. Seo [7] による Araki-Cordes inequality (1.2) の補間不等式を引用する: If A and B are positive operators such that $0 < m \le B \le M$ for some scalars $m < M$, then for each $\lambda \ge K(h,p)^{-1}$

$$\|ABA\|^q \ \ge\ \lambda\|A^qB^qA^q\| +\ F(m,M,q;\lambda)\|A\|^{2q} \qquad \text{for} \quad q>1. \tag{3.10}$$

これらを応用することにより，(2.4) に関する補間不等式が得られる:

Theorem 3.6. *If A and B are positive operators such that $0 < m \le B \le M$ for some scalars $0 < m < M$ and $h := \frac{M}{m} > 1$, then for each $\lambda \in \left(0, K\left(h^{1+t}, \frac{p+s}{1+t}\right)\right]$*

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|^p \quad &\le \quad \lambda\,\|A^{\frac{1+t}{2}}B^{1+t}A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{1+t}} \\ &- \quad \lambda\,F(m^{1+t},M^{1+t},\frac{p+s}{1+t};\frac{1}{\lambda})\ \|A\|^{p+s} \end{aligned} \tag{3.11}$$

for $p \ge 1$ and $s \ge t \ge 0$.

Proof. Since $p \ge 1$ and $s \ge t \ge 0$ implies $\frac{p+s}{1+t} > 1$, it follows from (1.2) and (3.10) that for each $\lambda \in (0, K\left(h^{1+t}, \frac{p+s}{1+t}\right)]$

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|^p \quad &\le \quad \|A^{\frac{p}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})A^{\frac{p}{2}}\| \\ &= \quad \|A^{\frac{p+s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{p+s}{2}}\| \\ &\le \quad \lambda\|A^{\frac{1+t}{2}}B^{1+t}A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{1+t}} \ -\ \lambda F(m^{1+t},M^{1+t},\frac{p+s}{1+t};\frac{1}{\lambda})\|A\|^{p+s}. \end{aligned}$$

So the desired inequality (3.11) holds. □

Remark 3.7. (i) Theorem 3.6 において $p = \frac{s}{t}$ とおくと，任意の $\lambda \in \left(0, K(h^{1+t}, \frac{s}{t})\right]$ に関して次のように (1.3) の補間不等式を得る:

$$\|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{\frac{s}{t}+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}}A^{\frac{1}{2}}\|^{\frac{s}{t}} \ \le\ \lambda\|A^{\frac{1+t}{2}}B^{1+t}A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{s}{t}} \ -\ \lambda F(m^{1+t},M^{1+t},\frac{s}{t};\frac{1}{\lambda})\|A\|^{\frac{s}{t}+s}$$

for $s \ge t \ge 0$.

(ii) Theorem 3.6 と同じ仮定の下，任意の $\lambda \ge K\left(h^{1+t}, \frac{p+s}{1+t}\right)$ に関して次を得る:

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|^p \ &\le\ \lambda\|A^{\frac{1+t}{2}}B^{t}A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{1+t}} \\ &\quad -\ \lambda F(m^{1+t},M^{1+t},\frac{p+s}{1+t};\frac{1}{\lambda})\|A^{-1}\|^{-(p+s)} \end{aligned}$$

for $p \ge 1$ and $s \ge t \ge 0$.

(iii) Theorem 3.6 により (2.4) の差に関する逆不等式を得る:

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|^p \ &\le\ \|A^{\frac{1+t}{2}}B^{1+t}A^{\frac{1+t}{2}}\|^{\frac{p+s}{1+t}} \\ &\quad -\ m^{\frac{p+s}{1+t}}\frac{h-h^{\frac{p+s}{1+t}}}{h-1}\left\{\left(K(h^{1+t},\frac{p+s}{1+t})\right)^{\frac{1}{\frac{p+s}{1+t}-1}} - 1\right\}\|A\|^{p+s} \end{aligned}$$

for $p \ge 1$ and $s \ge t \ge 0$.

4. GRAND FURUTA INEQUALITY に同値なノルム不等式とその逆不等式

(GFI) は，次のノルム不等式に同値である．

Lemma 4.1. *Let A and B be positive operators. Then the grand Furuta inequality* (GFI) *is equivalent to*

$$\|A^{\frac{1-t+r}{2}}B^{r-t}A^{\frac{1-t+r}{2}}\|^{\frac{(p-t)s+r}{ps(1-t+r)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}}\{A^{-\frac{t}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}}A^{-\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\| \tag{4.1}$$

for $0 \leq t \leq 1$, $p \geq 1$, $s \geq 1$ and $r \geq t$.

Proof. Replace A to A^{-1} and put

$$C = \{A^{\frac{t}{2}}(A^{-\frac{r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}}A^{\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{p}}, \quad \text{or} \quad B^{r-t} = \{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}C^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

in (4.1), then we have

$$\|A^{-\frac{1-t+r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}C^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}A^{-\frac{1-t+r}{2}}\|^{\frac{(p-t)s+r}{ps(1-t+r)}} \leq \|A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}\|.$$

This is equivalent to the inequality

$$A \geq C \quad \Rightarrow \quad A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}C^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}},$$

that is, (4.1) is equivalent to (GFI). □

Remark 4.2. (i) (4.1) において $t=0$, $s=1$ とする．更に r と B をそれぞれ s と $B^{\frac{1+s}{s}}$ に置き換えると (2.4) が導かれる．

(ii) [12] において, Furuta は (4.1) に同様な不等式を与えた．

次に generalized Kantorovich constant (3.1) を用いて (4.1) の逆不等式を与える:

Theorem 4.3. *Let A and B be positive operators such that $0 < m \leq B \leq M$ for some scalars $0 < m < M$ and $h := \frac{M}{m} > 1$. Then*

$$\begin{aligned}&\|A^{\frac{1}{2}}\{A^{-\frac{t}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}}A^{-\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\| \\ &\leq K(h^{\frac{1-t+r'}{1-t+r}(r-t)}, \frac{(p-t)s+r}{1-t+r'})^{\frac{1}{ps}}\|A^{\frac{1-t+r'}{2}}B^{\frac{1-t+r'}{1-t+r}(r-t)}A^{\frac{1-t+r'}{2}}\|^{\frac{(p-t)s+r}{ps(1-t+r')}}\end{aligned} \tag{4.2}$$

for $0 \leq t \leq 1$, $p \geq 1$, $s \geq 1$ and $1+r \geq 1+r' > t$, where $K(h,p)$ is the generalized Kantorovich constant defined by (3.1).

Proof. For $p \geq 1$ and $s \geq 1$, the Araki-Cordes inequality (1.2) implies that

$$\begin{aligned}&\|A^{\frac{1}{2}}\{A^{-\frac{t}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}}A^{-\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\| \\ &\leq \|A^{\frac{p}{2}}\{A^{-\frac{t}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}}A^{-\frac{t}{2}}\}A^{\frac{p}{2}}\|^{\frac{1}{p}} \\ &= \|A^{\frac{p-t}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}}A^{\frac{p-t}{2}}\|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|A^{\frac{(p-t)s}{2}}(A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{\frac{r}{2}})A^{\frac{(p-t)s}{2}}\|^{\frac{1}{ps}} \\ &= \|A^{\frac{(p-t)s+r}{2}}B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}}A^{\frac{(p-t)s+r}{2}}\|^{\frac{1}{ps}}.\end{aligned}$$

Moreover, since $(p-t)s+r \geq 1-t+r' > 0$, it follows from the reverse Araki-Cordes inequality (3.2) that

$$
\begin{aligned}
&\|A^{\frac{(p-t)s+r}{2}} B^{\frac{(r-t)\{(p-t)s+r\}}{1-t+r}} A^{\frac{(p-t)s+r}{2}}\|^{\frac{1}{ps}} \\
\leq\ &\|A^{\frac{(p-t)s+r}{2}} B^{(r-t)\frac{1-t+r'}{1-t+r}\frac{(p-t)s+r}{1-t+r'}} A^{\frac{(p-t)s+r}{2}}\|^{\frac{1}{ps}} \\
\leq\ &K(h^{\frac{1-t+r'}{1-t+r}(r-t)}, \frac{(p-t)s+r}{1-t+r'})^{\frac{1}{ps}} \|A^{\frac{1-t+r'}{2}} B^{\frac{1-t+r'}{1-t+r}(r-t)} A^{\frac{1-t+r'}{2}}\|^{\frac{(p-t)s+r}{ps(1-t+r')}}.
\end{aligned}
$$

Combining them, we have the desired inequality (4.2). □

Remark 4.4. grand Furuta inequality (GFI) の逆不等式 (4.2) において $t=0$, $s=1$ とし，$r, r', B(,h)$ をそれぞれ $s, t, B^{\frac{1+s}{s}}(,h^{\frac{1+s}{s}})$ に置き換えることにより，(3.3) が得られる.

References

[1] H. Araki, *On an inequality of Lieb and Thirring*, Lett. Math. Phys., **19**(1990), 167–170.

[2] N. Bebiano, R. Lemos and J. Providência, *Inequalities for quantum relative entropy*, Linear Algebra Appl. **401**(2005), 159–172.

[3] H.O. Cordes, *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras*, Cambridge University Press, 1987.

[4] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator theory, **23**(1990), 67–72.

[5] M. Fujii, R. Nakamoto and M. Tominaga, *Generalized Bebiano-Lemos-Providência inequalities and their reverses*, Linear Algebra Appl. **426**(2007), 33-39.

[6] M. Fujii, R. Nakamoto and M. Tominaga, *Reverse of the grand Furuta inequality and its applications*, Preprint.

[7] M. Fujii and Y. Seo, *Reverse inequalities of Cordes and Löwner-Heinz inequalities*, Nihonkai Math. J., **16**(2005), 145–154.

[8] T. Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$*, Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85–88.

[9] T. Furuta, *Elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad., **65**(1989), 126.

[10] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log majorization*, Linear Algebra Appl. **219**(1995), 139–155.

[11] T. Furuta, *Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities*, J. Inequal. Appl., **2**(1998), 137–148.

[12] T. Furuta, *Operator inequality implying generalized Bebiano-Lemos-Providência one*, Linear Algebra Appl. **426**(2007), 342–348.

[13] T. Furuta, J. Mićić, J.E. Pečarić and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities **1**, Element, Zagreb, 2005.

[14] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33**(1988), 883–886.

[15] G.K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

[16] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 141–146.