数理解析研究所講究録
第1614巻 2008年 11-19

並行 Poiseuille 流れの不安定性に対する計算機援用証明
A computer-assisted instability proof for the plane Poiseuille flow

Yoshitaka Watanabe[†] Michael Plum[‡] Mitsuhiro T.Nakao[*]

[†]Research Institute for Information Technology, Kyushu Uni versity
[‡]Faculty of Mathematics, Karlsruhe University
[*]Faculty of Mathematics, Kyushu University

概要

本稿では，2次元平行流れの安定特性を記述する非自己共役複素固有値問題である Orr-Sommerfeld 方程式の解の存在に対する計算機援用証明法について述べ，特に Poiseuille 流れに対して得られた検証例をいくつか紹介する．

1 平面 Poiseuille 流れの安定性問題

Orr-Sommerfeld 方程式:

$$\begin{cases} (-D^2+a^2)^2u + iaR[V(-D^2+a^2)+V'']u = \lambda(-D^2+a^2)u \quad \text{on } \Omega = [x_1, x_2] \\ u(x_1) = u(x_2) = u'(x_1) = u'(x_2) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

は，非圧縮性粘性流体と基本流の安定性問題を記述する流体力学の基礎方程式のひとつであり，Orr [5] と Sommerfeld [8] が独立に導いたことで知られている．

Orr-Sommerfeld 方程式 (1) は固有値 λ および固有関数 u を求める1次元複素固有値問題である．本稿では，平面 Poiseuille 流れに対する安定性の問題として (1) で特に

$$V = 1 - x^2, \qquad \Omega = [-1, 1] \tag{2}$$

とした問題を考える．この時 (1) は非自己共役な複素固有値問題であり，基本流の安定性は固有値 λ の実部の符号で判定することができる．すなわち，λ の実部が正ならば流れ関数 ψ は減衰するため安定，負ならば不安定になる．また，(1) の固有値 λ の実部が正から負に反転するもっとも小さい R を臨界 Reynolds 数と呼び R_c と，また，その時の波数 a を a_c と書く．Orszag [6] は，Chebyshev 多項式による近似計算の結果，(2) の条件の下

$$R_c = 5772.22, \qquad a_c 1.02056 \pm 0.00001$$

という数値計算結果を得た．

理論的な結果としては Klein [1] が一般化された Gerschgorin の定理による固有値の包み込みを提案している．しかしながら，この手法はいくつかの前提となる仮定が必要であり，数値例も浮動小数点演算における丸め誤差を考慮していないなど，数学的に厳密とは言えない．Lahmann-Plum [2, 3] は Blasius 流れに対する計算機援用証明に成功しているが，Poiseuille 流れに対する理論的な結果は得られていない．

ここでは，$a, R > 0$ を動かしながら (1) の複素固有値 λ を精度保証付きで計算し，さらに λ の実部を調べ，正から負に転じる可能性のある R の範囲を特定するという目標を立てる．

簡単のため

$$\tilde{\Delta} := -D^2 + a^2$$

とおき，(1) を (3) に書き直す．

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 u + iaR(V\tilde{\Delta} + V'')u = \lambda\tilde{\Delta}u \quad \text{on } \Omega, \\ u(-1) = u(1) = u'(-1) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

さらに，実数値関数 v, w と実数 σ, μ を用いて u, λ を

$$\begin{cases} u &= v + iw, \\ \lambda &= \sigma + i\mu \end{cases} \tag{4}$$

と書き表す．(4) を (3) に代入し整理すると，次を得る．

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 v - aR(V\tilde{\Delta} + V'')w = \sigma\tilde{\Delta}v - \mu\tilde{\Delta}w \quad \text{on } \Omega, \\ \tilde{\Delta}^2 w + aR(V\tilde{\Delta} + V'')v = \sigma\tilde{\Delta}w + \mu\tilde{\Delta}v \quad \text{on } \Omega, \\ v(-1) = v(1) = v'(-1) = v'(1) = 0, \\ w(-1) = w(1) = w'(-1) = w'(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

2 関数空間の導入と不動点定式化

$L^2(\Omega)$ を Ω 上 2 乗可積分実関数の集合，$(\cdot,\cdot)_{L^2}$ を Ω 上の L^2-内積，$\|v\| := \sqrt{(v,v)_{L^2}}$ を Ω 上の L^2-ノルム，$\|v\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)|$ を Ω 上の L^∞-ノルム，$H^k(\Omega)$ を超関数の意味での k 階微分が $L^2(\Omega)$ となる実関数の集合，ノルムを $\|v\|_{H^k} := \sqrt{\sum_{j=1}^k \left\|\frac{d^j v}{dx^j}\right\|}$ で定める．また，

$$H_0^2(\Omega) := \{\, v \in H^2(\Omega) \mid v(-1) = v'(-1) = v(1) = v'(1) = 0 \,\}$$

とするとき，$\|v\|_{\tilde{\Delta}} := \|\tilde{\Delta}v\|$ は $\|v\|_{H^2}$ と同値な $H_0^2(\Omega)$上のノルムであることから，$H_0^2(\Omega)$は $(\tilde{\Delta}v, \tilde{\Delta}w)_{L^2}$ を内積とした Hilbert 空間となる．よって，問題 (5) の弱解を与える無限次元空間 X を $X := H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で定めるとき，X はノルム

$$\|[v, w, \sigma, \mu]^T\|_X := \sqrt{\|v\|_{\tilde{\Delta}}^2 + \|w\|_{\tilde{\Delta}}^2 + \sigma^2 + \mu^2}$$

に対して Banach 空間となる．

微分作用素 $\tilde{\Delta}$ については

$$(\tilde{\Delta}v, w)_{L^2} = (v, \tilde{\Delta}w)_{L^2}, \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega),\ \forall w \in H^2(\Omega),$$

$$(\tilde{\Delta}v, \tilde{\Delta}w)_{L^2} = (\tilde{\Delta}^2 v, w)_{L^2}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), w \in H_0^2(\Omega)$$

が成立する．ここに $C_0^\infty(\Omega)$ は Ω 上無限階微分可能であり，$x = -1, x = 1$ で恒等的に 0 となる関数の空間である．ここで，$C_0^\infty(\Omega)$ が$H_0^2(\Omega)$で稠密であることより，(5) と同値となる弱形式を次で定義することができる．(6) の第 3,4 式は拘束条件である．

Given $a, R, \xi_R, \xi_I \in \mathbb{R}$, $v_0, w_0 \in H_0^2(\Omega)$ and $V \in C^2(\bar{\Omega})$, find $[v, w, \sigma, \mu]^T \in X$ such that

$$\left\{\begin{array}{rcll} (\tilde{\Delta}v, \tilde{\Delta}\xi)_{L^2} &=& (aR(V\tilde{\Delta} + V'')w + \sigma\tilde{\Delta}v - \mu\tilde{\Delta}w, \xi)_{L^2}, & \forall\xi \in H_0^2(\Omega), \\ (\tilde{\Delta}w, \tilde{\Delta}\eta)_{L^2} &=& (-aR(V\tilde{\Delta} + V'')v + \sigma\tilde{\Delta}w + \mu\tilde{\Delta}v, \eta)_{L^2}, & \forall\eta \in H_0^2(\Omega), \\ (v, v_0)_{L^2} &=& \xi_R, & \\ (w, w_0)_{L^2} &=& \xi_I. & \end{array}\right. \tag{6}$$

次に，X から $L^2(\Omega)$への連続写像 f_1, f_2 を

$$f_1[v, w, \sigma, \mu]^T := aR(V\tilde{\Delta} + V'')w + \sigma\tilde{\Delta}v - \mu\tilde{\Delta}w, \tag{7}$$

$$f_2[v, w, \sigma, \mu]^T := -aR(V\tilde{\Delta} + V'')v + \sigma\tilde{\Delta}w + \mu\tilde{\Delta}v \tag{8}$$

で定める．f_1, f_2 は X の有界集合を $L^2(\Omega)$ の有界集合に写す．

ここで，任意の $g \in L^2(\Omega)$ に対し，

$$\left\{\begin{array}{ll} \tilde{\Delta}^2\omega &= g \\ \omega(-1) &= \omega(1) = \omega'(-1) = \omega'(1) \end{array}\right. \tag{9}$$

の解 $\omega \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ が一意に存在する．$g \in L^2(\Omega)$ に対して (9) の解 $\omega \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ を対応させ，さらに $H_0^2(\Omega)$ に埋め込むまでの写像を $(\tilde{\Delta}^2)^{-1}$ と定義する．$f_1, f_2, (\tilde{\Delta}^2)^{-1}$ を用いて，写像 $F : X \longrightarrow X$ を次で定める．

$$F[v, w, \sigma, \mu]^T := \begin{bmatrix} (\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_1[v, w, \sigma, \mu]^T \\ (\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_2[v, w, \sigma, \mu]^T \\ \sigma - (v, v_0)_{L^2} + \xi_R \\ \mu - (w, w_0)_{L^2} + \xi_I \end{bmatrix}. \tag{10}$$

この時，F は X 上 compact 作用素であり，弱形式 (6) は F の不動点:

$$F[v, w, \sigma, \mu]^T = [v, w, \sigma, \mu]^T$$

を求める問題と同値となる．よって，一般の写像 A，一般の集合 U に対する AU を

$$AU := \{Au \mid u \in U\}$$

と書くとき，Schauder の不動点定理により，有界凸閉集合 $U \subset X$ に対し

$$FU \subset U$$

ならば，$u = Fu$ なる F の不動点 u が U 内に存在することが確認できる．

3 有限次元部分空間と射影誤差

この節では，具体的な $H_0^2(\Omega)$ の有限次元部分空間 S_h として区分的 3 次 Hermite 基底関数 [7] を導入し，線形化問題に対する定量的 a priori 誤差評価を行なう．

区間 $\Omega = [-1, 1]$ を K 等分する．分割点

$$-1 = x_0, x_1, \ldots, x_{K-1}, x_K = 1$$

の座標は $x_k=-1+2k/K(k=0,\ldots,K)$ で与えられる．また，分割幅を $h:=2/K$ とする．$H_0^2(\Omega)$ の近似空間 S_h を

$$\phi_n(x_m)=\delta_{nm},\quad \phi_n'(x_m)=0,\quad \psi_n(x_m)=0,\quad \psi_n'(x_m)=\delta_{nm}\quad 1\le n\le K-1,\quad 0\le m\le K$$

を満足する $2(K-1)$ 個の関数によって

$$S_h:=\mathrm{span}\{\phi_n(x),\ \psi_n(x)\}\quad n=1,\ldots,K-1$$

で定義する．$\phi_n(x)$, $\psi_n(x)$ は標準基底関数:

$$\Phi(x)=\begin{cases}(x+1)^2(1-2x) & -1\le x\le 0\\ 2x^3-3x^2+1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}x(x+1)^2 & -1\le x\le 0\\ x(1-x)^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\tag{11}$$

を用いて

$$\phi_n(x)=\Phi\left(\frac{K}{2}(x+1)-n\right),\quad \psi_n(x)=\frac{2}{K}\Psi\left(\frac{K}{2}(x+1)-n\right)\quad n=1,\ldots,K-1$$

で決定できる．

次に，無限次元空間から有限次元空間への射影 $P_h:H_0^2(\Omega)\longrightarrow S_h$ を

$$(\,\tilde\Delta(v-P_hv),\tilde\Delta v_h\,)_{L^2}=0,\qquad \forall v_h\in S_h\tag{12}$$

で定義する．このとき，P_h の近似性として次の評価が成り立つ．

Lemma 1 $\forall g\in L^2(\Omega)$ に対し，(9) の解 ω と $P_h\omega$ についての a priori 評価:

$$\|\omega-P_h\omega\|_{\tilde\Delta}\le C\|g\|,\tag{13}$$

$$\|\omega-P_h\omega\|\le C^2\|g\|\tag{14}$$

が成り立つ．ただし

$$C:=\frac{4\sqrt{3}}{(\pi K)^2}\left(1+\frac{4a^2}{(\pi K)^2}\right).\tag{15}$$

4 候補者集合と検証条件

この節では，Schauder の不動点定理が適用されうる集合 (「候補者集合」と呼ぶ) の構成方法と解の存在検証条件を [4] に基づき提案する．以下，特に断らず X, S_h, $H_0^2(\Omega)$ 上の恒等写像を区別せず I で表現する．

X の有限次元部分空間 X_h を

$$X_h:=S_h\times S_h\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

とする．(12) で定義した射影 P_h を用いて，X から X_h への射影 $\hat P_h$ を

$$\hat P_h[v,w,\sigma,\mu]^T:=[P_hv,P_hw,\sigma,\mu]^T$$

で定義する．また，射影 $\hat P_h$ による近似の誤差空間として

$$X_*:=\left\{[v_*,w_*,0,0]\in X\mid v_*=(I-P_h)v,\ w_*=(I-P_h)w,\ v\in H_0^2(\Omega),\ w\in H_0^2(\Omega)\right\}\subset X$$

を定義する．このとき，P_h の一意分解性より，任意の $u=[v,w,\mu,\sigma]^T\in X$ は X_h の要素と X_* の要素を用いて

$$[v,w,\mu,\sigma]^T=[\hat{v},\hat{w},\mu,\sigma]^T+[v_*,w_*,0,0]^T,\qquad [\hat{v},\hat{w},\mu,\sigma]^T\in X_h,\ [v_*,w_*,0,0]^T\in X_*$$

の形に一意に分解することができる．

したがって，X の不動点方程式 $u=Fu$ は

$$\left\{\begin{array}{rcl}\hat{P}_h u&=&\hat{P}_h Fu,\\(I-\hat{P}_h)u&=&(I-\hat{P}_h)Fu\end{array}\right.\tag{16}$$

と一意に分解することができる．(16) を成分毎に書くと，$[v,w,\sigma,\mu]^T=F[v,w,\sigma,\mu]^T$ は

$$\left\{\begin{array}{ccc}\begin{bmatrix}P_hv\\P_hw\\\sigma\\\mu\end{bmatrix}&=&\begin{bmatrix}P_h(\tilde{\Delta}^2)^{-1}f_1[v,w,\sigma,\mu]^T\\P_h(\tilde{\Delta}^2)^{-1}f_2[v,w,\sigma,\mu]^T\\\sigma-(v,v_0)_{L^2}+\xi_R\\\mu-(w,w_0)_{L^2}+\xi_I\end{bmatrix},\\[2ex]\begin{bmatrix}(I-P_h)v\\(I-P_h)w\\0\\0\end{bmatrix}&=&\begin{bmatrix}(I-P_h)(\tilde{\Delta}^2)^{-1}f_1[v,w,\sigma,\mu]^T\\(I-P_h)(\tilde{\Delta}^2)^{-1}f_2[v,w,\sigma,\mu]^T\\0\\0\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

と分解される．

以降，$u_h=[v_h,w_h,\sigma_h,\mu_h]^T\in X_h$ を近似解として固定し，有限次元部分に Newton-like 作用素:

$$\mathcal{N}_hu:=\hat{P}_hu-[I-\hat{P}_hF'(u_h)]_h^{-1}\hat{P}_h(I-F)u\ :\quad X\longrightarrow X_h$$

を導入する．ただし，$[I-\hat{P}_hF'(u_h)]_h^{-1}:\ X_h\longrightarrow X_h$ は $\hat{P}_h(I-F'(u_h)):X\longrightarrow X_h$ の定義域を X_h に制限した逆作用素とする．実際の計算では，$[I-\hat{P}_hF'(u_h)]_h^{-1}$ の存在検証もあわせて行なうため，ここでは存在を仮定する．このとき

$$\hat{P}_hu=\hat{P}_h\mathcal{N}_hu\iff\hat{P}_hu=\hat{P}_hFu$$

となるため，不動点方程式 $u=Fu$ は

$$\left\{\begin{array}{rcl}\hat{P}_hu&=&\mathcal{N}_hu,\\(I-\hat{P}_h)u&=&(I-\hat{P}_h)Fu\end{array}\right.$$

と同値となる．したがって，X 上の compact 写像 T を

$$Tu:=\mathcal{N}_hu+(I-\hat{P}_h)Fu$$

で定義すると，不動点問題 $u=Fu$ と $u=Tu$ は同値となる．

次に，X_h の部分集合と X_* の部分集合から構成される X の候補者集合 U を

$$U_h:=\left\{[\hat{v}_h,\hat{w}_h,\hat{\sigma},\hat{\mu}]^T\in X_h\ \middle|\ \|\hat{v}_h\|_{\tilde{\Delta}}\le\gamma,\ \|\hat{w}_h\|_{\tilde{\Delta}}\le\delta,\ |\hat{\sigma}|\le c_1,\ |\hat{\mu}|\le c_2\right\},$$

$$U_*:=\left\{[v_*,w_*,0,0]^T\in X_*\ \middle|\ \|v_*\|_{\tilde{\Delta}}\le\alpha,\ \|v_*\|\le C\alpha,\ \|w_*\|_{\tilde{\Delta}}\le\beta,\ \|w_*\|\le C\beta\right\}$$

を用いて

$$U:=u_h+U_h+U_*$$

で定義する．この時，以下の不動点定理の成立条件を得る．

Theorem 1

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{N}_h U - u_h & \subset & U_h \\ (I-\hat{P}_h)FU & \subset & U_* \end{array}\right. \tag{17}$$

が成立するならば，U 内に T の不動点が存在する．

次に，(17) を満たすことが期待される X の候補者集合 U のより詳しい構成方法について述べる．有限次元部分は $U = u_h + U_h + U_* \subset X$ に対して

$$\mathcal{N}_h U - u_h = [V_h, W_h, \Sigma, M]^T \subset X_h$$

とおくことで，(17) の有限次元部分の検証条件 $\mathcal{N}_h U - u_h \subset U_h$ は

$$\sup_{\bar{v}_h \in V_h} \|\bar{v}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \gamma, \quad \sup_{\bar{w}_h \in W_h} \|\bar{w}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \delta, \quad \sup_{\bar{\sigma}\in\Sigma} |\bar{\sigma}| \le c_1, \quad \sup_{\bar{\mu}\in M} |\bar{\mu}| \le c_2$$

と書ける．

(17) の無限次元部分の検証条件 $(I-\hat{P}_h)FU \subset U_*$ は，

$$\begin{bmatrix} (I-P_h)v \\ (I-P_h)w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-P_h)(\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_1[v,w,\sigma,\mu]^T \\ (I-P_h)(\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_2[v,w,\sigma,\mu]^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり，固有値部分は常に満たされているため，固有関数部分に着目すればよい．

任意の $u \in U$ を $u = [v,w,\sigma,\mu]^T$ と，また，

$$\hat{v}_* = (I-P_h)(\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_1[v,w,\sigma,\mu]^T,$$
$$\hat{w}_* = (I-P_h)(\tilde{\Delta}^2)^{-1} f_2[v,w,\sigma,\mu]^T$$

とおくと，Theorem 1 より

$$\|\hat{v}_*\|_{\tilde{\Delta}} \le C\|f_1(u)\|, \quad \|\hat{w}_*\|_{\tilde{\Delta}} \le C\|f_2(u)\|, \quad \|\hat{v}_*\| \le C^2\|f_1(u)\|, \quad \|\hat{w}_*\| \le C^2\|f_2(u)\|$$

が成立する．よって，$(I-\hat{P}_h)FU \subset U_*$ が満足されるためには，

$$C\sup_{\bar{u}\in U} \|f_1(\bar{u})\| \le \alpha, \qquad C\sup_{\bar{u}\in U} \|f_2(\bar{u})\| \le \beta$$

が成り立てばよい．

以上をまとめると，次の定理を得る．

Theorem 2 $u_h \in X_h$，集合 $U_h \subset X_h, U_* \subset X_*, U \subset X$ を

$$U_h := \left\{[\hat{v}_h, \hat{w}_h, \hat{\sigma}, \hat{\mu}]^T \in X_h \mid \|\hat{v}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \gamma,\ \|\hat{w}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \delta,\ |\hat{\sigma}| \le c_1,\ |\hat{\mu}| \le c_2\right\},$$
$$U_* := \left\{[v_*, w_*, 0, 0]^T \in X_* \mid \|v_*\|_{\tilde{\Delta}} \le \alpha,\ \|v_*\| \le C\alpha,\ \|w_*\|_{\tilde{\Delta}} \le \beta,\ \|w_*\| \le C\beta\right\},$$
$$U := u_h + U_h + U_*,$$

また，$\mathcal{N}_h U - u_h \subset X_h$ を $S_h \times S_h \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の成分毎に

$$[V_h, W_h, \Sigma, M]^T := \mathcal{N}_h U - u_h$$

と表記する．このとき，

$$\sup_{\bar{v}_h \in V_h} \|\bar{v}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \gamma,$$
$$\sup_{\bar{w}_h \in W_h} \|\bar{w}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \delta,$$
$$\sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} |\bar{\sigma}| \le c_1,$$
$$\sup_{\bar{\mu} \in M} |\bar{\mu}| \le c_2,$$
$$C \sup_{\bar{u} \in U} \|f_1(\bar{u})\| \le \alpha,$$
$$C \sup_{\bar{u} \in U} \|f_2(\bar{u})\| \le \beta$$

が成立するならば，T の不動点が U に存在する．

Theorem 2 を用いた反復アルゴリズムは以下の通りである．

Algorithm

- $k = 0$
  Set initial values $\gamma^{(0)}, \delta^{(0)}, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)} > 0$.
- $k \ge 1$
  1. For a fixed small constant $\varepsilon > 0$ set
  $$\hat{\gamma}^{(k)} := (1+\varepsilon)\gamma^{(k-1)}, \quad \hat{\delta}^{(k)} := (1+\varepsilon)\delta^{(k-1)}, \quad \hat{c_1}^{(k)} := (1+\varepsilon)c_1^{(k-1)},$$
  $$\hat{c_2}^{(k)} := (1+\varepsilon)c_2^{(k-1)}, \quad \hat{\alpha}^{(k)} := (1+\varepsilon)\alpha^{(k-1)}, \quad \hat{\beta}^{(k)} := (1+\varepsilon)\beta^{(k-1)}.$$
  2. The k-th candidate set $U^{(k)}$ is defined by
  $$U_h^{(k)} := \{[\hat{v}_h, \hat{w}_h, \hat{\sigma}, \hat{\mu}]^T \in X_h \mid \|\hat{v}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \hat{\gamma}^{(k)},\ \|\hat{w}_h\|_{\tilde{\Delta}} \le \hat{\delta}^{(k)},\ |\hat{\sigma}| \le \hat{c_1}^{(k)},\ |\hat{\mu}| \le \hat{c_2}^{(k)}\},$$
  $$U_*^{(k)} := \{[v_*, w_*, 0, 0]^T \in X_* \mid \|v_*\|_{\tilde{\Delta}} \le \hat{\alpha}^{(k)},\ \|w_*\|_{\tilde{\Delta}} \le \hat{\beta}^{(k)},\ \},$$
  $$U^{(k)} := u_h + U_h^{(k)} + U_*^{(k)}.$$
  3. Evaluate $N_h U^{(k)} - u_h \subset X_h$ as
  $$[V_h^{(k)}, W_h^{(k)}, \Sigma^{(k)}, M^{(k)}]^T := \mathcal{N}_h U^{(k)} - u_h.$$
  4. Compute values of the k-th iteration by
  $$\gamma^{(k)} := \sup_{\bar{v}_h \in V_h^{(k)}} \|\bar{v}_h\|_{\tilde{\Delta}},$$
  $$\delta^{(k)} := \sup_{\bar{w}_h \in W_h^{(k)}} \|\bar{w}_h\|_{\tilde{\Delta}},$$
  $$c_1^{(k)} := \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma^{(k)}} |\bar{\sigma}|,$$
  $$c_2^{(k)} := \sup_{\bar{\mu} \in M^{(k)}} |\bar{\mu}|,$$
  $$\alpha^{(k)} := C \sup_{\bar{u} \in U^{(k)}} \|f_1(\bar{u})\|,$$
  $$\beta^{(k)} := C \sup_{\bar{u} \in U^{(k)}} \|f_2(\bar{u})\|.$$
  5. If $\gamma^{(k)} \le \hat{\gamma}^{(k)}$, $\delta^{(k)} \le \hat{\delta}^{(k)}$, $c_1^{(k)} \le \hat{c_1}^{(k)}$, $c_2^{(k)} \le \hat{c_2}^{(k)}$, $\alpha^{(k)} \le \hat{\alpha}^{(k)}$, $\beta^{(k)} \le \hat{\beta}^{(k)}$ hold then stop, and there exists a desired solution in $U^{(k)} \subset X$.
  6. Set $k := k+1$ and return to the step 1. If k reaches a maximum iteration number or some values exceed a criterion then stop, and the verification fails.

◆ アルゴリズムの注釈

1. 実際の計算では，U は無限次元の項を含むため，また，浮動小数点演算の丸め誤差のため，厳密な $\gamma^{(k)}$, $\delta^{(k)}$, $c_1^{(k)}$, $c_2^{(k)}$, $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$ $(k \geq 1)$ の値を求めることは不可能である．しかしながら，ノルム評価と丸め誤差を考慮した区間演算アルゴリズムおよびソフトウェアを用いることによって，《厳密な上界》を与えることは可能である．したがって，over-estimate された $\gamma^{(k)}$, $\delta^{(k)}$, $c_1^{(k)}$, $c_2^{(k)}$, $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$, $(k \geq 1)$ で構成される集合と候補者集合との比較によって，数学的に厳密な意味で検証条件が確認できる．
2. ε による拡大は，"ε-inflation" と呼ばれる加速法の一種である．$\varepsilon > 0$ の具体的な値は問題によって使い分ける．
3. 初期値 $\gamma^{(0)}, \delta^{(0)}, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)} > 0$ の値も問題によって変化する．経験的には，近似解 u_h が真の解に十分近い場合，Newton 型作用素は反復を繰り返す毎に縮小を起こす集合に収束することが期待されることから，マシンエプシロン程度の初期値で十分である．
4. $[V_h^{(k)}, W_h^{(k)}, \Sigma^{(k)}, M^{(k)}]^T$ の導出には，有限次元 Newton-like 作用素の逆作用素から構成される特異値問題をはじめとする評価が必要となる．

5 検証例

この節では，前節のアルゴリズムに基づいて得られた検証例をいくつか紹介する．計算環境は表 1 の通りである．丸め誤差を考慮した計算を行なうために Sun One Fortran コンパイラでサポートされている 4 倍精度区間変数を用いた．

表 1 計算環境

コンパイラ	Sun ONE Studio 7, Compiler Collection Fortran 95
OS	Solaris8
計算機	FUJITSU PRIMEPOWER850 SPARC64-GP 1.3GHz

$R = 5775$, $a = 1.02$, $K = 1000$ の時，近似解 u_h の周りに構成される X の候補者集合:

$$U = u_h + U_h + U_*, \quad U_h = [V_h, W_h, \Sigma, M]^T, \quad U_* = [V_*, W_*, 0, 0]^T,$$

内に解が存在することを検証した．各集合のノルムは次の値で評価される．

$$\|V_h\|_{\hat{\Delta}} \leq 5.388 \times 10^{-4}, \quad \|W_h\|_{\hat{\Delta}} \leq 5.523 \times 10^{-4},$$
$$\|V_*\|_{\hat{\Delta}} \leq 6.587 \times 10^{-3}, \quad \|W_*\|_{\hat{\Delta}} \leq 3.867 \times 10^{-3}.$$

また，固有値は

$$\lambda \in [-0.04719, -0.00625] + i[1554.56608, 1554.60797].$$

として包み込まれる．したがって，$a = 1.02$, $R = 5775$ においては少なくともひとつの固有値 λ の実部が負になることが確認できる．

6 おわりに

検証に成功した固有値が最小固有値であることの数学的保証はこのアルゴリズムでは得られておらず，中立曲線 $Re(\lambda) = 0$ の追跡，臨界 Reynolds 数自信の包み込みとともに今後の課題である．

本研究は科研費（No.18540127, No.15204007, No.16104001）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Klein, P. P.: Including Eigenvalues of the Plane Orr-Sommerfeld Problem, *Applications of Mathematics*, Vol.38, No.6, pp.452–458 (1993).

[2] Lahmann, J. and Plum, M., A computer-assisted instability proof for the Orr-Sommerfeld equation with Blasius profile, *ZAMM*, Vol.84, pp.188–204 (2004).

[3] Lahmann, J. and Plum, M., On the spectrum of the Orr-Sommerfeld equation on the semiaxis, *Mathematische Nachrichten*, Vol.216, pp.145–153 (2000).

[4] 中尾充宏, 山本野人: 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.

[5] Orr, W. M'F.: The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid, Part I (A Perfect Liquid), Part II (A Viscous Liquid), *Proceedings of the Royal Irish Academy Sect.A*, Vol.27, pp.9–138 (1907).

[6] Orszag, S. A.: Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation, *J. Fluid Mech.*, Vol.50, Part4, pp.689–703 (1971).

[7] Schultz. M. H.: *Spline Analysis*, Prentice-Hall, London, 1973.

[8] Sommerfeld, A.: Ein Beitrag zur Hydrodynamischen Erklärung der Turbulenten Flüssigkeitsbewegungen, *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici* (Roma, 6-11 Aprile 1908), Vol.3, pp.116–124 (1909).