

# メッシュリファインメントを用いた有限要素解の事前誤差評価

金沢大学自然科学研究科 小林 健太 (Kenta Kobayashi)

Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University

kenta.k@staff.kanazawa-u.ac.jp

## 1 問題の概要

$f \in L^2(\Omega)$  に対し,  $u$  を以下のポアソン方程式の弱解とする.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで  $\Omega$  は線分で囲まれた非凸領域とする. このとき, 非凸な角の付近で密になるようなメッシュを用いてこの方程式の有限要素解を求めた時の, 解に対する  $H_0^1$  および  $L^2$  ノルムについての事前誤差評価を求める.

## 2 具体的な方法

領域  $\Omega$  について, いくつかの仮定を置いておく.

1. 各非凸の角について, 図 1 のように, 半径 1 の扇形を内接する事ができる.
2. 扇形の直線部分は境界部分に含まれなければならない.
3. 扇形は重なっても良い.

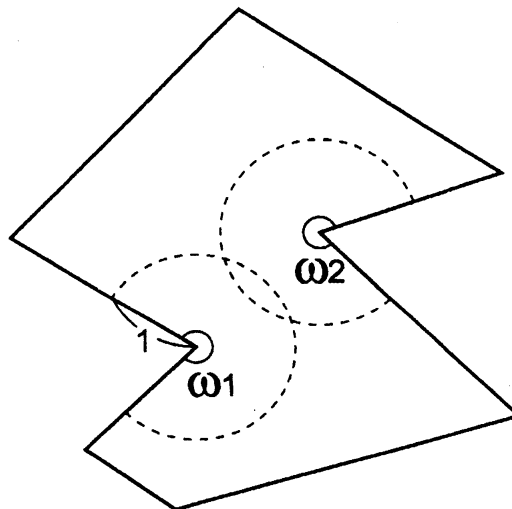


図 1: 非凸領域  $\Omega$

非凸な角の数を  $n$ , それらの角を構成する頂点を  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , それぞれの内角を  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  とする.

$u$  については以下のような特異関数による表現が知られている [1][2]:

$$u(x, y) = w(x, y) + \sum_{k=1}^n \lambda_k T_k \sigma_k(x, y) \quad (2.1)$$

ここで  $w(x, y) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $\lambda_k$  は定数,  $\sigma_k(x, y) \in H_0^1(\Omega)$  かつ原点の近傍で

$$\sigma_k(x, y) \sim r^{\pi/\omega_k} \sin\left(\frac{\pi}{\omega_k} \theta\right),$$

ただし  $(r, \theta)$  は曲座標,  $T_k$  は  $\sigma_k$  の定義域を平行移動と回転で移動する作用素で, 原点を  $p_k$  に,  $\theta = 0$  と  $\theta = \omega_k$  を  $\Omega$  の境界に移すようなものである.

$\sigma_k$  については任意性があるので, ここでは

$$\sigma_k(x, y) = \begin{cases} (r^{\pi/\omega_k} - 3r^{2-\pi/\omega_k} + 2r^{3-2\pi/\omega_k}) \sin\left(\frac{\pi}{\omega_k} \theta\right), & (r < 1), \\ 0, & (r \geq 1), \end{cases}$$

とする (なぜこのような形を使うかについては, ここでは詳しくは述べない).

有限要素法を適用するため, 領域  $\Omega$  に対してメッシュ分割  $D$  を考える. ただし  $D$  は長方形分割または三角形分割とする.

$D$  を構成する各長方形もしくは三角形の内部を

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$$

とし,  $\tau_j$  について  $l(\tau_j)$  と  $r_k(\tau_j)$  を以下のように定義する.

$$l(\tau_j) = \begin{cases} \text{長方形の小さくない方の辺の長さ,} & (\tau_j \text{ が長方形の時}), \\ \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, & (\tau_j \text{ が三角形の時. ただし } a, b \text{ は一番小さくない二辺の長さ}). \end{cases}$$

$$r_k(\tau_j) = \min_{(x, y) \in \tau_j} |p_k - (x, y)|.$$

また  $c_j$  を,  $\tau_j$  が長方形の時は  $1/\pi$ ,  $\tau_j$  が三角形の時は,  $\tau_j$  の頂点でゼロとなるような任意の  $\phi \in H^2$  について  $\|\Delta\phi\| \leq c_j l(\tau_j) \|\phi\|_{H^2}$  かつ  $c_j \geq 1/\pi$  を満たすような定数とする. 例えば  $\tau_j$  が直角二等辺三角形の場合は  $c_j = 0.494$  と取れる [3]. 更に,  $C_D = \max_j c_j$  とする.

今, メッシュ分割  $D$  は  $h \leq 1$ ,  $\alpha_k > \omega_k/\pi$ , および  $\beta_k \leq h^{-(\alpha_k-1)}$  に対し,

$$l(\tau_j) \leq \min_k \left( \max \left( \beta_k h^{\alpha_k}, h r_k(\tau_j)^{(\alpha_k-1)/\alpha_k} \right) \right), \quad l(\tau_j) \leq h,$$

を満たすとする. これは, 非凸なる角の近傍ではメッシュ幅  $h^{\alpha_k}$  以下で, 非凸なる角から 1 以上離れた場所ではメッシュ幅  $h$  以下でメッシュを切る事を意味する.

例えば, 図 2 のような L 字領域の場合,  $h = 1/M$ ,  $\alpha_k = 2$ ,  $\beta_k = 1$  の時は

$$x_j = \pm \frac{j^2}{(3M)^2}, \quad j = 0, 3, 4, 5, \dots, 3M$$

の位置でメッシュ境界を定めて長方形メッシュを切れれば仮定は満たされる. 図は  $M = 4$  の時のメッシュである.

以下, 具体的な評価に入る.

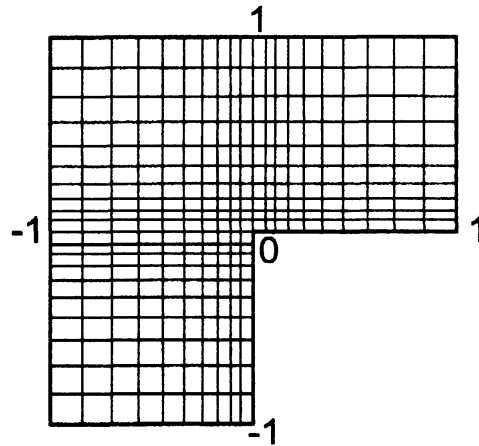


図 2: 長方形メッシュの場合

まず

$$\bar{\sigma}_k(x, y) = \begin{cases} \left\{ \left( \left( 3 - \frac{\pi}{\omega_k} \right) h_k^{-\alpha_k(2-\pi/\omega_k)} - 3 \left( 1 + \frac{\pi}{\omega_k} \right) h_k^{-\pi\alpha_k/\omega_k} + \frac{4\pi}{\omega_k} \cdot h_k^{-\alpha_k(2\pi/\omega_k-1)} \right) r^2 \right. \\ \left. - \left( \left( 2 - \frac{\pi}{\omega_k} \right) h_k^{-\alpha_k(3-\pi/\omega_k)} - \frac{3\pi}{\omega_k} \cdot h_k^{-\alpha_k(1+\pi/\omega_k)} + \left( \frac{4\pi}{\omega_k} - 2 \right) h_k^{-2\pi\alpha_k/\omega_k} \right) r^3 \right\} \\ \quad \times \sin\left(\frac{\pi}{\omega_k}\theta\right), & (r \leq h_k^{\alpha_k}), \\ (r^{\pi/\omega_k} - 3r^{2-\pi/\omega_k} + 2r^{3-2\pi/\omega_k}) \sin\left(\frac{\pi}{\omega_k}\theta\right), & (h_k^{\alpha_k} < r < 1), \\ 0, & (1 \leq r). \end{cases}$$

とおく. ここで  $h_k = \beta_k^{1/(\alpha_k-1)} h$  とする.

$\sigma_k$  および  $\bar{\sigma}_k$  の補間一次多項式 (長方形メッシュの場合は補間双一次多項式) をそれぞれ  $\Pi\sigma_k$  および  $\Pi\bar{\sigma}_k$  と書き,

$$\tilde{u}_h = \sum_{k=1}^n \lambda_k \Pi\bar{\sigma}_k + \Pi w$$

とすると,

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w - \Pi w\|_{H_0^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|\bar{\sigma}_k - \Pi\bar{\sigma}_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|\bar{\sigma}_k - \sigma_k\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

後は個々の項を順に評価してゆく. 長くなるので詳細は省略するが, 具体的に計算することにより, これらの項については以下の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|w - \Pi w\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C_D h \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_D h \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3(21\pi - 5\omega_k)(\omega_k - \pi)}{8\pi}} |\lambda_k|, \\ \|\bar{\sigma}_k - \Pi \bar{\sigma}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{C_D^2 \alpha_k (45\omega_k - 34\pi)(\omega_k - \pi) h^2}{20e(\pi\alpha_k - \omega_k)} + \frac{C_D^2 \alpha_k (\omega_k - \pi)^2 h^2}{\pi\alpha_k - \omega_k}, \\ \|\bar{\sigma}_k - \sigma_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{5(\omega_k - \pi)^2 \beta_k^{2/(\alpha_k-1)} h^2}{46\pi} + \frac{11\alpha_k \omega_k^2 (\omega_k - \pi) \beta_k^{2/(\alpha_k-1)} h^2}{224e\pi(\pi\alpha_k - \omega_k)} \end{aligned}$$

また,  $\lambda_k$  については次章で述べる Lemma 3.1 より以下の評価が得られる,

$$|\lambda_k| \leq \|T_k g_k(x, y)\|_{L^2(\Omega)} \|f(x, y)\|_{L^2(\Omega)}.$$

ここで,

$$g_k(x, y) = \begin{cases} G_k \left( r, \cos \left( \frac{2\pi}{\omega_k} \theta \right), \cos \left( \frac{2\pi}{\omega_k} \theta \right) \right), & (0 \leq \theta \leq \omega_k), \\ G_k \left( r, \left( \frac{2\pi - \omega_k}{\omega_k} \right)^2 \left( \frac{4\pi(\omega_k - \pi)}{(2\pi - \omega_k)^2} + \cos \left( \frac{2\pi}{2\pi - \omega_k} \theta \right) \right), 1 \right), & (\omega_k - 2\pi < \theta < 0), \end{cases}$$

ただし

$$G_k(r, X, Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\sqrt{r^{-4\pi/\omega_k} + 1 - 2r^{-2\pi/\omega_k} X} + 1 - r^{-2\pi/\omega_k} Y}.$$

極めて長い計算を経て  $\|T_k g_k(x, y)\|_{L^2(\Omega)}$  を評価してやると, 具体的な  $\lambda_k$  の評価として以下が得られる,

$$|\lambda_k| \leq \sqrt{\frac{(3\pi - \omega_k)\omega_k}{2\pi^4(\omega_k - \pi)} (3\pi - 2\omega_k + 2(\omega_k - \pi)|\Omega|)} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

以上の評価を全て合わせると,

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C_D h \|f\|_{L^2(\Omega)} + h \sum_{k=1}^n \left\{ C_D \sqrt{\frac{3(21\pi - 5\omega_k)(\omega_k - \pi)}{8\pi}} \right. \\ &\quad + C_D \sqrt{\frac{\alpha_k(45\omega_k - 34\pi)(\omega_k - \pi)}{20e(\pi\alpha_k - \omega_k)} + \frac{\alpha_k(\omega_k - \pi)^2}{\pi\alpha_k - \omega_k}} \\ &\quad + \beta_k^{1/(\alpha_k-1)} \sqrt{\frac{5(\omega_k - \pi)^2}{46\pi} + \frac{11\alpha_k(\omega_k - \pi)\omega_k^2}{224e\pi(\pi\alpha_k - \omega_k)}} \left. \right\} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(3\pi - \omega_k)\omega_k}{2\pi^4(\omega_k - \pi)} (3\pi - 2\omega_k + 2(\omega_k - \pi)|\Omega|)} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq h \left\{ C_D + \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{\frac{(-6\omega_k^2 + 26\pi\omega_k - 9\pi^2)\alpha_k - (2\omega_k - \pi)(\omega_k + 8\pi)}{39}} C_D \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\frac{4\pi(17\omega_k - 15\pi)\alpha_k - (44\omega_k^2 - 41\pi\omega_k - 2\pi^2)}{12000}} \beta_k^{1/(\alpha_k-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\frac{3\pi - 2\omega_k + 2(\omega_k - \pi)|\Omega|}{\pi\alpha_k - \omega_k}} \right\} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

なる誤差評価が得られる。

有限要素解  $u_h$  は  $H_0^1$  空間における最良近似となるので、有限要素解に対する以下の事前誤差評価が得られる。

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq h \left\{ C_D + \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{\frac{(-6\omega_k^2 + 26\pi\omega_k - 9\pi^2)\alpha_k - (2\omega_k - \pi)(\omega_k + 8\pi)}{39}} C_D \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{4\pi(17\omega_k - 15\pi)\alpha_k - (44\omega_k^2 - 41\pi\omega_k - 2\pi^2)}{12000}} \beta_k^{1/(\alpha_k - 1)} \right) \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{3\pi - 2\omega_k + 2(\omega_k - \pi)|\Omega|}{\pi\alpha_k - \omega_k}} \right\} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

更に Aubin-Nitsche trick により  $L^2$  誤差評価も得られる、

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq h^2 \left\{ C_D + \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{\frac{(-6\omega_k^2 + 26\pi\omega_k - 9\pi^2)\alpha_k - (2\omega_k - \pi)(\omega_k + 8\pi)}{39}} C_D \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{4\pi(17\omega_k - 15\pi)\alpha_k - (44\omega_k^2 - 41\pi\omega_k - 2\pi^2)}{12000}} \beta_k^{1/(\alpha_k - 1)} \right) \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{3\pi - 2\omega_k + 2(\omega_k - \pi)|\Omega|}{\pi\alpha_k - \omega_k}} \right\}^2 \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

### 3 特異関数の係数について

この章では、前章で主結果を導く際に重要な役割を果たした、特異関数の係数に関する評価の詳細について説明する。

以下の補題が成り立つ。

**Lemma 3.1**

$$|\lambda_k| \leq \|T_k g_k(x, y)\|_{L^2(\Omega)} \|f(x, y)\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Proof.**  $p_k$  を原点に、内角を為す辺が  $\theta = 0$  および  $\theta = \omega_k$  となるように極座標  $(r, \theta)$  を取る。

$\varepsilon < 1$  に対し、 $\tilde{\xi}_\varepsilon$  を以下の方程式の弱解とする、

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\xi}_\varepsilon = -1_{0 < \theta < \omega_k} \cdot 1_{r < \varepsilon} \cdot \Delta \xi_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\ \tilde{\xi}_\varepsilon = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで、

$$\xi_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \left( 3\varepsilon^{-2\pi/\omega_k} r^{2\pi/\omega_k} - 2\varepsilon^{-3\pi/\omega_k} r^{3\pi/\omega_k} \right) g_k(x, y), & (r < \varepsilon, 0 \leq \theta \leq \omega_k), \\ g_k(x, y), & (r \geq \varepsilon \text{ or } \omega_k - 2\pi < \theta < 0). \end{cases}$$

$\xi_\varepsilon$  は正値関数であり、 $\tilde{\xi}_\varepsilon$  は  $\partial\Omega$  で 0 なので、 $\xi_\varepsilon - \tilde{\xi}_\varepsilon$  は  $\partial\Omega$  で非負の値を取る。実際に計算して確かめると、 $\xi_\varepsilon - \tilde{\xi}_\varepsilon$  および  $\tilde{\xi}_\varepsilon$  が優調和関数（ラプラシアンが負）である事がわかるので、最大値原理により各点で、

$$0 \leq \tilde{\xi}_\varepsilon(x, y) \leq \xi_\varepsilon(x, y),$$

が成立する. よって

$$|\tilde{\xi}_\varepsilon(x, y)| \leq |\xi_\varepsilon(x, y)|.$$

さて,  $\tilde{\xi}_\varepsilon$  および  $u$  は  $H_0^1(\Omega)$  に属するので, これらをテスト関数と考えれば以下が成り立つ,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f \tilde{\xi}_\varepsilon dx dy &= \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \tilde{\xi}_\varepsilon dx dy = - \iint_{\Omega} 1_{0 < \theta < \omega_k} \cdot 1_{r < \varepsilon} \cdot u \Delta \xi_\varepsilon dx dy \\ &= - \iint_{\Omega} 1_{0 < \theta < \omega_k} \cdot 1_{r < \varepsilon} \cdot u(x, y) \\ &\quad \times \Delta \left\{ \left( 3\varepsilon^{-2\pi/\omega_k} r^{2\pi/\omega_k} - 2\varepsilon^{-3\pi/\omega_k} r^{3\pi/\omega_k} \right) \right. \\ &\quad \left. \times G_k \left( r, \cos \left( \frac{2\pi}{\omega_k} \theta \right), \cos \left( \frac{2\pi}{\omega_k} \theta \right) \right) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

ここで,  $r < \varepsilon$  のとき

$$\begin{aligned} &\Delta \left\{ \left( 3\varepsilon^{-2\pi/\omega_k} r^{2\pi/\omega_k} - 2\varepsilon^{-3\pi/\omega_k} r^{3\pi/\omega_k} \right) \right. \\ &\quad \left. \times G_k \left( r, \cos \left( \frac{2\pi}{\omega_k} \theta \right), \cos \left( \frac{2\pi}{\omega_k} \theta \right) \right) \right\} \\ &= \frac{6\pi r^{-2+2\pi/\omega_k} \varepsilon^{-3\pi/\omega_k}}{\omega_k^2} \sin \left( \frac{\pi}{\omega_k} \theta \right) \cdot \left( 1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega_k}) \right). \end{aligned}$$

である事も確かめられるので,

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} f \tilde{\xi}_\varepsilon dx dy \\ &= \frac{6\pi \varepsilon^{-3\pi/\omega_k}}{\omega_k^2} \cdot \left( 1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega_k}) \right) \iint_{\Omega} 1_{r < \varepsilon} \cdot u(x, y) r^{-2+2\pi/\omega_k} \sin \left( \frac{\pi}{\omega_k} \theta \right) dx dy \\ &= \frac{6\pi \varepsilon^{-3\pi/\omega_k}}{\omega_k^2} \cdot \left( 1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega_k}) \right) \lambda_k \\ &\quad \times \int_0^\varepsilon \int_0^{\omega_k} \left( r^{\pi/\omega_k} - 3r^{2-\pi/\omega_k} + 2r^{3-2\pi/\omega_k} \right) r^{-2+2\pi/\omega_k} \sin^2 \left( \frac{\pi}{\omega_k} \theta \right) r d\theta dr \\ &\quad + \frac{6\pi \varepsilon^{-3\pi/\omega_k}}{\omega_k^2} \cdot \left( 1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega_k}) \right) \int_0^\varepsilon \int_0^{\omega_k} w(x, y) r^{-2+2\pi/\omega_k} \sin \left( \frac{\pi}{\omega_k} \theta \right) r d\theta dr \\ &= \left( 1 + O(\varepsilon^{2\pi/\omega_k}) \right) \left( 1 + O(\varepsilon^{2-2\pi/\omega_k}) \right) \lambda_k \\ &\quad + O(\varepsilon^{-3\pi/\omega_k}) \int_0^\varepsilon \int_0^{\omega_k} w(x, y) r^{-1+2\pi/\omega_k} \sin \left( \frac{\pi}{\omega_k} \theta \right) d\theta dr \\ &= \left( 1 + O(\varepsilon^{2-2\pi/\omega_k}) \right) \lambda_k \\ &\quad + O(\varepsilon^{-3\pi/\omega_k}) \int_0^\varepsilon \int_0^{\omega_k} \left( \varepsilon^{2\pi/\omega_k} - r^{2\pi/\omega_k} \right) \frac{\partial}{\partial r} w(x, y) \sin \left( \frac{\pi}{\omega_k} \theta \right) d\theta dr. \end{aligned}$$

よって

$$p = \frac{3\omega_k + \pi}{2(\omega_k + \pi)}, \quad q = \frac{3\omega_k + \pi}{\omega_k - \pi}$$

と置くと

$$\begin{aligned}
& (1 + O(\varepsilon^{2-2\pi/\omega_k})) |\lambda_k| \\
& \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\xi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + O(\varepsilon^{-3\pi/\omega_k}) \left( \int_0^\varepsilon \int_0^{\omega_k} \left| (\varepsilon^{2\pi/\omega_k} - r^{2\pi/\omega_k}) \sin\left(\frac{\pi}{\omega_k}\theta\right) \right|^p r^{-p/q} d\theta dr \right)^{1/p} \\
& \quad \times \left( \int_0^\varepsilon \int_0^{\omega_k} \left| \frac{\partial}{\partial r} w(x, y) \right|^q r d\theta dr \right)^{1/q} \\
& \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + O(\varepsilon^{(\omega_k^2 - \pi^2)/(3\omega_k + \pi)/\omega_k}) \left( \int_0^1 \int_0^{\omega_k} \left| (1 - r^{2\pi/\omega_k}) \sin\left(\frac{\pi}{\omega_k}\theta\right) \right|^p r^{-p/q} d\theta dr \right)^{1/p} \\
& \quad \times \left( \int_0^\varepsilon \int_0^{\omega_k} \left( \left| \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \right| \right)^q r d\theta dr \right)^{1/q} \\
& \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + O(\varepsilon^{(\omega_k^2 - \pi^2)/(3\omega_k + \pi)/\omega_k}) \left( \int_0^1 r^{-p/q} d\theta dr \right)^{1/p} \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

ここで  $w \in H^2$  であるので, Sobolev の埋め込み定理により  $\nabla w \in L^q$ , 更に  $-p/q > -1$  であるので  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を取れば結論を得る. ■

- [1] Grisvard, P.: Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Pitman Publishing, Boston (1985).
- [2] Grisvard, P.: Singularities in Boundary Value Problems. RMA **22**, Masson, Paris (1992).
- [3] Nakao, M.T., Yamamoto, N.: A guaranteed bound of the optimal constant in the error estimates for linear triangular element. Computing Supplementum **15**, 165–173 (2001).