数理解析研究所講究録
第 1613 巻 2008 年 144-186

一般化されたケーラー-アインシュタイン計量とベルグマン核の力学系

辻 元*

2008 年 9 月 7 日

概 要

射影代数多様体上の標準体積形式をベルグマン核の力学系を用いて構成するという筆者の最近の仕事 ([T8, T6, T4]) について解説する。MSC: 53C25(32G07 53C55 58E11)

目 次

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Reserch (S) 17104001

1 序論

本稿では [T8, T6, T4] について解説する。与えられたページ数に余裕があるので、証明はできるだけ与えるようにした。

[T8, T6, T4] の主な動機は、小平次元が 0 以上または、標準束が擬有効な射影代数多様体上に、標準体積形式を構成することであった。標準体積形式を構成する目的は射影代数多様体の変形を研究するためである。

この標準体積形式の原型は双曲型リーマン面のポアンカレ体積形式である。実際、ポアンカレ体積形式によりリーマン面のモジュライ空間上のヴェイユーペーターソン計量が定義され、モジュライ空間のケーラー幾何学が展開される。

我々の目的は [T8, T6, T4] で構成された標準体積形式を用いて、上の一次元の場合のヴェイユ-ペーターソン幾何を高次元化し、相対標準束の直像の半正値性を研究することにある。これにより、高次元射影代数多様体の双有理モジュライ空間上の幾何を展開することができる。勿論、こういった研究の動機となったのは、ベルグマン核の対数多重劣調和性に関するベルントソンの研究 ([B1]) が契機となっている。

[T4] で、筆者は一般型代数多様体上のケーラー-アインシュタインカレントをベルグマン核の力学系を用いて構成した。このベルグマン核の力学系は [T3] で構成したものである。またここでケーラー-アインシュタインカレントは [T0, Su] で構成したものと同じである。このようにケーラー-アインシュタインカレントをベルグマン計量（カレント）で一種の代数近似することにより、ベルグマン核の対数多重劣調和性が自然に使えるようになる。 この発見により、一気にベルグマン核の理論と、ケーラーアインシュタイン計量の幾何学が結びつくこととなった。

ところが、これだけでは、一般型射影代数多様体にしか理論が適用できず、不満が残った。 そこで、一般型の場合に構成したベルグマン核の力学系を見ると、これは小平次元が0以上の射影代数多様体上にも同様に定義され、さらには標準束が擬有効の射影代数多様体にも定義されることが分かる。従って、このベルグマン核の力学系の正規化された極限が一般型代数多様体のケーラー-アインシュタインカレントの半正小平次元の場合の代替物と期待するのは自然である。. それが、どのようなものであるか、しばらく不明であったが、藤野-森の標準束公式 ([F-M]) を見ているうちに、一瞬の中に、全ては明らかになった。 つまり、標準束公式の境界部分に相当する部分を補正すれば、その極限が、飯高ファイブレーションの底空間上で、 ケーラー-アインシュタイン方程式と似た偏微分方程式を満たすことが了解されたのであった。

この極限を **標準測度 (canonical measure)**, そのリッチ曲率 $-\mathrm{Ric}$ を**標準半正カレント (canonical semipositive current)** と呼ぶ。

ケーラー-アインシュタイン計量と標準半正カレントの違いは次のようである: 第一に標準半正カレントは全空間の生成点ではケーラーカレントではなく、飯高ファイブレーションの底空間の生成点で真に正である。第二に標準半正カレントはケーラー-アインシュタイン計量と似た方程式を満たすが、この方程式はホッジ構造の変形から来る補正項を持つ。

この一般化の目的は小平次元が半正の代数多様体の変形を研究することである。実際、標準半正カレントは代数的ファイバー空間の全空間で半正で、各一般ファイバー上でそのファイバー上の標準半正カレントに制限するような半正閉カレントを定義する。

また標準測度は Song と Tian ([S-T]) によりリッチ流の観点から独立に発見されたことに注意する。彼らは、標準束が半アンプルの場合にケーラーリッチ流の極限として構成し、同じ方程式を満たすカレントを一般の、小平次元が半正の代数多様体上で構成した。 この意味で、彼らの構成は標準束が半アンプルの場合をモデルにしていると言える。

従って [T8] は標準測度をベルグマン核の力学系の極限として構成することに意義がある。この力学系による構成の利点は、カレントの特異性から来る困難を回避できることである。例えば、代数的ファイバー空間における標準測度の多重劣調和変動性 (定理 4.1) は、計量の特異性から直接計算で出すのは難しいように思われるが、定理 4.1 はベルグマン核の多重劣調和変動性と力学系による標準測度の構成から直ちに従う。

またケーラー-リッチ流を非極小代数多様体上で考えると困難が生ずる。この場合ケーラー-リッチ流は有限時間でケーラー錐を越える。従って、この場合必然的に特異性を持つケーラーリッチ流を考えねばならず困難を伴う。しかし、力学系による構成 (定理 1.9) では、標準半正カレント (または標準測度) を小平次元が半正ならば自動的に構成できる。定理 1.9 はケーラー-リッチ流の離散化と看做すことが出来、特異性から来る困難を克服することがで

きる。

もう一つの方向として多様体上の十分アンプルな直線束から出発する力学系を考えることができる。このとき緩やかな条件下で力学系の正規化極限が存在し超標準測度と呼ばれる測度が構成される。 超標準測度は多重標準系に依らず明らかに標準測度標準より自然な概念である。

ここで中心的な課題は標準測度と超標準測度が一致するかということである。この問いが肯定的ならアバンダンス予想が解決できる。

また標準即の標準的な AZD の構成として Narashimhan-Simha 計量を使う方法があり ([T6]) これも本質的には標準測度と同じものと予想される。 これも後で解説する。

1.1 ケーラー-アインシュタイン計量

コンパクトリーマン面上の双曲計量の高次元アナログが負のリッチ曲率を持つケーラー-アインシュタイン計量である。

X をコンパクトケーラー多様体、その上のケーラー形式を

$$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

とする。(X, ω) がケーラー-アインシュタインであるとは, 定数 c が存在して

$$\mathrm{Ric}_\omega = c\omega$$

が成り立つことである。 ここで Ric_ω はリッチ形式:

$$\mathrm{Ric}_\omega := -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}})$$

を表す。このとき ω を X のケーラー-アインシュタイン形式と呼ぶ。コンパクト複素多様体 X がケーラー-アインシュタイン形式を持てば, $c_1(X)$ は負、0 または正である。

逆にカラビ予想の解により次が知られる。

定理 1.1 *([A, Y1]),* X をコンパクトケーラー多様体とする。

$c_1(X)$ が負であれば, 一意的にケーラー-アインシュタイン形式 ω_E で

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_E} = \omega_E$$

となるものが存在する *([A, Y1])*。また $c_1(X)$ が $H^2(X, \mathbb{R})$ で 0 であれば, 任意のケーラークラスに一意的にケーラー-アインシュタイン形式 ω_E で

$$\mathrm{Ric}_{\omega_E} = 0$$

となるものが存在する *([Y1])*。 □

1.2 ケーラー-アインシュタインカレント

ケーラー-アインシュタイン 計量には様々な応用がある。しかし滑らかな複素射影代数多様体は一般にケーラー-アインシュタイン 計量を持たない。なぜならその第一チャーン類は必ずしも定値ではないからである。この困難は特異性を許すケーラー-アインシュタイン計量を考えることで克服される。

[T0] において私は滑らかな極小一般型代数多様体上にケーラー-アインシュタイン カレント ω_E を構成した。より正確には、一意的に半正カレント ω_E と X の空でないザリスキ解集合 U が存在し

1. ω_E は U 上の C^∞ ケーラー形式。
2. $-\mathrm{Ric}_{\omega_E} = \omega_E$ が U 上で成り立つ。
3. ω_E は X 上で絶対連続。

となる。後に杉山は一般型の標準モデル上にケーラー-アインシュタインカレントが存在することを示した ([Su])。また私は任意の滑らかな一般型射影代数多様体 (標準環の有限生成を仮定せずに) ケーラー-アインシュタインカレントが存在することを示した ([T4])。従って、滑らかな射影一般型代数多様体にはケーラー-アインシュタイン 計量の代替物が存在する。上の一般型射影代数多様体 X 上のケーラー-アインシュタインカレント ω_E は次の性質をもつ：$h_E := (\omega_E^n)^{-1} (n = \dim X)$ は K_X の特異エルミート計量でその曲率カレント $\sqrt{-1}\,\Theta_{h_E}$ は閉半正カレントかつ

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X) \otimes \mathcal{I}(h_E^m)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

が任意の $m \geqq 1$ について成り立つ。 即ち h_E は K_X の AZD である (cf. 定義 1.4). 別の言葉で言えば、特異エルミート計量 h_E は K_X の全ての正値性を抽出している。

しかし滑らかな非一般型射影的多様体については何も分からない。これを次の説で論じよう。

1.3 飯高ファイブレーション

標準束の正値性を抽出する一番単純な方法は多重標準系を使う方法である。X を滑らかな 射影代数多様体とする。X の小平次元 $\mathrm{Kod}(X)$ は

$$\mathrm{Kod}(X) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\log \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))}{\log m}$$

で定義される。$\mathrm{Kod}(X)$ は $-\infty$ または 0 と $\dim X$ の間の整数になることが知られる。

X を滑らかな 射影代数多様体で $\mathrm{Kod}(X) \geqq 0$ となるものとする。 このとき十分 大きな $m > 0$ に対して完備線形系 $|m!K_X|$ は連結なファイバーを持つ有理ファイブレーション：

$$f : X - \cdots \to Y$$

を定義する。$f : X - \cdots \to Y$ を X の飯高ファイブレーションという。飯高ファイブレーションは双有理同値類の意味で十分 大きな m に依らない。この意味で飯高ファイブレーションは一意的である。適当に改変操作をして f は射で Y は滑らかとしてよい。

飯高 ファイブレーション $f : X \longrightarrow Y$ は次の性質を持つ:

1. 一般ファイバー F は $\mathrm{Kod}(F) = 0$ を満たす。

2. $\dim Y = \mathrm{Kod}(Y)$。

1.4 解析的ザリスキ分解 (AZD)

L をコンパクト複素多様体 X 上の擬有効直線束とする。環：

$$R(X, L) = \oplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(mL)),$$

を研究するのに解析的ザリスキ分解の概念を導入すると便利である。

まず擬有効の概念を特異エルミート束に拡張しておく。

定義 1.2 (L, h_L) を複素多様体 X 上の特異エルミート直線束とする。(L, h_L) が**擬有効** (**pseudoeffective**) とは曲率カレントが半正であることとである。 □

定義 1.3 M をコンパクト複素多様体、L を M 上の正則直線束とする。L の特異エルミート計量 h が**解析的ザリスキ分解** (**AZD**) であるとは以下が成り立つことである。

1. Θ_h は半正値閉カレント。 つまり (L, h) は擬有効である。

2. 各 $m \geq 0$ に対し、自然な単射:

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(mL) \otimes \mathcal{I}(h^m)) \to H^0(M, \mathcal{O}_M(mL))$$

は同型である。 □

注 1.4 *AZD* が滑らかな射影代数多様体 M 上の直線束 L に存在すれば L は擬有効 *(pseudoeffective)* である。 □

コンパクト複素多様体上の擬有効直線束には常に AZD が存在する (cf. [T1, T2, D-P-S])。 AZD の利点はコンパクト複素多様体 X 上の擬有効直線束 L を半正曲率カレントを持つ特異エルミート直線束のように看做すことが出来る点にある（少なくとも環 $R(X, L)$ を研究する限り、即ち切断を研究する限りはそうである）。

L を滑らかな射影代数多様体 X 上の直線束とし h_0 を L の C^∞ エルミート計量とする。

$$h_{min} := \inf\{h \mid L \text{ 上の特異エルミート 計量}, \ h \geqq h_0, \sqrt{-1}\Theta_h \geqq 0\}.$$

とおく。このとき h_{min} は L の AZD で、次の意味で極小特異性を持つ。

定義 1.5 L を滑らかな射影代数多様体 X 上の擬有効直線束とする。L 上の *AZD* h が**極小特異性を持つ AZD** であるとは、 任意の L 上の *AZD* h' に対して正定数 C が存在して

$$h \leqq C \cdot h'$$

が成り立つことである。 □

1.5 標準束公式とケーラー-アインシュタイン方程式の補正項

小平次元が半正の滑らかな射影代数多様体 X の標準束 h_K で標準的なものを作るのに偏微分方程式を使うことを考える。

$$f : X \longrightarrow Y$$

を飯高ファイブレーションで Y は滑らかかつ f は射であるとする。方程式はケーラー-アインシュタイン方程式： $-\mathrm{Ric}_{\omega_E} = \omega_E$ と似ているが以下の点で異なる:

1. 方程式は Y 上で定義され X 上の方程式ではない。
2. 方程式はホッジ構造の変形から来る補正項を持つ。

$f_*\mathcal{O}_X(m!K_{X/Y})^{**}$ は適当な正整数 m に対して Y 上の直線束としておく、ここで $**$ は二重双対である。

次数つき環 $R := \oplus_{i=0}^\infty R_i$ と正整数 m に対して

$$R^{(m)} := \oplus_{i=0}^\infty R_{mi}.$$

とおく。KLT（川又対数末端）対 (M, D) に対して

$$R(M, K_M + D) := \oplus_{m=0}^\infty \Gamma(M, \mathcal{O}_M(\lfloor m(K_M + D) \rfloor))$$

とおき

$$\mathrm{Kod}(M, D) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\log\dim\Gamma(M, \mathcal{O}_M(\lfloor m(K_M + D)\rfloor))}{\log m}$$

とおく。

定理 1.6 *([F-M, p.183, 定理 5.2])* (X, Δ) を固有 *KLT* で

$$\mathrm{Kod}(X, K_X + \Delta) = n.$$

とする。このとき n-次元 *KLT* 対 (Y', Δ') で $\mathrm{Kod}(Y', \Delta') = n$ と 2 つの正整数 e, e' で

$$R(X, K_X + \Delta)^{(e)} \simeq R(Y', K_{Y'} + \Delta')^{(e')}$$

となるものがある。□

このとき標準環 $R(X, K_X)^{(e)}$ は対数的一般型 KLT 対 (Y', Δ) の対数標準環の部分環と同一視される。因子 Δ は $\mathbb{Q}$-直線束

$$L := \frac{1}{m!} f_* \mathcal{O}_X (m! K_{X/Y})^{**}$$

は標準束公式を通じて結ばれる ([F-M] を見よ。 [F-M, Section 2] では上の L は $L_{X/Y}$ と書かれている)。

L は十分大きな m に依らない (cf. [F-M, Section 2]). L は自然な特異エルミート計量 h_L:

$$h_L^{m!}(\sigma, \sigma) = \left(\int_{X_y} |\sigma|^{\frac{2}{m!}}\right)^{m!}$$

を持つ。 ここで $y \in Y, X_y := f^{-1}(y)$ 、$\sigma \in L_y$ である。h_L はカレントの意味で半正曲率を持つ ([Ka2])。Ω を Y 上の C^∞ 体積形式とし方程式：

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_Y} + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L} = \omega_Y, \tag{1}$$

を考える。 ここで

$$\omega_Y = -\mathrm{Ric}\,\Omega + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u,$$

u は未知関数である。ここで $\sqrt{-1}\,\Theta_{h_L}$ が標準束公式 ([F-M, p.183,Theorem 5.2]) KLT の KLT 対 (Y, Δ) 境界因子に対応する補正項である。方程式 (1) の正当性は X 上のベルグマン 核の力学系が [T4] と同様に Y 上の方程式 (1) を満たすカレントを構成する (cf. 定理 1.9) ことから確認することが出来る。

実際には私はまずベルグマン 核の力学系を用いてカレントを構成し、その後で、それが方程式 (1) を満たすことを導いた。実際、標準束公式 ([F-M]) からこの展開は容易に予想できるであろう。

方程式 (1) を解くのには幾つかの難しさがある。まず一般に C^∞-解が存在しないことである。. さらに h_L が代数的特異性を持たないことである (cf. 定義 2.1)。また h_L が C^∞ でも u は C^∞ とは限らない。第 2 に u は一意性を持たない。しかし $\Omega^{-1} \cdot h_L \cdot e^u$ が $K_Y + L$ の AZD であるという条件を付けると解 u は一意的であり、カレント ω_Y はベルグマン核の力学系から構成されるものに一致する (節 1.7 と節 3 を見よ)。

1.6 標準 ケーラー カレント

滑らかな射影代数多様体で半正小平 次元を持つものに対する標準半正カレントの存在定理を述べよう。

定理 1.7 *(cf. [S-T, Theorem B.2])* $K_Y + L$ の特異エルミート計量 h_K と Y の空でないザリスキ開集合 U で

1. h_K は $K_Y + L$ の *AZD*。
2. f^*h_K は K_X の *AZD*。
3. h_K は U 上実解析的。
4. $\omega_Y = \sqrt{-1}\,\Theta_{h_K}$ は U 上のケーラー形式。
5. $-\mathrm{Ric}_{\omega_Y} + \sqrt{-1}\,\Theta_L = \omega_Y$ が U 上で成り立つ。

ものが存在する。□

定理 1.7 の証明は [S-T] でも与えられているが、ここで別証明を与えておこう。

定義 1.8 カレント ω_Y を飯高 ファイブレーション $f : X \longrightarrow Y$ に付随する**標準ケーラーカレント (canonical Kähler current)** と呼ぶ。 また $\omega_X := f^*\omega_Y$ を X 上の**標準半正カレント (canonical semipositive current)** と呼ぶ。X 上の測度 $d\mu_{can}$ を

$$d\mu_{can} := \frac{1}{n!} f^*\omega_Y^n \cdot h_L^{-1}$$

で定義し**標準測度 (canonical measure)** と呼ぶ。ここで n は $\dim Y$ を表す。

□

標準ケーラーカレントの存在はモンジュ-アンペール方程式を解くことによって分かる。ここで与える証明はの証明 [T4, Section 5.1, Theorem 5.1] の証明と平行なものである ([S-T] の証明は [T4, 定理 5.1] の証明と非常に似ているが何故か [T4] は引用していない)。証明は 2 節で与える ([S-T, Section 4] も見よ)。

1.7 力学系による 標準ケーラー カレントの構成

定理 1.7 の標準 ケーラーカレントは ([T4]) と同様にベルグマン核の力学系の極限として構成される。

X を滑らかな射影的 n-多様体で $\mathrm{Kod}(X) \geqq 0$ とする。

$$f : X - \cdots \rightarrow Y$$

を飯高 ファイブレーションで完備線形系 $|m_0!K_X|$ に付随するものとする。ここで m_0 は十分大きな正整数である。適当に改変操作を行って次を仮定しておく:

1. Y は滑らかで f は射。

2. $f_*\mathcal{O}_X(m_0!K_{X/Y})^{**}$ は Y 上の直線束。

$$L := \frac{1}{m_0!}f_*\mathcal{O}_X(m_0!K_{X/Y})^{**}$$

とおく。a を正整数で $f_*\mathcal{O}_X(aK_{X/Y}) \neq 0$ となるものとする。このとき

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(maK_X)) \simeq H^0(Y, \mathcal{O}_Y(ma(K_Y + L))) \tag{2}$$

が全ての $m \geqq 0$ について成り立ち $\mathrm{Kod}(X) = \dim Y$ が成り立つ。特に (2) は $K_Y + L$ はビッグである。m_0 を十分大きな正整数とすると 次の条件が満たされるとしてよい:

1. エフェクティブなカルティエ因子 M で $A := m_0!(K_Y + L) - M$ が非常にアンプルとなるものが存在する。

2. 全ての Y 上の擬有効 (pseudoeffective) 特異エルミート直線束 (F, h_F) に対して $\mathcal{O}_Y(A + F) \otimes \mathcal{I}(h_F)$ は大域切断で生成される。

このような m_0 の存在はネーデルの消滅定理 ([N, p.561]) と小平の補題から従う。h_A を A の C^∞ エルミート計量で曲率が真に正のものとする。包含準同型: $\mathcal{O}_Y(A) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(m_0!(K_Y + L))$ により h_A は $m_0!(K_Y + L)$ 上の特異エルミート計量 $h_A/|\tau_M|^2$ と同一視されその曲率は真に正である。ここで τ_M は $\mathcal{O}_Y(M)$ の大域切断で M を因子とするものである。特異エルミート計量の無限列 $\{h_m\}_{m \geqq m_0!}$ とベルグマン核 $\{K_m\}$ の無限列を以下のように帰納的に定義する。

まず $h_{m_0!} := h_A$ とおき

$$K_{m_0!+1} := \begin{cases} K(Y, K_Y + m_0!(K_Y + L), h_{m_0!}), & a > 1 \text{ の場合} \\ \\ K(Y, K_Y + L + m_0!(K_Y + L), h_L \cdot h_{m_0!}), & a = 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

とおく。 ここで特異エルミート直線束 (F, h_F) に対して $K(Y, K_Y + F, h_F)$ は $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + F) \otimes \mathcal{I}(h_F))$ の L^2-内積:

$$(\sigma, \sigma') := (\sqrt{-1})^{n^2} \int_Y h_F \cdot \sigma \wedge \bar{\sigma}',$$

$(n = \dim Y)$ に関するベルグマン核の対角成分を表す。そして次に

$$h_{m_0!+1} := (K_{m_0!+1})^{-1}$$

とおく。以下これを繰り返す。既に K_m と $\lfloor\frac{m}{a}\rfloor a(K_Y+L)+(m-\lfloor\frac{m}{a}\rfloor a)K_Y$ 上の特異エルミート計量 h_m が定義されたとする。ここで実数 λ に対して $\lfloor\lambda\rfloor$ は λ を超えない最大の整数を表す。次に

$$K_{m+1} := \begin{cases} K(Y,(m+1)K_Y+\lfloor\frac{m+1}{a}\rfloor aL, h_m) & m+1 \not\equiv 0 \bmod a \text{ の場合} \\ \\ K(Y,(m+1)(K_Y+L), h_L^a\otimes h_m) & m+1\equiv 0 \bmod a \text{ の場合} \end{cases}$$

及び

$$h_{m+1} := (K_{m+1})^{-1}$$

とおく。　このように帰納的に $\{h_m\}_{m\geqq m_0!}$ 及び $\{K_m\}_{m>m_0!}$ が定義された。このような帰納的構成は [T3] に遡る。次の定理によりこの力学系の正規化極限が、標準ケーラー カレントを定義することが分かる。

定理 1.9 X を滑らかな射影代数多様体で半正小平次元を持つものとし $f: X\longrightarrow Y$ を上のような飯高 ファイブレーションとする。m_0 を十分大きな正整数として $\{h_m\}_{m\geq m_0}$ を上で定義した特異エルミート計量の列とし、n で $\dim Y$ を表す。ω_Y を定理 *1.7* で構成した Y 上の標準ケーラーカレントとする。このとき

$$h_\infty := \liminf_{m\to\infty} \sqrt[m]{(m!)^n\cdot h_m}$$

は K_Y+L の特異エルミート計量で

$$\omega_Y = \sqrt{-1}\,\Theta_{h_\infty}$$

が成り立つ。　特に $\sqrt{-1}\,\Theta_{h_\infty}$ *(in fact* h_∞*)* は A 及び h_A に依存しない。□

注 1.10 上の力学系の構成ではアンプル因子 A として $m_0!(K_Y+L)-M$ で M がエフェクティブという形のものを使った。しかし任意のアンプル因子 A K_Y+L がビッグなので十分大きな m に対して

$$H^0(Y,\mathcal{O}_Y(m!(K_Y+L)-A))\neq 0$$

となるから、全てこの形で書けることが分かる。□

1.8　X 上の力学系

$\{h_m\}_{m\geqq m_0!}$ を前節で構成した力学系とする。$\mathcal{O}_X(f^*(a(K_Y+L)))$ は $\mathcal{O}_X(aK_X)$ の部分層なので、$a|m$ ならば f^*h_m は mK_X の特異エルミート計量と同一視できる。さらに $a=1$ ならばホッジ 計量 h_L の定義により

$$(f^*h_m)^{-1} = K(X, mK_X, f^*h_{m-1})$$

が成り立つ。故にこの場合力学系 $\{(f^*h_m)^{-1}\}$ X 上のベルグマン核の力学系と看做せる。

もし $a > 1$ であれば

$$(f^*h_{m+1})^{-1} = \begin{cases} K(X, (m+1)K_X - (\{\frac{m+1}{a}\}a)L, f^*h_L^{-1} \cdot f^*h_m) & m+1 \not\equiv 0 \bmod a \text{ の場合} \\ \\ K(X, (m+1)K_X, f^*(h_m \cdot h_L^a)) & m+1 \equiv 0 \bmod a \text{ の場合} \end{cases}$$

とおく。 ここで実数 λ に対して $\{\lambda\}$ はその小数部分 $\lambda - \lfloor\lambda\rfloor$ を表す。ここで

$$(m+1)K_X - \{\frac{m+1}{a}\}aL = (\lfloor\frac{m+1}{a}\rfloor a)K_X + (\{\frac{m+1}{a}\}a)f^*K_Y$$

は X 上の直線束であることに注意する。

このように Y 上のベルグマン核の力学系を X 上のベルグマン核の力学系に変換することが出来る。

2 モンジュ-アンペール方程式の解法による標準測度の構成

この節では定理 1.7 を証明する。定理 1.7 の証明は [S-T] に独立に与えられているが、ここでは自前の証明を与えておく。ここでの証明は [S-T] のものと以下の点で異なる。

1. 代数的特異点を持つとは限らないホッジ計量 h_L のスムージングを考える。故に修正された方程式の族を考える。

2. C^0-評価はホッジ計量のディスクリミナントローカスの周囲での振る舞いと極小 AZD の考察により得られる。

ここでのテクニックは 20 年前から知られているものである (cf. [Su, T0])。従って、この証明自体は何ら新しいものではない。

2.1 設定

X を滑らかな射影代数 n-多様体で with $\mathrm{Kod}(X) \geqq 0$ を満たすものとする。

$$f : X - \cdots \to Y$$

を完備線形系系 $|m_0!K_X|$ に付随する飯高ファイブレーションとする。適当な双有理改変を行って以下を仮定してよい。

1. f は射である。

2. Y は滑らかな射影代数多様体。

3. $f_*\mathcal{O}_X(m_0!K_{X/Y})^{**}$ は Y 上の直線束。

4. f ディスクリミナントローカス D は Y 上の正規交叉因子。

Y 上の $\mathbb{Q}$-直線束 L を

$$L := \frac{1}{m_0!} f_*\mathcal{O}_X(m_0!K_{X/Y})^{**}$$

で定義し、L 上の特異エルミート計量 h_L を

$$h_L^{m_0!}(\sigma,\sigma) := (\int_{X_y} |\sigma|^{\frac{2}{m_0!}})^{m_0!}.$$

で定義する。 h_L は

$$Y^\circ := \{y \in Y | f \text{ は } y \text{ 上で極大階数}\} = Y - D$$

上滑らかで、D に沿ってホッジ構造の変形により記述される特異性を持つ。

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m!(K_Y + L)) \otimes \mathcal{I}(h_L^{\otimes m!})) \simeq H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m!(K_Y + L)))$$

が十分大きな m について成り立つ。 即ち h_L の特異性に伴う L^2-条件は $m!(K_Y + L)$ の切断に影響を与えない。

Ω を Y 上の C^∞-体積形式とし方程式：

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_Y} + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L} = \omega_Y \tag{3}$$

を Y 上で考える。 ここで

$$\omega_Y = -\mathrm{Ric}\,\Omega + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$$

で、関数 u は Y 上で上半連続で上に有界である。この方程式は

$$\log\frac{(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u)^n}{\Omega} = u,$$

と同値である。 ここで $n := \dim Y$ かつ

$$\omega := -\mathrm{Ric}\,\Omega + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L}$$

である。$\mathrm{Kod}(X) = \dim Y$ が成り立つので $K_Y + (L, h_L)$ はビッグ、即ち

$$\limsup_{m\to\infty}(m!)^{-n}\dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m!(K_Y + L)) \otimes \mathcal{I}(h_L^{m!})) > 0$$

が成り立つ。ここで $n = \dim Y$ である。ここで方程式 (3) を解くのに主な困難は h_L が次の意味で 代数的特異性を持たないからである。

定義 2.1 h を 直線束 L 上の特異エルミート計量とする。h が代数的特異性をもつとは, ある正整数 m_0 に対して m_0L の大域正則切断 $\sigma_0,\cdots,\sigma_N$ と C^∞ 関数 ϕ で

$$h = e^{\phi}\cdot(\sum_{i=0}^{N} \mid \sigma_i \mid^2)^{-\frac{1}{m_0}}$$

を満たすものが存在することである。□

2.2 ホッジ 計量 h_L の平滑化

特異エルミート計量 h_L は生成点で C^∞ であるが代数的特異性を持つとは限らない h_L の特異性はホッジ構造の変形で記述される。a を $f_*\mathcal{O}_X(aK_{X/Y})^{**}$ が 0 でないような最小の正整数とする。$f_*\mathcal{O}_X(aK_{X/Y})$ の正則切断の a 乗根は a 巡回被覆上の標準形式の族と看做せる。このようにホッジ 計量はホッジ構造の変形により記述できる (cf. [Sch])。$f: X \longrightarrow Y$ ディスクリミナントローカス D を正規交叉因子と仮定する。[Ka1] と同様にホッジ束の局所自由拡張はモノドロミーの準羃単性により記述される。この場合局所モノドロミーはアーベルである。

定義 2.2 (M,B) を複素多様体 M と正規交叉因子 B の組とする。ω_P を ケーラー $M-B$ 上のケーラー形式 ω_P が**ポアンカレ増大**であるとは M 上の任意の多重円板 $\Delta^n := \{(z_1,\cdots,z_n); |z_i| < 1, 1 \leqq i \leqq n\}$ in M で

$$\Delta^n \cap B = \{(z_1,\cdots,z_n)\in\Delta^n | z_1\cdots z_k = 0\},$$

を満たすものに対して正値有界連続 関数 $a \leqq b$ on Δ^n で

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\sqrt{-1}\,dz_i\wedge d\bar{z}_i}{|z_i|^2(\log|z_i|)^2} + \sum_{j=k+1}^{n}\sqrt{-1}\,dz_j\wedge d\bar{z}_j\right) &\leqq \omega_P \\ &\leqq b\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\sqrt{-1}\,dz_i\wedge d\bar{z}_i}{|z_i|^2(\log|z_i|)^2} + \sum_{j=k+1}^{n}\sqrt{-1}\,dz_j\wedge d\bar{z}_j\right) \end{aligned}$$

を $\Delta^n \cap (M-B)$ 上満たすものが存在することである。

Ω_P を体積形式 $M-B$ 上の体積形式とする。Ω_P がポアンカレ'e 増大であるとは M 上の任意の多重円板 Δ^n in M で

$$\Delta^n \cap B = \{(z_1,\cdots,z_n)\in\Delta^n | z_1\cdots z_k = 0\},$$

となるものに対して、Δ^n 上の連続関数 $c(z)$ で

$$\Omega_P = c(z)\cdot\left(\wedge_{i=1}^{k}\frac{\sqrt{-1}\,dz_i\wedge d\bar{z}_i}{|z_i|^2(\log|z_i|)^2}\right)\wedge(\wedge_{j=k+1}^{n}\sqrt{-1}\,dz_j\wedge d\bar{z}_j)$$

が $\Delta^n \cap (M-B)$ で成り立つことをいう。□

注 **2.3** (M, B) を上のようなペアとし M をコンパクトとする。Ω_P をポアンカレ増大体積形式とする。Δ^n を上の定義のような多重円板とし 関数 $c(z)$ が Δ^n 上 C^2 であるとする。このとき $-\mathrm{Ric}\,\Omega_P$ も次の意味でポアンカレ増大である。即ち正定数 C が存在して

$$-C \cdot \omega_P \leqq -\mathrm{Ric}\,\Omega_P \leqq C \cdot \omega_P$$

が成り立つ。ここで ω_P は $M - B$ 上のポアンカレ増大のケーラー形式である。

次の補題が成り立つ。

補題 2.4 正整数 m_0 が存在して $h_L^{m_0!}$ は 直線束 $f_*\mathcal{O}_Y(m_0!K_{X/Y})^{**}$ 上の特異エルミート計量で局所正則枠に関して

$$h_L = O((-\log|\sigma_D|)^q)$$

が成り立つ。 ここで σ_D は D の局所定義関数で q は正整数である。 さらに曲率 $\sqrt{-1}\,\Theta_{h_L}$ は $Y - D$ 上のポアンカレ増大ケーラー形式 ω_P の正の定数倍で上から抑えられる。$\square$

補題 2.4 における h_L は [Ka1] のホッジ構造の変形 ([Sch]) から従う。$\sqrt{-1}\,\Theta_{h_L}$ の評価は周期領域の正則切断曲率が水平方向には上から負の定数で押さえられる ([G]) こととヤウ-ロイデンのシュワルツ補題 ([Y2, R]) から従う。

この意味で h_L は滑らかな 計量に非常に近い。h_L を平滑化するために Y の有限開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ で U_α が局所座標 $z_\alpha = (z_\alpha^1, \cdots, z_\alpha^n)$ により $\mathbb{C}^n$ の原点中心の単位開球に双正則同値なものをとる。$\mathcal{U}$ を適当にとると z_α より大きな開部分集合 $\hat{U}_\alpha$ で z_α により $\mathbb{C}^n$ の原点を中心とする半径 2 の開球に写されるものがあるとしてよい。h_0 を $\mathbb{Q}$ 直線束 L の C^∞ エルミート計量とする。

$$\varphi := \log \frac{h_L}{h_0}.$$

とおく。ρ を $\mathbb{C}^n$ 上の C^∞ 関数で $0 \leqq \rho \leqq 1$ かつ $\mathrm{supp}\,\rho$ が $\mathbb{C}^n$ の O を中心とする半径 1 の開球に含まれ

$$\int_{\mathbb{C}^n} \rho(z)\,d\mu(z) = 1,$$

を満たすものとする。 ここで $d\mu$ は $\mathbb{C}^n$ の通常のルベーグ測度である。各 $0 < \delta < 1$ に対して

$$\rho_\delta(z) = \delta^{-2n}\rho(z/\delta).$$

とおく。 $\varphi|U_\alpha$ の軟化 $\varphi_{\alpha,\delta}$ を ρ_δ を用いて z_α に関して

$$\varphi_{\alpha,\delta} := (\varphi|U_\alpha) * \rho_\delta$$

とおく。z_α は $\hat{U}_\alpha$ 上で正則座標系であるから $\varphi_{\alpha,\delta}$ は U_α 上で任意の $0 < \delta < 1$ に対して C^∞ 関数である。$\varphi_{\alpha,\delta}$ は $\delta \downarrow 0$ とするとき φ in L^1-位相で U_α 上コ

ンパクト u 一様に収束し、かつ C^∞-位相で $U_\alpha \backslash D$ 上コンパクト一様に収束する。

$\{\phi_\alpha\}$ を $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分解とする。

$$h_{L,\delta} := \exp(\sum_\alpha \phi_\alpha \cdot \varphi_{\alpha,\delta}) \cdot h_0.$$

とおく。$h_{L,\delta}$ は L 上の C^∞-エルミート計量で $\delta > 0$ に依らない正定数 C で

$$\sqrt{-1}\,\Theta_{h_{L,\delta}} \leqq C \cdot \omega_P$$

となるものが存在する 一般に $h_{L,\delta}$ は半正曲率を持たない。 しかし Y 上の連続 関数 $c(\delta)$ で

$$\sqrt{-1}\,\Theta_{h_{L,\delta}} \geqq -c(\delta) \cdot \omega_P$$

かつ Y 上一様に

$$\lim_{\delta \downarrow 0} c(\delta) = 0$$

となるものが存在する。

2.3 定理 1.7 の証明

この節では定理1.7を証明する。 ここでの証明は [Y1] と [T0] のアイデアによる。 ただホッジ計量 h_L は代数的特異性を持たないのでホッジ計量の平滑化を考える必要が生じる。

m_0 を十分大きな 正整数で任意の $m \geqq m_0$ に対して $m!(K_Y + L)$ はカルティエ 因子かつ $|m!(K_Y + L)|$ が Y の双有理埋め込みを与えるものとする。$m > m_0$ に対して $\pi_m : Y_m \longrightarrow Y$ を Bs $|m!(K_Y + L)|$ の底点解消で

$$\pi_m : Y_m \longrightarrow Y$$

$\pi_{m-1} : Y_{m-1} \longrightarrow Y$ を経由するように帰納的にとる。

$$\mu_m : Y_m \longrightarrow Y_{m-1}$$

を自然な射とする。

$$\pi_m^* \,|m!(K_Y + L)| = |P_m| + F_m$$

を $\pi_m^* \,|m!(K_Y + L)|$ の自由部分 $|P_m|$ と固定部分 F_m への分解とする。V を Y の解析的部分集合で:

$\{y$V∈:¥° $| \, y \in \cap_{m>0} \mathrm{Bs}|m!(K_Y + L)|$ or

$m \geqq m_0$ に対して $\Phi_{|m!(K_Y+L)|}$ は y の近傍で埋め込みでない $\}$

$\cup\{f$ のディスクリミナントローカス $\}$.

とおく。Y の適当な双有理改変を行って V は正規交叉因子と仮定してよい。Y_m 上のエフェクティブ $\mathbb{Q}$-因子 E_m で $m \geqq m_0$ に対して

1. $P_m - E_m$ は Y_m 上アンプル。

2. E_m の全ての係数は 1 未満。

3. $\mathrm{Supp}\, E_m = \pi_m^{-1}(V)$.

4. $((m+1)!)^{-1}(P_{m+1} - E_{m+1}) - \mu_{m+1}^*(m!)^{-1}(P_m - E_m))$ はエフェクティブ。

$\{E_m\}$ を取った後で $\{E_m\}$ を $\{2^{-m}E_m\}$ で置き換える。こう取り直しても同じ性質を持つ。$\{2^{-m}E_m\}$ を $\{E_m\}$ と書く。こうすると 3 の代わりに

3′. $((m+1)!)^{-1}(P_{m+1} - E_{m+1}) - \mu_{m+1}^*(m!)^{-1}(P_m - E_m))$ はエフェクティブで適当な正数 ε_m に対して $\varepsilon_m(\pi_{m+1}^{-1}V)_{red}$ を含む。

$h_{(m)}$ を C^∞ を $pi_m^*((m!)^{-1}(P_m - E_m))$ 上のエルミート 計量で真に正の 曲率を持つものとする。 すると

$$\Omega_{m,\delta} := h_{(m)}^{-1} \cdot (\pi_m^* h_{L,\delta})$$

は Y_m 上の退化体積形式と考えることができる。$\{h_{L,\delta}\}$ を節 2.2 のホッジ 計量 h_L の平滑化とする。$\Omega_{m,\delta} \cdot (\pi_m^* h_{L,\delta})^{-1}$ は代数的特異性を持つ。

[Su, p.430, 定理 5.6] によりモンジュ-アンペール方程式：

$$(-\mathrm{Ric}\,\Omega_{m,\delta} + \sqrt{-1}\,\pi_m^*\Theta_{h_{L,\delta}} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_{m,\delta})^n = \Omega_{m,\delta} \cdot e^{u_{m,\delta}}, \tag{4}$$

は解 $u_{m,\delta} \in C^\infty(Y_m \backslash \pi_m^{-1}V)$ を持ち Y_m 上の正閉カレント

$$\omega_{m,\delta} := -\mathrm{Ric}\,\Omega_{m,\delta} + \sqrt{-1}\pi_m^*\Theta_{h_{L,\delta}} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_{m,\delta}$$

は

1. $-\mathrm{Ric}_{\omega_{m,\delta}} + \sqrt{-1}\,\pi_m^*\Theta_{h_{L,\delta}} = \omega_{m,\delta}$ が $Y_m - \mathrm{Supp}\, E_m$ で成り立つ。

2. $\omega_{m,\delta}$ の絶対連続部分は $2\pi(m!)^{-1}(P_m - E_m)$ を代表する。

3. $(\pi_m)_*\omega_{m,\delta}$ は $2\pi c_1(K_Y + L)$ を代表する。

4. 任意の $\epsilon > 0$ に対して、正定数 $C(m,\delta)$ 及び $C_\epsilon(m,\delta)$ が存在して

$$\epsilon \cdot \log \parallel \sigma \parallel - C_\epsilon(m,\delta) \leqq u_{m,\delta} \leqq C(m,\delta)$$

が成り立つ。ここで $\sigma \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(V))$ は因子 V を持つ大域切断で $\parallel \sigma \parallel$ は $\mathcal{O}_Y(V)$ のある滑らかなエルミート計量に関するエルミートノルムである。

4 番目の性質を $u_{m,\delta}$ の　準有界性という

$$-\mathrm{Ric}\,\Omega_{m,\delta}+\sqrt{-1}\,\pi_m^*\Theta_{h_{L,\delta}}=\sqrt{-1}\,\Theta_{h_{(m)}}$$

が成り立ち、これは δ に依らないことに注意する。

$$\omega_{(m)}:=\sqrt{-1}\Theta_{h_{(m)}},$$

とおくと方程式は次のように書き換えられる:

$$\log\frac{\omega_{m,\delta}^n}{\Omega_{m,\delta}}=\log\frac{(\omega_{(m)}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_{m,\delta})^n}{\Omega_{m,\delta}}=u_{m,\delta}. \tag{5}$$

$\{\omega_{m,\delta}^n\}$ を $Y-V$ 上の体積形式の列と考える。 $(\pi_m)_*\omega_{m,\delta}$ と $\omega_{m,\delta}$ を $Y-V$ 上で同一視することにする。 以後 $Y-V$ を Y_m のザリスキ 開部分集合と同一視し、全てを $Y-V$ 上で考える。最大値原理を使って、次の単調性補題を得る。

補題 2.5

$$\omega_{m,\delta}^n\leqq\omega_{m+1,\delta}^n$$

が $Y-V$ 上で成り立つ。 □

補題 2.5 の証明. 構成から次が分かる。

1. $\omega_{m,\delta}$ と $\omega_{m+1,\delta}$ の絶対連続部分はそれぞれ present $2\pi(m!)^{-1}(P_m-E_m)$ 及び $2\pi((m+1)!)^{-1}(P_{m+1}-E_{m+1})$ を代表する。

2. $\mu_{m+1}^*((m!)^{-1}(F_m+E_m))-((m+1)!)^{-1}(F_{m+1}+E_{m+1})$ i はエフェクティブで適当な正数 ε_m に対して $\varepsilon_m(\pi_{m+1}^{-1}V)$ を含む。

従って $\phi_{m,\delta}$ を

$$\phi_{m,\delta}:=\log\frac{\omega_{m,\delta}^n}{\omega_{m+1,\delta}^n}$$

で定義すると、V の近傍で $u_{m,\delta}$ の準有界性から $-\infty$ に近付く。　故に $p_m\in Y-V$ で $\phi_{m,\delta}$ が最大となる点がある。　このとき

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\,\phi_{m,\delta}(p_m)\leqq 0$$

が成り立つ。 方程式

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_{k,\delta}}+\sqrt{-1}\,\pi_k^*\Theta_{h_{L,\delta}}=\omega_{k,\delta}(k=m,m+1),$$

を使って

$$\omega_{m,\delta}(p_m)\leqq\omega_{m+1,\delta}(p_m)$$

が成り立つ。 これを用いて $\phi_{m,\delta}\leqq 0$ が $Y-V$ 上で成り立つ。故に $\omega_{m,\delta}^n\leqq\omega_{m+1,\delta}^n$ が $Y-V$ 上で成り立つ。 これで補題 2.5 の証明を終わる。 □

次に $Y-V$ 上でコンパクト一様な C^2-評価を行う。s を正整数とし

$$\omega_{(s)} = \sqrt{-1}\,\Theta_{h_{(s)}}.$$

とおく。$m>s$ に対して $Y-D$ 上の C^∞-関数 $v_{m,\delta}$ を

$$v_{m,\delta} := u_{m,\delta} + \log\frac{h_{(s)}}{h_{(m)}}.$$

で定義する。このとき

$$\omega_{m,\delta} = \omega_{(s)} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_{m,\delta}$$

及び

$$\log\frac{(\omega_{(s)} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_{m,\delta})^n}{\Omega_{s,\delta}} = v_{m,\delta}$$

が成り立つ。条件 $3'$ $((m+1)!)^{-1}(P_{m+1}-E_{m+1}) - \mu^*_{m+1}(m!)^{-1}(P_m - E_m))$ はエフェクティブで適当な正数 ε_m に対して $\varepsilon_m(\pi^{-1}_{m+1}V)_{red}$ を含むので正数 $\epsilon(s)$ $0<\epsilon<\epsilon(s)$ と $m>s$ に対して

$$\log\frac{h_{(s)}}{h_{(m)}} - \epsilon\cdot\log\parallel\sigma\parallel$$

が V の近傍で $-\infty$ に近付く。$u_{m,\delta}$ の準有界性 (cf, (6)) より全ての $\epsilon>0$ に対して

$$\epsilon\cdot\log\parallel\sigma\parallel + \log\frac{h_{(s)}}{h_{(m)}} - C_\epsilon(m,\delta) \leqq v_{m,\delta} \leqq C(m,\delta) + \log\frac{h_{(s)}}{h_{(m)}} \qquad (6)$$

が成り立つ。ここで $C(m,\delta), C_\epsilon(m,\delta)$ は上の正定数である。故に $v_{m,\delta}$ は V の近傍で $+\infty$ に近付く。

故に $p_0\in Y-V$ で $v_{m,\delta}$ は最小値をとる。よって

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\frac{(\omega_{(s)} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_{m,\delta})^n}{\Omega_{s,\delta}}(p_0) \geqq 0$$

が成り立つ。故に 方程式 : $-\mathrm{Ric}_{\omega_{m,\delta}} + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_{L,\delta}} = \omega_{m,\delta}$ により

$$\omega_{m,\delta}(p_0) - \omega_{(s)}(p_0) \geqq 0$$

が成り立つ。 これから

$$v_{m,\delta}(p_0) \geqq \log\frac{\omega^n_{(s)}}{\Omega_{s,\delta}}(p_0)$$

が成り立つ。 故に

$$v_{m,\delta}(y) \geqq \log\frac{\omega^n_{(s)}}{\Omega_{s,\delta}}(p_0)$$

全ての $y \in Y - V$ で成り立つ。故に

$$u_{m,\delta} \geqq \log \frac{h_{(m)}}{h_{(s)}} + \min_{y \in Y} \log \frac{\omega_{(s)}^n}{\Omega_{s,\delta}}(y) \tag{7}$$

Y 上で成り立つ。

一方 $u_{m,\delta}$ の上からの評価を次のようにして得る。V は正規交叉因子であった。Ω_P を $Y - V$ 上のポアンカレ増大の体積形式とする。

$$\tilde{u}_{m,\delta} := u_{m,\delta} + \log \frac{\Omega_{m,\delta}}{\Omega_P}. \tag{8}$$

とおく。 条件 $3'$ と $u_{m,\delta}$ の準有界性から $p'_0 \in Y - V$ で $\tilde{u}_{m,\delta}$ は最大値をとる。

$$\log \frac{\omega_{m,\delta}^n}{\Omega_P} = u_{m,\delta} + \log \frac{\Omega_{m,\delta}}{\Omega_P} = \tilde{u}_{m,\delta}$$

から p'_0 において

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega_{m,\delta}^n}{\Omega_P}(p'_0) \leqq 0$$

成り立つ. 故に

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_{m,\delta}} \leqq (-\mathrm{Ric}\,\Omega_P)(p'_0).$$

と方程式

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_{m,\delta}} + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_{L,\delta}} = \omega_{m,\delta},$$

から

$$\omega_{m,\delta}(p'_0) \leqq -\mathrm{Ric}\,\Omega_P + \sqrt{-1}\Theta_{h_{L,\delta}}$$

が成り立つ。 特に

$$\omega_{m,\delta}^n(p'_0) \leqq (-\mathrm{Ric}\,\Omega_P + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_{L,\delta}})^n(p'_0)$$

成り立つ。 これから

$$\tilde{u}_{m,\delta} = u_{m,\delta} + \log \frac{\Omega_{m,\delta}}{\Omega_P} \leqq \log \frac{(-\mathrm{Ric}\,\Omega_P + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_{L,\delta}})^n}{\Omega_P}(p'_0)$$

が成り立つ。$h_{L,\delta}$ の構成から題 2.4 と注意 2.3 δ に依らない正定数 C_+ で

$$\frac{(-\mathrm{Ric}\,\Omega_P + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_{L,\delta}})^n}{\Omega_P} \leqq C_+$$

$Y - V$ 上成り立つ。m と *delta* に依らない正定数 $\tilde{C}_+$ が存在して

$$e^{u_{m,\delta}}\Omega_{m,\delta} \leqq \tilde{C}_+ \cdot \Omega_P \tag{9}$$

Y 上で成り立つ。故に

$$u_{m,\delta} \leqq C_+ - \log \frac{\Omega_{m,\delta}}{\Omega_P} \tag{10}$$

Y 上で成り立つ。(7) と (10) によって δ に依らない正定数 $C_0'(m)$ が存在して

$$\int_Y |u_{m,\delta}|\omega_{(s)}^n < C_0'(m) \tag{11}$$

成り立つ. このとき

$$\omega_{(m)} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_{m,\delta}$$

は Y 上の正閉カレントで $\omega_{(m)}$ は Y_m の C^∞ ケーラー 形式、 $u_{m,\delta}$ は Y_m 上の概多重列調和関数である。多重劣調和関数の劣平均値不等式より (11) 正定数 $C_0(m)$ が存在して

$$u_{m,\delta} \leqq C_0(m) \tag{12}$$

Y_m 上で成り立つ。

(7) と (12) により次の補題を得る。

補題 2.6 δ に依らない正定数 $C_1(m)$ が存在して任意の $\delta > 0$ に対して

$$-C_1(m) \leqq v_{m,\delta} \leqq C_1(m) - \log\frac{h_{(m)}}{h_{(s)}}$$

が $Y - V$ 上成り立つ。□

さて評価 $\{v_{m,\delta}\}_{\delta>0}$ の $Y - V$ でのコンパクト一様な C^2 評価をしよう。次の補題を用意する。

補題 2.7 *([T0, p. 127, 補題 2.2]))*

$$f := \log\frac{\omega_{(s)}^n}{\Omega}.$$

とおく。C を正定数で Y 上で

$$C + \inf_{\alpha\neq\beta} R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} > 1$$

成り立つものとする。 ここで $R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}}$ は $\omega_{(s)}$ の正則双断面曲率を表す。

このとき

$$e^{Cv_{m,\delta}}\Delta_{m,\ell}(e^{-Cv_{m,\delta}}(n + \Delta_s\, v_{m,\delta})) \geqq (n + \Delta_s\, v_{m,\delta})$$
$$+\Delta_s(f + \log\frac{h_{(m)}}{h_{(s)}}) + (n + n^2 \inf_{\alpha\neq\beta} R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}})$$
$$+C\cdot n(n + \Delta_s\, v_{m,\delta}) + (n + \Delta_s\, v_{m,\delta})^{\frac{n}{n-1}}\exp(-\frac{1}{n-1}v_{m,\delta} + f)$$

が成り立つ。 ここで Δ_s は $\omega_{(s)}$ に関するラプラシアン (*i.e.*, $\Delta_s = \mathrm{trace}_{\omega_{(s)}}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$)、$\Delta_{m,\delta}$ は $\omega_{m,\delta}$ に関するラプラシアンである。□

y_0 を $e^{-Cv_{m,\delta}}(n+\Delta v_{m,\delta})$ が最大となる点とする。このような $y_0 \in Y-V$ が存在することは $v_{m,\delta}$ の C^0 評価と $u_{m,\delta}$ が満たすモンジュアンペール方程式が Y_m 上で代数特異性を持つことから Y_m 上の $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_{m,\delta}$ の有界性 ([Y1]) を満たすことから従う。補題 2.7 により m,δ に依らない正定数 C_2 が存在して

$$0 \leqq n + \Delta_s\, v_{m,\delta}(x_0) \leqq C_2$$

成り立つ。 これから

$$0 \leqq n + \Delta_s\, v_{m,\delta} \leqq \exp(C(v_{m,\delta} - v_{m,\delta}(x_0))) \cdot C_2$$

成り立つ. 補題 2.6 により m と δ に依らない正定数 C_3 が存在して

$$n + \Delta_s\, v_{m,\delta} \leqq C_3(\frac{h_{(m)}}{h_{(s)}})^{-C}$$

$Y-V$ 上で成り立つ。非線形方程式の一般論 ([Tr]) から $\{v_{m,\delta}\}_{\delta>0}$ の $Y-V$ 上でのコンパクト一様な評価を得る。故に適当な正数列 $\{\delta_j\}$ で $\delta_j \downarrow 0$ となるもので j を $+\infty$ に近づけるとき

$$\omega_m := \lim_{j\to\infty} \omega_{m,\delta_j}$$

が $Y-V$ 上で C^∞-位相に関してコンパクト一様収束するものが存在する。. 対角線論法から $\{\delta_j\}$ は m に依らないとしてよい。このとき

$$\omega_m := \omega_{(s)} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_m$$

は方程式：

$$\log\frac{\omega_m^n}{\Omega_s} = v_m, \tag{13}$$

を満たす。 ここで

$$\Omega_s := h_{(s)}^{-1}\cdot h_L$$

で、これから

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_m} + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L} = \omega_m \tag{14}$$

が成り立つ.

h_{min} を $K_Y + L$ の極小特異性を持つ AZD とする (cf. 節 1.4) (cf. 定義 1.5)。

$$\Omega_{min} := h_{min}^{-1}\cdot h_L.$$

とおく。 このとき $\{v_m\}$ の一様な C^0-評価が成り立つ。

補題 2.8 正定数 C が存在して $m > s$ に対して

$$v_m \leqq C + \log\frac{\Omega_{min}}{\Omega_s}$$

Y 上で成り立つ。 □

補題 2.8 の証明.

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_m} + \sqrt{-1}\Theta_{h_L} = \omega_m$$

成り立ので

$$\omega_m^n = O(\Omega_{min})$$

定義 1.5 が成り立つ。故に上からの一様評価 (9) と単調性補題 2.5 より正定数 C が存在して

$$v_m \leqq C + \log \frac{\Omega_{min}}{\Omega_s}$$

が全ての $m > s$ に対して成り立つ。□

上からの一様評価 (9) と補題 2.5, から各点での極限:

$$dV_Y := \frac{1}{n!} \lim_{m\to\infty} \omega_m^n$$

が Y 上で成り立つ。

$$v := \log \frac{n! \cdot dV_Y}{\Omega_s}$$

とおく。補題 2.7 と補題 2.8 から

$$\omega_Y = \omega_{(s)} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} v$$

は

$$\omega_Y^n = e^v \cdot \Omega_s$$

を満たす。補題 2.7, 補題 2.5 と補題 2.8 により適当な部分列 $\{m_k\}$ をとれば

$$v = \lim_{k\to\infty} v_{m_k}$$

が C^∞-位相で $Y - V$ 上コンパクト一様に成り立つ。上の構成から (cf. (14))

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_Y} + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L} = \omega_Y \tag{15}$$

$Y - V$ 上で成り立つ。

$K_Y + L$ の特異エルミート計量を

$$h_K := (dV_Y)^{-1} \cdot h_L = n! \cdot (e^v \cdot \Omega_s)^{-1} \cdot h_L$$

で定義する。h_K が $K_Y + L$ の AZD であることをチェックしよう。まず $\sqrt{-1}\,\Theta_{h_K}$ が半正閉カレントであることは (15) から明らかであり C^0-評価; 補題 2.8. E_m の全ての係数が 1 未満であった。従って u_m の満たすモンジュ-アンペール方程式とその準有界性から $m!\cdot\pi_m^*(K_Y+L)$ の大域切断は Y_m 上で $(\omega_m^n)^{-(m!-1)}\cdot h_L^{m!}$ に関して L^2 可積である。$\{\omega_{m,\delta}^n\}$ の単調性 (補題 2.5) から $h_K = (dV_Y)^{-1}\cdot h_L$ は $K_Y + L$ の AZD である。 これで定理 1.7 の証明を終わる。□

3 定理 1.9 の証明

$f : X \longrightarrow Y$ を飯高ファイブレーション, (L, h_L) を定理 1.7 の特異エルミート $\mathbb{Q}$-直線束 (ホッジ直線束) とする。ω_Y を Y 上の標準ケーラーカレントとする。空でない Y のザリスキ 開部分集合 U が存在して ω_Y は U 上で C^∞ で

$$-\mathrm{Ric}_{\omega_Y} + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_L} = \omega_Y$$

を満たす (定理 1.7)。

m_0 を十分大きな正整数、M をエフェクティブ カルティエ 因子で節 1.7 の意味で $A := m_0!(K_Y + L) - M$ は十分アンプルとする。h_A を A の C^∞-エルミート計量とする。今後 h_A を $m_0!(K_Y + L)$ の特異エルミート 計量

$$h_A / |\tau_M|^2,$$

を考えることで同一視する。 ここで τ_M は因子 M をもつ $\mathcal{O}_Y(M)$ の大域正則切断である。$\{K_m\}_{m \geqq m_0!}$ を節 1.7 のベルグマン核の力学系とし、$\{h_m\}_{m \geqq m_0!}$ を対応する特異エルミート 計量の力学系とする。

$$h_m := K_m^{-1}$$

であった。

さて定理 1.9 を証明しよう。

$dV_Y = (n!)^{-1} \omega_Y^n$ を (Y, ω_Y) に付随する体積形式とする。

補題 3.1

$$\limsup_{m \to \infty} h_L \cdot \sqrt[m]{(m!)^{-n} K_m} \geqq (2\pi)^{-n} dV_Y$$

X 上で成り立つ。 □

補題 3.1 の証明. まず L が真の直線束の場合を示す。 一般の場合は、a 回毎に (aL, h_L^a) をはさむだけなので、本質的に証明は変わらないから一般の場合は省略する。

特異エルミート 直線束 $(K_Y + L, dV_Y^{-1} \cdot h_L)$ を考える。U を $\omega_Y | U$ が C^∞ ケーラー形式となるような空でない Y のザリスキ開集合とする。$p \in U$ を任意にとる。 方程式 (1) から p を中心とする (Y, ω_Y) の正則正規座標 $(U, z_1, \cdots, z_n)$ と L の U 上の正則枠 $\mathbf{e}_L$ が存在して

$$dV_Y^{-1} \cdot h_L = \{\prod_{i=1}^{n} (1 - |z_i|^2) + O(\|z\|^3)\} \cdot |dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n|^{-2} \cdot |\mathbf{e}_L|^{-2} \quad (16)$$

が成り立つ。今 Y 上で不等式

$$C_{m-1} \cdot h_A^{-1} \cdot dV_Y^{m - m_0! - 1} \cdot h_L^{-(m - m_0! - 1)} \leqq K_{m-1}$$

が適当な正定数 C_{m-1} について成り立っていると仮定しよう。ベルグマン核の極値的性質から

$$K_m(y) = \sup\{|\sigma|^2(y); \sigma \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y+L))), (\sqrt{-1})^{n^2}\int_X h_{m-1}\cdot\sigma\wedge\bar{\sigma} = 1\} \tag{17}$$

が任意の $yinY$ について成り立つ (例えば [Kr, p.46, Proposition 1.3.16] を見よ). 単位円板で $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$,

$$\sqrt{-1}\int_\Delta (1-|t|^2)^m dt \wedge d\bar{t} = \frac{2\pi}{m+1} \tag{18}$$

が成り立つことに注意しよう。このとき ヘルマンダーの L^2-評価から適当な正定数 λ_m に対して

$$(\lambda_m \cdot (2\pi)^{-n} \cdot m^n) \cdot C_{m-1} \cdot dV_Y^{m-m_0!} \leqq h_L^{m-m_0!} \cdot h_A \cdot K_m \tag{19}$$

で

$$\lambda_m \geqq 1 - \frac{C}{\sqrt{m}},$$

となるものが存在する。 ここで C は m に依らない正定数である。

実際これは次のように確かめられる。$y \in Y - \operatorname{Supp} M - V$ とし $(U, z_1, \cdots, z_n)$ を上のような正規座標とする。 U は適当な正数 r に対して $\mathbb{C}^n$ の原点中心半径 r の多重円板 $\Delta^n(r)$ と $(z_1, \cdots, z_n)$ により双正則同値としてよい
r を十分小さく取って Y 上の C^∞-関数 ρ で

1. ρ は $\Delta^n(r/3)$ 上恒等的に 1、
2. $0 \leqq \rho \leqq 1$、
3. $\operatorname{Supp}\rho \subset\subset U$.
4. $|d\rho| < 3/r$ ここで $|\ |$ は ω_Y に関する各点ノルム。

方程式 (16) により $\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m \otimes \mathbf{e}_L^m$ のマスは m を大きくすると原点に集中する。従って (18) により $\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m \otimes \mathbf{e}_L^m$ の $(dV_Y)^{-m}\cdot h_L^m$ と ω_Y に関する L^2-ノルム

$$\|\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m \otimes \mathbf{e}_L^m\|$$

は漸近的に

$$\|\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m \otimes \mathbf{e}_L^m\|^2 \sim (\frac{2\pi}{m})^n \tag{20}$$

となる。ここで $\sim$ 両辺の比が $m \to \infty$ とするとき 1 に収束することを表す。

$$\phi := n\rho\log\sum_{i=1}^n |z_i|^2 .$$

とおくと m を十分大きく取って

$$(m - m_0! - 1)\cdot\omega_Y + \sqrt{-1}\,\Theta_{h_A} + \sqrt{-1}\Theta_{h_L} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi > 0$$

成り立つとすると、(20) から $\bar{\partial}(\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes \mathbf{e}_L^m)$ の $e^{-\phi}\cdot h_A\cdot(dV_Y)^{-(m-m_0!-1)}\otimes h_L^{(m-m_0!)}$ と ω_Y に関する L^2-ノルム

$$\|\,\bar{\partial}(\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m)\,\|_\phi$$

は不等式

$$\|\,\bar{\partial}(\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m)\,\|_\phi^2 \leqq C_0\cdot(\frac{3}{r})^{2n+2}(\frac{2\pi}{m})^n \tag{21}$$

を満たす。 ここで C_0 は m に依らない正定数である。

ヘルマンダーの L^2-評価 をエルミート直線束:

$$((m-1)(K_Y+L)+L, e^{-\phi}\cdot h_A\cdot dV_Y^{-(m-m_0!-1)}\cdot h_L^{m-m_0!}),$$

の随伴束に適用して十分大きな m に対して方程式;

$$\bar{\partial}u = \bar{\partial}(\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m)$$

の解 u で

$$u(y) = 0$$

かつ

$$\|\,u\,\|_\phi^2 \leqq \frac{2}{m}\,\|\,\bar{\partial}(\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m)\,\|_\phi^2$$

が成り立つものが存在する。 ここで $\|\ \|_\phi$ は $e^{-\phi}\cdot h_A\cdot dV_Y^{-(m-m_0!-1)}\otimes h_L^{m-m_0!}$ と ω_Y に関する L^2 ノルムを表す。すると $\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m - u$ は $m(K_Y+L)$ の正則切断で

$$(\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m - u)(y) = (dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m$$

かつ

$$\|\,\rho\cdot(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)^m\otimes\mathbf{e}_L^m - u\,\|^2 \leqq (1 + C_0\cdot(\frac{3}{r})^{2n+2}\sqrt{\frac{2}{m}})(\frac{2\pi}{m})^n.$$

となる。故に m に関する帰納法を用いて (17) と (19) から正定数 C と C' が存在して $m > m_0!$ に対して

$$K_m \geqq C'(\prod_{k=m_0}^{m}(1-\frac{C}{\sqrt{k}}))\cdot(m!)^n\cdot(2\pi)^{-mn}\cdot h_A^{-1}\cdot h_L^{-(m-m_0!)}\cdot dV_Y^{m-m_0!} \tag{22}$$

Y 上で成り立つことが分かる。これから

$$\limsup_{m\to\infty}\ h_L\cdot\sqrt[m]{(m!)^{-n}K_m} \geqq (2\pi)^{-n}dV_Y$$

が Y 上で成り立つ。□

次に上からの評価を行おう。

補題 3.2

$$\int_Y h_L \cdot \sqrt[m]{K_m} \leqq \left(\prod_{k=m_0}^{m}(N_k+1)\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_Y h_L \cdot \sqrt[m_0]{K_{m_0}}\right)^{\frac{m_0}{m}}$$

成り立つ。ここで $N_k := \dim \mid k(K_Y+L) \mid = \dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k(K_Y+L))) - 1$ である。□

証明. ヘルダーの不等式から

$$\begin{aligned}
\int_Y h_L \cdot \sqrt[m]{K_m} &= \int_Y h_L \cdot \frac{K_m^{\frac{1}{m}}}{h_L \cdot K_{m-1}^{\frac{1}{m-1}}} \cdot h_L \cdot K_{m-1}^{\frac{1}{m-1}} \\
&\leqq \left(\int_Y h_L^m \cdot \frac{K_m}{h_L^m \cdot K_{m-1}^{\frac{m}{m-1}}} \cdot (h_L \cdot K_{m-1}^{\frac{1}{m-1}})\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_Y h_L \cdot K_{m-1}^{\frac{1}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}} \\
&= \left(\int_Y h_L \cdot \frac{K_m}{K_{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_Y h_L \cdot K_{m-1}^{\frac{1}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}} \\
&= (N_m+1)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_Y h_L \cdot K_{m-1}^{\frac{1}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}
\end{aligned}$$

となる。これを帰納的に続けて

$$\int_Y h_L \cdot K_{m-1}^{\frac{1}{m-1}} \leqq (N_{m-1}+1)^{\frac{1}{m-1}} \cdot \left(\int_Y h_L \cdot K_{m-2}^{\frac{1}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m-1}},$$

を使うと

$$\int_Y h_L \cdot (K_m)^{\frac{1}{m}} \leqq \{(N_m+1)\cdot(N_{m-1}+1)\}^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_Y h_L \cdot (K_{m-2})^{\frac{1}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}}$$

が成り立つ。これを続けると補題が得られる。□

$\{N_m\}_{m \geq m_0!}$ の増大度を評価するために次の概念を用いる。

定義 3.3 L を n 次元コンパクト複素多様体 M 上の直線束とする M の L に関する体積 $\mu(M,L)$ を

$$\mu(M,L) := n! \cdot \limsup_{m\to\infty} m^{-n} \dim H^0(M, \mathcal{O}_M(mL)).$$

で定義する。□

定義 3.3 は $\mathbb{Q}$-直線束に関しても明らかに定義できる。補題 3.2 を用いて次の補題を得る。

補題 3.4

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{(m!)^{\frac{n}{m}}} \int_Y h_L \cdot (K_m)^{\frac{1}{m}} \leqq \frac{\mu(Y, K_Y+L)}{n!}$$

が成り立つ。□

証明. $\mu(Y, K_Y + L)$ の定義から

$$N_m + 1 = \frac{\mu(Y, K_Y + L)}{n!} m^n + o(m^n)$$

成り立つ。補題 3.2 により

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{(m!)^{\frac{n}{m}}} \int_Y h_L \cdot (K_m)^{\frac{1}{m}} \leqq \frac{\mu(Y, K_Y + L)}{n!}$$

が成り立つ. □

(22) から

$$h_m = O(h_A \cdot h_K^{m-m_0!})$$

成り立つ。 故に

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y+L)) \otimes \mathcal{I}(h_m)) \supseteq H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y+L)) \otimes \mathcal{I}(h_A \cdot h_K^{m-m_0!}))$$

が全ての $m \geqq m_0!$ について成り立つ。 h_K は $K_Y + L$ の AZD であるから

$$n! \cdot \limsup_{m\to\infty} m^{-n} \cdot \dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y + L)) \otimes \mathcal{I}(h_m)) \geqq \mu(Y, K_Y + L)$$

が成り立つ。

補題 3.5

$$\int_Y dV_Y = \frac{1}{n!} \int_Y \omega_Y^n = \mu(Y, K_Y + L)$$

が成り立つ. □

補題 *3.5* **の証明.** $|P_m|$ を $|\pi_m^* m!(K_Y + L)|$ の自由部分とする。, ここで π_m は $\mathrm{Bs}|m!(K_Y + L)|$ の解消である。藤田の定理 ([F, p.1,Theorem]) から

$$\lim_{m\to\infty} (m!)^{-n} P_m^n = \mu(Y, K_Y + L)$$

が成り立つ。補題 2.5 から

$$\mu(Y, K_Y + L) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n!} \int_Y \omega_m^n = \frac{1}{n!} \int_Y \omega_Y^n$$

となる。□

$$\int_Y dV_Y = \frac{1}{n!} \int_Y \omega_Y^n = \mu(Y, K_Y + L)$$

が方程式 (1) と単調性：補題 2.5 から成り立つので補題 3.1 と補題 3.2 より:

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{(m!)^{\frac{n}{m}}} h_L \cdot \sqrt[m]{K_m} = (2\pi)^{-n} dV_Y,$$

となる。

これで定理 1.9 の証明を終わる。 □

標準測度の一意性については次が成り立つ。

系 3.6 $d\mu_{can}$ は双有理不変である。 □

系 *3.6* の証明. $f : X \longrightarrow Y$ を上のような飯高ファイブレーションとして可換図式:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \tilde{Y} \arrow[r, "\varpi"'] & Y \end{tikzcd}$$

を考える。ここで $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X, \varpi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ は双有理改変である。 $\tilde{Y}$ と Y 上のアンプル直線束 $\tilde{A}$ と A をとる。

このとき ϖ^*A は $\tilde{Y}$ ネフかつビッグである。故に 小平の補題から正整数 a_1, a_2 で

$$a_1\tilde{A} - \varpi^*A, a_2\varpi^*A - \tilde{A}$$

が $\mathbb{Q}$-エフェクティブとなるものが存在する。$d\mu_{\tilde{X},can}, d\mu_{X,can}$ を $\tilde{X}$,X それぞれの標準測度とする。 $a_1\tilde{A} - \varpi^*A$ は $\mathbb{Q}$-エフェクティブなので定理 1.9 とその証明から

$$d\mu_{\tilde{X},can} \geqq \pi^* d\mu_{X,can}$$

が成り立つ。実際これは以下のように確かめられる。A と $\tilde{A}$ の C^∞ エルミート 計量 h_A と $h_{\tilde{A}}$ を固定する。 b を十分 大きな正整数とし

$$\tau \in H^0(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(b(a_1\tilde{A} - \varpi^*A)))$$

を恒等的には 0 でない切断で

$$(h_{\tilde{A}}^{a_1} \cdot \varpi^* h_A^{-1})^b(\tau, \tau) \leqq 1.$$

となるものとする $\{\tilde{K}_m\}_{m\geq 0}, \{K_m\}_{m\geq 0}$ をそれぞれ $\tilde{Y}$ と Y 上の定理 1.9 のベルグマン核の力学系で $(ba_1\tilde{A}, h_{\tilde{A}}^{ba_1})$ と (bA, h_A^b) から出発するものとする。このときベルグマン核の極値性から

$$\tilde{K}_m \geqq |\tau|^2 \cdot \varpi^* K_m$$

が成り立つ。故に定理 1.9 から

$$d\mu_{\tilde{X},can} \geqq \pi^* d\mu_{X,can}$$

が成り立つ.

同様に $a_2\varpi^*A - \tilde{A}$ is $\mathbb{Q}$ -エフェクティブであるから逆の不等式：

$$d\mu_{\tilde{X},can} \leqq \pi^* d\mu_{X,can}$$

を得る。故に

$$d\mu_{\tilde{X},can} = \pi^* d\mu_{X,can}$$

が成り立つ. これで系 3.6 の証明を得る。 □

4 定理 1.7 と定理 1.9 の相対版

この節では標準測度の 射影的族上の変動を考察する。

定理 4.1 $f : X \longrightarrow S$ を射影的族で X, S は滑らかで f は連結なファイバーをものとする。$f_*\mathcal{O}_S(mK_{X/S}) \neq 0$ がある $m > 0$ について成り立つとする。このとき相対標準束 $K_{X/Y}$ の特異エルミート計量 h_K で次を満たすものが存在する。

1. $\omega_{X/S} := \sqrt{-1}\,\Theta_{h_K}$ は X の上で半正。

2. 一般ファイバー $X_s := f^{-1}(s)$ 上で $h_K|X_s$ は K_{X_s} の AZD で $\omega_{X/S}|X_s$ は 定理 *1.7* と定理 *1.9* で構成された X_s 上の標準半正カレントである。

□

定理 *4.1* **の証明**. 主張は局所的なので S は $\mathbb{C}^n$ の単位多重円板としてよい。m_0 を十分大きな正整数とし

$$F_{m_0} := f_*\mathcal{O}_X(m_0!K_{X/S})$$

とおく (必要なら S を少し縮めて)$\sigma_0, \cdots, \sigma_{N(m)}$ を大域 F_{m_0} の S の生成系とする。Y を有理写像

$$\Phi_{m_0} : X - \cdots \rightarrow \mathbb{P}_S^{N(m_0)}.$$

の像とする m_0 を十分大きくとり X の双有理改変 $\hat{X}Y$ の双有理改変 $\hat{Y}$ をとって相対飯高ファイブレーション

$$\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$$

で $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ は滑らかかつ $\hat{f}_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(m!K_{\hat{X}/\hat{Y}})^{**}$ は $\hat{Y}$ 上の直線束としてよい。$\hat{Y}$ 上の $\mathbb{Q}$-直線束 L を

$$L = \frac{1}{m_0!}\hat{f}_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(m_0!K_{\hat{X}/\hat{Y}})^{**}$$

で定義する。　a を $\hat{f}_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(aK_{\hat{X}/\hat{Y}}) \neq 0$ となる最小の正整数とする。以下 $f : X \longrightarrow S$ を $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow S$ で置き換え X と Y を $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ で置き換えよう。標準測度は双有理不変なので、証明には影響は与えない。

S° を S に於ける $\hat{f}$ のディスクリミナントローカスの補集合とする。A を Y 上の十分アンプルな直線束とし h_A をその C^∞ 計量で曲率が真に正のものとする。節 3 と同じように $s \in S^\circ$ に対して力学系 of ベルグマン 核の力学系 $\{K_{m,s}\}_{m \geq m_0!}$ をとる。即ち

$$K_{1,s} := \begin{cases} K(Y_s, K_{Y_s} + A|Y_s, h_A|Y_s), & \text{の場合 } a > 1 \\ K(Y, K_{Y_s} + L + (K_{Y_s} + L|Y_s), h_L \cdot h_A|Y_s), & \text{の場合 } a = 1 \end{cases}$$

$h_{1,s} = K_{1,s}^{-1}$ とおきベルグマン核の力学系 $\{K_{m,s}\}$ を帰納的にファイバー毎に節 3 と同様に定義する。

より正確には $K_{m,s}$ and $h_{m,s}$ が既に定義されたとして $K_{m+1,s}$ and $h_{m+1,s}$ を

$$K_{m+1,s} := \begin{cases} K(Y_s, (m+1)K_{Y_s} + \lfloor \frac{m+1}{a} \rfloor aL|Y_s, h_{m,s}) & m+1 \not\equiv 0 \bmod a \text{ の場合} \\ K(Y_s, (m+1)(K_{Y_s} + L|Y_s), (h_L|Y_s)^a \otimes h_{m,s}) & m+1 \equiv 0 \bmod a \text{ の場合} \end{cases}$$

および

$$h_{m+1,s} := (K_{m+1,s})^{-1}$$

で定義する。K_m を

$$K_m|Y_s = K_{m,s} (\forall s \in S^\circ)$$

で定義し

$$K_m^* = K_m \text{ の上半連続包}$$

とおく。L のホッジ計量 h_L を節 3 のように定義すると Y 上で半正曲率カレントを持つ ([Ka2])。半正曲率をもつ特異エルミート直線束の相対随伴直線束のベルグマン核の対数多重劣調和性 ([B3],[T4, Theorem 3.4],[B-P]) から m に関する帰納法により

$$h_m = (K_m^*)^{-1}$$

は

$$mK_{Y/S} + (\lfloor \frac{m}{a} L \rfloor \cdot a)L$$

上の半正曲率をもつ特異エルミート計量に拡張する。つまり $\log K_m^*$ Y 上多重劣調和である。

定理 1.9 より

$$K_\infty := \limsup \sqrt[m]{(m!)^{-n} K_m^*} \text{ の上半連続包}$$

は 0 でない L 値相対体積形式で

$$h_\infty := K_\infty^{-1}$$

は $K_{Y/S}+L$ 上の特異エルミート計量で半正曲率カレントを持つ。

$$h_{X/S} := f^* h_\infty.$$

とおくと $h_{X/S}$ は $K_{X/S}$ 上の特異エルミート計量で半正曲率カレント.

$$\omega_{X/S} := \sqrt{-1}\Theta_h$$

を持つ。定理 1.9 と 標準半正カレントの双有理不変性 (系 3.6) より定理 4.1 を得る。 □

5 超標準測度

標準測度 $d\mu_{can}$ (cf. 定義 1.8) はベルグマン核の力学系と飯高 ファイブレーション (cf. 定理 1.9). しかし $d\mu_{can}$ は以下の点で不十分である。 :

1. 力学系は本質的には X 上で定義されている訳でなく、飯高 ファイブレーションの底空間で定義される。
2. $(d\mu_{can})^{-1}$ はアバンダンス予想を仮定しないと、一般には極小特異性を持つかどうか分からない (cf. 定義 1.5)。
3. $d\mu_{can}$ は多重標準形を使って定義されているためアバンダンス予想を解くのに使えない。 アバンダンス予想はこういった計量を構成する主な動機付けである。

この節ではベルグマン核の力学系を用いてもう少し自然な標準測度を構成する。

5.1 数値的小平次元と漸近的小平次元

ここでは滑らかな射影代数多様体上の擬有効特異エルミート束に対して数値的小平次元と漸近的小平次元を定義する。

定義 5.1 (L, h_L) を射影代数多様体上 X の擬有効特異エルミート束とする。このとき

$$\nu_{num}(L, h_L) := \sup\{\dim V \mid V \text{ は } X \text{ の部分多様体で制限 } h_L|_V \text{ が定義され}$$
$$(L, h_L)^{\dim V} \cdot V > 0\}.$$

ここで

$$(L, h_L)^{\dim V} \cdot V := (\dim V)! \cdot \limsup_{m\to\infty} m^{-\dim V} \dim H^0(\tilde{V}, \mathcal{O}_{\tilde{V}}(m\pi^* L) \otimes \mathcal{I}(\pi^* h_L^m)),$$

ここで $\pi : \tilde{V} \dashrightarrow V$ は特異点解消である。$(L, h_L)^{\dim V} \cdot V$ が特異点解消に依らないことは直ぐ分かる。

$\nu_{num}(L, h_L)$ を (L, h_L) の**数値的小平次元**と呼ぶ。□

次の不変量はより解析的である。

定義 5.2 擬有効特異エルミート直線束 (L, h_L) の**漸近的小平次元** $\nu(L, h_L)$ を

$$\nu_{asym}(L, h_L) = \sup_A \limsup_{m \to \infty} \frac{\log h^0(X, \mathcal{O}_X(A + mL) \otimes \mathcal{I}(h_L^m))}{\log m},$$

で定義する。ここで A は X の全てのアンプル直線束を動く。□

5.2 ν_{num} と ν_{asym} の関係

ν_{num} と ν_{asym} は一般に異なるが、緩やかな条件下で $\nu_{num} = \nu_{asym}$ が成り立つ。

定義 5.3 (L, h_L) を滑らかな射影代数多様体 X 上の擬有効特異エルミート直線束とする。(L, h_L) が**正規**とは

$$E := \{x \in X \mid n(\Theta_{h_L}, x) > 0\}$$

X の真解析的部分集合に含まれることである。 ここで $n(\Theta_{h_L}, x)$ は正閉カレント Θ_{h_L} の x でのルロン数である。

定理 5.4 *([T7, Theorem 3.13])* X を滑らかな射影代数多様体 (L, h_L) をその上の擬有効特異エルミート束とする。このとき

$$\nu_{num}(L, h_L) \leqq \nu_{asym}(L, h_L)$$

成り立つ. さらに h_L が正規なら *(cf.* 定義 *5.3)*, 任意のアンプル直線束 A に対して

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(A + mL) \otimes \mathcal{I}(h_L^m)) = O(m^{\nu_{num}(L, h_L)}).$$

が成り立つ。特に

$$\nu_{num}(L, h_L) = \nu_{asym}(L, h_L)$$

成り立つ. □

5.3 超標準測度

X を滑らかな射影代数多様体で 擬有効標準束を持つものとする。A を X 上の十分アンプルな直線束でその上の C^∞ エルミート計量 h_A を固定する。h_{min} を K_X の極小特異性を持つ AZD とする (cf. 定義 1.5,[D-P-S])。$|mK_X| \neq \emptyset$ がある正整数 m について成り立てば h_{min} は正規である (cf. 定義 5.3)。

(A, h_A) をスタートしてベルグマン核の力学系を考える。

$$K_1 := K(X, K_X + A, h_A)$$

とおき

$$h_1 = K_1^{-1}.$$

と定義する。 K_m と h_m が定義されたとして

$$K_{m+1} := K(X, (m+1)K_X + A, h_m; h_{min}^m \cdot h_A)$$

及び

$$h_{m+1} := K_{m+1}^{-1},$$

と定義する。ここで $K(X, (m+1)K_X + A, h_m; h_{min}^m \cdot h_A)$ は

$$H^0(X, \mathcal{O}_X((m+1)K_X + A) \otimes \mathcal{I}(h_{min}^m))$$

の内積：

$$(\sigma, \sigma') := \int_X \sigma \cdot \bar{\sigma}' \cdot h_m.$$

に関するベルグマン核（の対角成分）である。K_X に正規 AZD が存在するとしよう。故に h_{min} も正規である。定理 5.4 から

$$\nu := \nu_{num}(K_X, h_{min}) = \limsup_{m\to\infty} \frac{\log h^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X + A) \otimes \mathcal{I}(h_{min}^m))}{\log m}$$

および

$$d\hat{\mu}_{can,A} := \limsup_{m\to\infty} (m!)^{-\frac{\nu}{m}} \sqrt[m]{K_m} \text{ の上半連続包}$$

と定義する。この時点では $d\mu_{can,A}$ が h_A に依らないのかははっきりしない。まず $d\hat{\mu}_{can,A}$ が h_A に依らないことを見ておこう。h'_A をもう一つの C^∞ エルミート 計量とし $c > 1$ を正定数で

$$c^{-1} \cdot h_A \leqq h'_A \leqq c \cdot h_A$$

が X 上で成り立つようにとる。 A $\{K'_m\}$ を計量 h'_A から出発するベルグマン核の力学系とする。このとき t

$$c^{-1} \cdot K'_m \leqq K_m \leqq c \cdot K'_m$$

成り立つことが m に関する帰納法から分かる。

$d\hat{\mu}_{can,A}$ は C^∞ エルミート計量 h_A には依らない。

$$\mu_\nu((K_X, h_{min}); A) := \nu!\cdot\limsup_{m\to\infty} m^{-\nu}\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X+A)\otimes\mathcal{I}(h_{min}^{m-1})).$$

とおくと $\mu_\nu((K_X, h_{min}); A)$ は h_{min} の正規性と定理 5.4 から定義されている。A に依らない測度を：

$$d\hat{\mu}_{can} := \sup_A \left\{\mu_\nu((K_X, h_{min}); A)^{-1}\cdot d\hat{\mu}_{can,A}\right\} \text{ の上半連続包}$$

で定義する。ここで A は X 上の全てのアンプル直線束を動く。このとき次が成り立つ。

定理 5.5 *(cf. [T7, Theorem 6.2])* X を滑らかな射影代数多様体で擬有効標準直線束を持つものとする。K_X が正規 AZD をもつとする *(cf. 定義 5.3)*。
このとき $d\hat{\mu}_{can}$ は 0 でない X 上の測度で 、$d\hat{\mu}_{can}^{-1}$ は K_X の AZD である。特に $\mathrm{Kod}(X) \geqq 0$, *then* $d\hat{\mu}_{can}$ は 0 でない X 上の測度で $d\hat{\mu}_{can}^{-1}$ は K_X の AZD である。□

証明はここでは省略する。 [T8] を見よ。

6 標準測度の KLT 対への拡張

標準測度や超標準測度を KLT 対（川又末端対）(X, Δ) で非負小平次元をもつもの、即ち $|m!(K_X+\Delta)| \neq \emptyset$ が十分大きな m について成り立つものに対して拡張するのは容易である。

$f: X - \cdots \to Y$ を対数標準因子 $K_X + \Delta$ に付随する飯高ファイブレーションとする。X と Y に双有理改変操作を行って:

1. X,Y は滑らかで f は連結なファイバーを持つ射。

2. $\mathrm{Supp}\,\Delta$ は正規交叉因子。

3. Y のフェクティブ 因子 Σ で f は $Y-\Sigma$ 上で極大階数かつ $\mathrm{Supp}\,\Delta^h$ は相対正規交叉、 $f(\Delta^v) \subset \Sigma$ がなりたつものがある。 ここで Δ^h, Δ^v は、それぞれ Δ の f に関する水平成分と垂直成分を表す。

4. 正整数 m_0 で $f_*\mathcal{O}_X(m!(K_X+\Delta))^{**}$ はは Y 上の直線束である。

エフェクティブ例外 $\mathbb{Q}$-因子を足しても対数標準環は変わらないことに注意する。Y 上の $\mathbb{Q}$-直線束 L を

$$L = \frac{1}{m_0!}f_*\mathcal{O}_X(m_0!(K_X+\Delta))^{**}.$$

で定義すると L は m_0 のとり方に依らない。前と同様に L 上の特異エルミート計量を

$$h_L^{m!}(\sigma,\sigma)(y) := (\int_{X_y} |\sigma|^{\frac{2}{m!}})^{m!},$$

で定義する。ここで $y \in Y - \Sigma$、$X_y := f^{-1}(y)$ である。(X,Δ) は KLT なので, h_L は定義される定理 1.7 の証明と同様にして次を得る。

定理 6.1 *(cf.* 定理 *1.7)* $K_Y + L$ の一意的特異エルミート計量 h_K とザリスキ 開部分集合 U が存在して次を満たす。

1. h_K は $K_Y + L$ の *AZD*。

2. f^*h_K は $K_X + \Delta$ の *AZD*。

3. h_K は U 上実解析的。

4. $\omega_Y = \sqrt{-1}\,\Theta_{h_K}$ は U 上のケーラー形式。

5. $-\mathrm{Ric}_{\omega_Y} + \sqrt{-1}\,\Theta_L = \omega_Y$ が U 上で成り立つ。□

定理 6.1 の ω_Y はベルグマン核の力学系で構成することができ、これから定理 4.1 と同様の半正値性定理を得る。

(X,Δ) 上の標準測度 $d\mu_{can}$ を

$$d\mu_{can} := \frac{1}{n!} f^*\omega_Y^n \cdot h_L^{-1},$$

ここで $n = \dim Y$.

同様に擬有効対数標準因子 $K_X + \Delta$ を持つ KLT 対 (X,Δ) に対して、超標準測度 $d\hat{\mu}_{can}$ がベルグマン核の力学系を使って構成される。

7 標準測度の応用

予想 7.1 $f : X \longrightarrow Y$ を代数的ファイバー空間, *i.e.,* X, Y は滑らかな射影代数多様体で f は射影的射で連結なファイバーを持つものとする。.

このとき十分大きな m に対して $f_*\mathcal{O}_X(mK_{X/Y})$ は f の平滑部分（ディスクリミナント部分集合の補集合）で大域的切断で生成される。□

これについて次の部分解が得られる。

定理 7.2 $f : X \longrightarrow Y$ を代数的ファイバー空間とすると Y の空でないザリスキ 開部分集合 U が存在して、U 上で $f_*\mathcal{O}_X(mK_{X/Y})$ は大域切断で生成される。□

この定理と飯高予想の関係は明らかであろう。　証明は現在準備中の論文に書く予定である。

8　標準 AZD,　超標準 AZD

X を滑らかな射影代数多様体で K_X が擬有効とする。　このとき K_X の標準的な AZD を構成したい。上の $d\hat{\mu}_{can}^{-1}$ もそのような AZD の例である。ここでは Narashimhan-Seshadri 計量から構成する方法を与えよう ([T6])。

8.1　標準 AZD h_{can}

X の小平次元が半正のとき K_X の標準 AZD が [T5] で構成されている。

定理 8.1 *([T5])* X を滑らかな 射影代数多様体で半正小平次元を持つとする。$x \in X$

$$K_m(x) := \sup\left\{ \mid \sigma \mid^{\frac{2}{m}} (x); \sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(mK_X)), \left| \int_X (\sigma \wedge \bar{\sigma})^{\frac{1}{m}} \right| = 1 \right\}$$

および

$$K_\infty(x) := \limsup_{m \to \infty} K_m(x)$$

とおく。このとき

$$h_{can} := K_\infty^{-1} \text{ の下半連続包}$$

とおくと K_X の *AZD* である。□

注 8.2 $R(X, K_X)$ の環構造から $\{K_{m!}\}$ は単調増加である。従って

$$\limsup_{m \to \infty} K_m(x) = \sup_{m \geq 1} K_m(x)$$

が成り立つ. □

明らかに h_{can} は X の複素構造のみに依る。h_{can} を K_X の**標準 AZD** と呼ぶ。

8.2　超標準 AZD $\hat{h}_{can}$

標準 AZD は単に標準束が擬有効という条件下では構成できない。従って、アバンダンス予想を解くには役に立たない。そこで h_{can} を少し改良して、標準束の擬有効性のみ仮定して新しい AZD を $\hat{h}_{can}$ を構成してみよう。

X を滑らかな射影的 n-多様体で標準束 K_X は擬有効とする。A を十分アンプルな直線束で任意の擬有効特異エルミート直線束 (L, h_L) に対して $\mathcal{O}_X(A+L) \otimes \mathcal{I}(h_L)$ と $\mathcal{O}_X(K_X + A + L) \otimes \mathcal{I}(h_L)$ は 大域切断で生成されるものとする。このようなアンプル 直線束 A は L^2-評価から簡単に作ることができる。h_A を A の C^∞ エルミート計量で真に正曲率となるものとする。X 上に C^∞ 体積形式 dV を固定しておく。

L^2-拡張定理 ([O]) から A は十分 アンプルで任意の $x \in X$ と任意の擬有効特異エルミート直線束 (L, h_L) に対して有界な補間作用素

$$I_x : A^2(x, (A+L)_x, h_A \cdot h_L, \delta_x) \to A^2(X, A+L, h_A \cdot h_L, dV)$$

で I_x の作用素ノルムが x と (L, h_L) に依らない正定数で上から押さえられるものが存在すると仮定する。ここで $A^2(X, A+L, h_A \cdot h_L, dV)$ は

$$A^2(X, A{+}L, h_A{\cdot}h_L, dV) := \{\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(A{+}L) \otimes \mathcal{I}(h_L)), \int_X \mid \sigma \mid^2 \cdot h_A{\cdot}h_L{\cdot}dV < +\infty\}$$

で L^2 内積

$$(\sigma, \sigma') := \int_X \sigma \cdot \bar{\sigma}' \cdot h_A \cdot h_L \cdot dV$$

をもつヒルベルト空間である。$A^2(x, (A+L)_x, h_A \cdot h_L, \delta_x)$ も同様に定義される。ここで δ_x は x におけるディラック測度である。$h_L(x) = +\infty$ であれば $A^2(x, (A+L)_x, h_A \cdot h_L, \delta_x) = 0$ である。任意の $x \in X$ に対して

$$\hat{K}^A_m(x) := \sup\left\{ \mid \sigma \mid^{\frac{2}{m}} (x) \mid \sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(A + mK_X)) \middle| \left| \int_X h_A^{\frac{1}{m}} \cdot (\sigma \wedge \bar{\sigma})^{\frac{1}{m}} \right| = 1 \right\}$$

とおく。ここで $\mid \sigma \mid^{\frac{2}{m}}$ は X 上の関数ではないが実直線束 $\mid A \mid^{\frac{2}{m}} \otimes \mid K_X \mid^2$ の切断としての上限である。このとき $h_A^{\frac{1}{m}} \cdot \hat{K}^A_m$ は X 上の連続半正 (n, n) 形式で次の結果をえる。

定理 8.3

$$\hat{K}^A_\infty := \limsup_{m \to \infty} h_A^{\frac{1}{m}} \cdot \hat{K}^A_m$$

及び

$$\hat{h}_{can,A} := \text{the 下半連続包 of } \hat{K}^{-1}_\infty.$$

とおく。このとき $\hat{h}_{can,A}$ は K_X の AZD である。また

$$\hat{h}_{can} := \inf_A \hat{h}_{can,A} \text{ の下半連続包}$$

とおく。ここで inf は点毎の下限で A は X 上の全てのアンプル直線束を動く。このとき $\hat{h}_{can}$ は X の複素構造にのみよる K_X の AZD である。□

定義 8.4 (超標準 AZD) 定理 *8.3* の $\hat{h}_{can}$ を K_X の超標準 *AZD* と呼ぶ。□

注 8.5 上の定理で $\hat{h}_{can,A}$ は実は h_A に依存しない *(cf.* 補題 *??)*。

8.3 超標準 AZD $\hat{h}_{can}$ の変動

$f : X \longrightarrow S$ を代数的ファイバー空間とする。一般ファイバー $X_s := f^{-1}(s)$ に対して K_{X_s} が擬有効とする。 この場合 $K_{X/S}$ の特異エルミート 計量 $\hat{h}_{can}$ を同様に定義でき $\hat{h}_{can}$ は $f : X \longrightarrow S$ で半正値性を満たす。

定理 8.6 $f : X \longrightarrow S$ *be an* 代数的ファイバー空間で一般ファイバー X_s に対して K_{X_s} は擬有効とする。S° を f が極大階数のローカスとして $X^\circ = f^{-1}(S^\circ)$ とおく。このとき $K_{X/S}$ の特異エルミート 計量 $\hat{h}_{can}$ で次の性質を満たすものが一意的に存在する。

1. $\hat{h}_{can}$ は半正曲率を持つ。
2. $s \in S^\circ$ に対して $\hat{h}_{can}|X_s$ は K_{X_s} の *AZD* である。
3. S の真解析的部分集合の高々可算和 F で任意の $s \in S \setminus F$ に対して

$$\hat{h}_{can}|X_s \leqq \hat{h}_{can,s}$$

成り立つ, ここで $\hat{h}_{can,s}$ は K_{X_s} の超標準 *AZD*。

□

定理 8.6 と L^2-拡張定理 ([O-T, p.200, Theorem]) から次が得られる。

系 8.7 *([S1, S2, T3])* $f : X \longrightarrow S$ を複素多様体 S 上の滑らかな射影族とする。このとき多重種数 $P_m(X_s) := \dim H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}(mK_{X_s}))$ は S 上局所定数関数である。□

定理 8.6 と超標準 AZD が極小特異性 (cf. 定義 1.5) を持つことから次が従う。

系 8.8 $f : X \longrightarrow Y$ を代数的ファイバー空間. で K_X 及び K_Y が擬有効であるとする。$\hat{h}_{can}$ を $K_{X/Y}$ の標準 特異エルミート計量で定理 *8.6* で構成されるものとする。$\hat{h}_{can,X}, \hat{h}_{can,Y}$ を K_X と K_Y の超標準 *AZD* とする。このとき正定数 C が存在して

$$\hat{h}_{can,X} \leqq C \cdot \hat{h}_{can} \cdot f^*\hat{h}_{can,Y}$$

が X 上で成り立つ。□

系 8.8 は飯高予想

$$\mathrm{Kod}(X) \geqq \mathrm{Kod}(Y) + \mathrm{Kod}(F)$$

に非常に近い。

9 超標準 AZD の KLT 対への拡張

定理 8.3 は KLT 対の場合に直に拡張される。

定理 9.1 (X, D) を滑らかな 射影代数多様体 X と $\mathbb{Q}$ 因子 D の組 (X, D) で *sub KLT* かつ $K_X + D$ が擬有効であるものとする。

このとき計量 $K_X + D$ の特異エルミート計量 $\hat{h}_{can}$ で

1. $\hat{h}_{can}$ は (X, D) により一意的に決まる。

2. $\Theta_{\hat{h}_{can}}$ は半正カレント。

3. $H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + D)) \otimes \mathcal{I}(\hat{h}^m_{can})) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + D)))$ が全ての $m \geqq 1$ で $m(K_X + D)$ がカルティエになるものに対して成り立つ。

□

KLT(subKLT ではない！) 対の射影族に対しても、やはり超標準 AZD の対数多重劣調和性が成り立つ ([T6]) がここでは省略する。

参考文献

[A] Aubin, T.: Equation du type Monge-Ampère sur les varieté kählerienne compactes, C.R. Acad. Paris **283** (1976), 459-464.

[B-T] Bedford, E. and Taylor, B.A. : A new capacity of plurisubharmonic 関数 s, Acta Math. **149** (1982), 1-40.

[B1] Berndtsson, B.: Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains, math.CV/0505469 (2005).

[B2] Berndtsson, B.: Curvature of vector bundles and subharmonicity of vector bundles, math.CV/050570 (2005).

[B3] Berndtsson, B.: Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations, math.CV/0511225 (2005).

[B-P] Berndtsson, B. and Paun, M. : Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles, math.AG/0703344 (2007).

[D] Demailly, J.P.: Regularization of closed positive currents and intersection theory, J. of Alg. Geom. **1** (1992) 361-409.

[D-P-S] Demailly, J.P.- Peternell, T.-Schneider, M. : Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds, International Jour. of Math. **12** (2001), 689-742.

[F-M] Fujino, O. and Mori, S.: Canonical bundle formula, J. Diff. Geom. **56** (2000), 167-188.

[F] T. Fujita : On Kähler fiber spaces over curves, J. Math. Soc. Japan **30**, 779-794 (1978).

[F] Fujita, T.: Approximating Zariski deecomposition of big line bundle , Kodai Math. J. **17** (1994), 1-4.

[G] Griffiths, Ph.: Periods of integrals on algebraic manifolds III: Some global differential-geometric properties of the period mapping, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **38** 125–180 (1970).

[Ka1] Kawamata, Y.: Characterization of Abelian Varieties, Compos. Math. **43** 253–276 (1981).

[Ka2] Kawamata, Y.: Kodaira dimension of Algebraic fiber spaces over curves, Invent. Math. **66** (1982), pp. 57-71.

[Kr] Krantz, S.: Function theory of several complex variables, John Wiley and Sons (1982).

[L] Lelong, P.: Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Differentielles Positives, Gordon and Breach (1968).

[N] Nadel, A.M.: Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, Ann. of Math. **132**(1990),549-596.

[O-T] Ohsawa, T and Takegoshi K.: L^2-extension of holomorphic functions, Math. Z. 195 (1987),197-204.

[O] Ohsawa, T.: On the extension of L^2 holomorphic functions V, effects of generalization, Nagoya Math. J. **161**(2001) 1-21, Erratum : Nagoya Math. J. **163** (2001).

[R] Royden, H.L.: The Ahlfors Schwarz lemma in several complex variables, Comment. Math. Helv. **55** (1980),547-558.

[Sch] Schmid, W.: Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping. Invent. math. **22**, 211–319 (1973).

[Si] Siu, Y.-T.: Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the estension of closed positive currents. Invent. math. **27**(1974) 53-156.

[S1] Siu, Y.-T.: Invariance of plurigenera, Invent. Math. **134** (1998), 661-673.

[S2] Siu, Y.-T.: Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type, Collected papers Dedicated to Professor Hans Grauert (2002), pp. 223-277.

[S-T] Song, J. and Tian, G. : Canonical measures and Kähler-Ricci flow, math. ArXiv0802.2570 (2008).

[Su] Sugiyama, K.: Einstein-Kähler metrics on minimal varieties of general type and an inequality between Chern numbers. Recent topics in differential and analytic geometry, 417–433, Adv. Stud. Pure Math., **18**-I, Academic Press, Boston, MA (1990).

[Ti] Tian, G.: On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds, Jour. Diff. Geom. **32**(1990),99-130.

[Tr] Trudinger, N.S.: Fully nonlinear elliptic equation under natural structure conditions, Trans. A.M.S. **272** (1983), 751-769.

[T0] Tsuji H.: Existence and degeneration of Kähler-Einstein metrics on minimal algebraic varieties of general type. Math. Ann. **281** (1988), no. 1, 123–133.

[T1] Tsuji H.: Analytic Zariski decomposition, Proc. of Japan Acad. **61**(1992), 161-163.

[T2] Tsuji, H.: Existence and Applications of Analytic Zariski Decompositions, Trends in Math., Analysis and Geometry in Several Complex Variables(Katata 1997), Birkhäuser Boston, Boston MA.(1999), 253-272.

[T3] Tsuji, H.: Deformation invariance of plurigenera, Nagoya Math. J. **166** (2002), 117-134.

[T4] Tsuji, H.: Dynamical construction of Kähler-Einstein metrics, math.AG/0606023 (2006).

[T5] Tsuji, H.: Curvature semipositivity of relative pluricanonical systems, math.AG/0703729 (2007).

[T6] Tsuji, H.: Canonical singular hermitian metrics on relative canonical bundles, math.ArXiv0704.0566 (2007).

[T7] Tsuji, H.: Extension of log pluricanonical forms from subvarieties, math.ArXiv0709.2710 (2007).

[T8] Tsuji, H.: Canonical measures and the dynamical systems of Bergman kernels, math.ArXiv0805.1829 (2008).

[Y1] Yau, S.-T.: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978),339-441.

[Y2] Yau, S.-T.: A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, Amer. J. of Math. **100** (1978), 197-303.

Author's address
Hajime Tsuji
Department of Mathematics
Sophia University
7-1 Kioicho, Chiyoda-ku 102-8554
Japan
e-mail address: tsuji@mm.sophia.ac.jp or h-tsuji@h03.itscom.net