数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 107-116

極大単調作用素と均衡問題
Maximal monotone operators and equilibrium problems

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University
東京工業大学・大学院情報理工学研究科 高橋 渉 (Wataru TAKAHASHI)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

2000 Mathematics Subject Classification: 47H05, 74G10.
Keywords: 均衡問題, 極大単調作用素, 極大単調関数, リゾルベント.

1 序論

本稿では, 極大単調作用素の零点を求める問題と極大単調関数に関する均衡問題を取りあげ, 主にこれらの相互関係を議論する。そして, ある設定のもとで, これらの二つの問題が同値であることを示す。

E を実 Banach 空間, h を E から $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ への下半連続な凸関数とし, h は恒等的に ∞ に等しくないとする。h の劣微分とは

$$\partial h(x) = \{x^* \in E^* : h(y) \geq h(x) + \langle y - x, x^* \rangle, \forall y \in E\} \quad (x \in E)$$

で定義される E から E^* への多価写像である。このとき, ∂h は極大単調作用素であることが知られている。さらに

$$0 \in \partial h(x) \Leftrightarrow x \in \arg\min\{h(y) : y \in E\},$$

つまり, ∂h の零点と h に関する最小化問題の解が一致することが知られている (詳しくは, [26, 27] を参照せよ)。したがって, Banach 空間 E 上の極大単調作用素 A の零点, つまり, $0 \in Ax$ を満たす点 $x \in E$ を求める問題は, 凸関数の最小化問題を抽象的に表現したものであり, 凸解析学および数理最適化理論においてもっとも重要で基本的な問題の一つである。極大単調作用素およびその零点については, 例えば, [16], [22], [19], [13], [14] および [15] を参照せよ。

一方, C を実 Banach 空間 E の空でない部分集合, f を $C \times C$ から $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ へ

の関数とし, すべての $x \in C$ に対して $f(x,x)=0$ が成り立つとする。このとき

$$f(x,y) \geq 0 \quad (\forall y \in C)$$

を満たす $x \in C$ を求める問題を (f と C に関する) 均衡問題といい, x をこの均衡問題の解という。均衡問題に関する研究結果は多く知られているが, 例えば解の存在に関する結果として [18], [9], [24], [7] および [10] などがある。解の近似に関しては, [11], [17], [8], [23] および [1] などがある。また, [6] とその参考文献も参照するとよい。

本稿は, 全体で 5 節から構成される。次の第 2 節は準備のための節である。第 3 節と第 4 節は, 文献 [3] の主な結果の抜粋とまとめになっている。第 5 節では, 第 4 節までに得られた結果の一つの応用を扱っている。

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E のノルム, E^* を E の共役空間, $\langle x, \xi^* \rangle$ を $x \in E$ における $\xi^* \in E^*$ の値を表すものとする。

拡大された実数の集合 $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を $[-\infty, \infty]$ で表し, 実数 a に対して, $a+\infty = \infty + a = \infty$, $a+(-\infty) = -\infty + a = -\infty$ と定義し, さらに $-(\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = \infty$ と定義する。

J は E 上の双対写像を表す。つまり, J は, $x \in E$ に対して

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_{E^*}^2\}$$

で定義される E から E^* への多価写像である。

$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする。E のノルム $\|\cdot\|$ が Gâteaux 微分可能であるとは, すべての $x, y \in S_E$ に対して, 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在するときをいう。このとき, E は滑らかであるともいう。E が滑らかなとき, 双対写像 J は一価であることが知られている。Banach 空間 E が狭義凸であるとは, $x, y \in S_E$ かつ $x \neq y$ ならば $\|x+y\| < 2$ が成り立つときをいう。E が狭義凸のとき, 双対写像 J は単射, つまり, $x \neq y$ ならば $Jx \cap Jy = \emptyset$ が成り立つことが知られている。詳しくは [25] を参照せよ。

ϕ を E から $[-\infty, \infty]$ への関数, $D(\phi) = \{x \in E : \phi(x) < \infty\}$ とする。関数 ϕ が凸であるとは, すべての $x, y \in D(\phi)$ と $\lambda \in (0,1)$ に対して

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$$

が成り立つときをいう。関数 ϕ が下半連続であるとは, すべての $l \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in E : \phi(x) \leq l\}$ が E の閉集合になるときをいう。

f を $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とし, C を E の空でない部分集合とする。f が C に関して単調であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$f(x, y) \leq -f(y, x)$$

が成り立つときをいう。

C を E の空でない部分集合とする。関数 $f \colon E \times E \to [-\infty, \infty]$ が C に関して極大単調であるとは, 各 $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して

$$\langle z - x, x^* \rangle \geq f(z, x), \forall z \in C \Rightarrow f(x, y) + \langle y - x, x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C$$

が成り立つときをいう [7]。

A を E から E^* への多価写像とする。多価写像 A は作用素と呼ばれることがある。また, 多価写像 A をそのグラフ $\{(x, x^*) \in E \times E^* : x^* \in Ax\}$ と同一視する。つまり, $x^* \in Ax$ と $(x, x^*) \in A$ は同値である。A の有効定義域を $D(A)$ で表す。つまり, $D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$ である。多価写像 A が単調であるとは, すべての $(x, x^*) \in A$ と $(y, y^*) \in A$ に対して, $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。多価写像 A が極大単調作用素であるとは, A が単調で

$$A' \subset E \times E^* \text{が単調かつ } A \subset A' \Rightarrow A = A'$$

が成り立つときをいう。単調作用素については, 次の結果が知られている。

定理 2.1 (Rockafellar [20]). E を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E^*$ を単調作用素とする。このとき, A が極大単調作用素であるための必要十分条件は, すべての $r > 0$ に対して $R(J + rA) = E^*$ が成り立つことである。ここで, $R(J + rA)$ は $J + rA$ の値域を表す。

E を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする。定理 2.1 を使うと, 各 $r > 0$ と $x \in E$ に対して, $Jx \in Jz_r + rAz_r$ を満たす $z_r \in D(A)$ が唯一存在することがわかる。つまり, $(J + rA)^{-1}Jx = z_r$ であり, $(J + rA)^{-1}J$ は E から $D(A)$ への一価写像であることがわかる。写像 $(J + rA)^{-1}J$ を A の (r に関する) リゾルベントと呼ぶ。A の零点の集合 $A^{-1}0 = \{x \in E : Ax \ni 0\}$ とリゾルベント $(J + rA)^{-1}J$ の不動点の集合が一致することが知られている。例えば, [13–15] を参照せよ。

E を Banach 空間, C を E の空でない部分集合, f を $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とし, すべての $x \in C$ に対して $f(x,x) = 0$ であるとする。f と C に関する均衡問題の解の集合を $\mathrm{EP}(f)$ で表す。つまり

$$\mathrm{EP}(f) = \{z \in C : f(z,y) \geq 0, \ \forall y \in C\}$$

である。

3 極大単調関数のリゾルベント

本節ではまず, 極大単調関数のリゾルベントの存在について議論する。次に, 所与の均衡問題を (極大単調作用素の) 零点問題に書き換える方法を述べる。さらにその逆, 所与の零点問題を均衡問題へ書き換える方法を述べる。

極大単調関数のリゾルベントの存在は次の定理により保証される。

定理 3.1 ([3, Corollary 3.4]). E を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合とする。f を $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とし, 次の四つの条件を満たすとする。

(F1) すべての $x \in C$ に対して $f(x,x) = 0$ である;
(F2) f は C に関して単調である;
(F3) すべての $x \in C$ に対して $f(x, \cdot)$ は下半連続かつ凸である;
(F4) f は C に関して極大単調である。

このとき, 各 $x \in E$ と $r > 0$ に対し, $z_r \in C$ が唯一存在して, すべての $y \in C$ に対して

$$0 \leq f(z_r, y) + \frac{1}{r} \langle y - z_r, Jz_r - Jx \rangle$$

が成り立つ。

定理 3.1 の z_r を $F_r x$ で表し, 一価写像 $F_r \colon E \to C$ を定義する。つまり, 各 $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$F_r x = \left\{ z \in C : 0 \leq f(z,y) + \frac{1}{r} \langle y - z, Jz - Jx \rangle, \forall y \in C \right\}$$

である。写像 F_r を (r に関する)f のリゾルベントと呼ぶ。

次の定理は, 所与の極大単調関数 f から極大単調作用素 A_f を作る方法と, それらのリゾルベントが一致することを述べている。

定理 3.2 ([3, Theorem 3.5]). E を Banach 空間, C を E の空でない部分集合, f を $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とし, 定理 3.1 の条件 (F1), (F2) および (F3) を満たすとする。このとき

$$A_f x = \begin{cases} \{x^* \in E^* : f(x,y) \geq \langle y - x, x^* \rangle, \forall y \in C\} & (x \in C); \\ \emptyset & (x \notin C) \end{cases} \tag{3.1}$$

で定義される多価写像 $A_f \subset E \times E^*$ は単調であり, $\mathrm{EP}(f) = {A_f}^{-1}0$ が成り立つ。さらに, E が滑らか, 狭義凸かつ回帰的であり, C が閉凸であり, f が C に関して極大単調であると仮定すると, A_f は極大単調作用素であり, すべての $r > 0$ に対して, f のリゾルベント F_r と A_f のリゾルベント $(J + rA_f)^{-1}J$ が一致する。

回帰的な Banach 空間は, 滑らかで狭義凸となる同値なノルムを持つことが知られているので [4], 次の系を得たことになる。

系 3.3 ([3, Corollary 3.7]). E を回帰的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合とする。関数 $f\colon E \times E \to [-\infty, \infty]$ は定理 3.1 の条件 (F1), (F2), (F3) および (F4) を満たすとする。このとき, 式 (3.1) で定義される多価写像 A_f は極大単調作用素である。

次に, 所与の極大単調作用素 $A \subset E \times E^*$ から極大単調関数を作る方法を述べる。

定理 3.4 ([3, Theorem 3.8]). E を Banach 空間, $A \subset E \times E^*$ を単調作用素とし, $D(A) \neq \emptyset$ とする。関数 $f_A\colon E \times E \to [-\infty, \infty]$ を, $x, y \in E$ に対して

$$f_A(x,y) = \begin{cases} \sup\{\langle y - x, x^* \rangle : x^* \in Ax\} & (x \in D(A)); \\ -\infty & (x \notin D(A)) \end{cases} \tag{3.2}$$

と定義する。$\mathrm{EP}(f_A)$ を f_A と $D(A)$ に関する均衡問題の解の集合とする。このとき, $A^{-1}0 \subset \mathrm{EP}(f_A)$ であり, さらに次が成り立つ。

(F1) すべての $x \in D(A)$ に対して $f_A(x,x) = 0$ である;
(F2) f_A は $D(A)$ に関して単調である;
(F3) すべての $x \in D(A)$ に対して $f_A(x, \cdot)$ は下半連続かつ凸である。

さらに, もし A が極大単調ならば, f_A は $D(A)$ に関して極大単調である。さらに, E が滑らか, 狭義凸かつ回帰的であり, $D(A)$ が閉凸であるとすると, A のリゾルベント $(J + rA)^{-1}J$ は f_A のリゾルベントと一致する。

定理 3.4 と同じ仮定のもとで $A^{-1}0 = \mathrm{EP}(f_A)$ であることが得られるが, これについて

は次節で述べる。

4 極大単調作用素と極大単調関数

この節では, 極大単調作用素の族と極大単調関数の族の間のある種の対応関係について議論する。

定理 4.1 ([3, Theorem 4.1]). E を回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素, f_A を式 (3.2) で定義される $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数, A_{f_A} を

$$A_{f_A}x = \begin{cases} \{x^* \in E^* : f_A(x,y) \geq \langle y-x, x^* \rangle, \forall y \in C\} & (x \in C); \\ \emptyset & (x \notin C) \end{cases} \tag{4.1}$$

で定義される E から E^* への多価写像とする。このとき, A の有効定義域 $D(A)$ が閉凸ならば, $A_{f_A} = A$ である。

この定理から次の系を得る。

系 4.2 ([3, Corollary 4.2]). E を回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素, f_A を式 (3.2) で定義される $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とする。このとき, $D(A)$ が閉凸ならば, $A^{-1}0 = \mathrm{EP}(f_A)$ が成り立つ。

証明. 定理 4.1 より, $A^{-1}0 = {A_{f_A}}^{-1}0$ である。よって, 定理 3.2 を使うと

$$A^{-1}0 = {A_{f_A}}^{-1}0 = \mathrm{EP}(f_A)$$

を得る。 □

定理 3.2 において, $D(A_f) = C$ が成り立つかどうかはわからないが, $D(A_f) = C$ が成り立つとき, 次の定理によって $f_{A_f} = f$ となるための条件が得られる。

定理 4.3 ([3, Theorem 4.5]). f を $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数, C を E の空でない凸部分集合とし, 定理 3.1 の (F1), (F2) および (F3) を仮定する。A_f を式 (3.1) によって定義される E から E^* への多価写像とし, $D(A_f) = C$ を仮定する。さらに, f_{A_f} を

$$f_{A_f}(x,y) = \begin{cases} \sup\{\langle y-x, x^* \rangle : x^* \in A_f x\} & (x \in C); \\ -\infty & (x \notin C) \end{cases}$$

で定義される $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とする。このとき, $f_{A_f} = f$ であるための必要十分条件は, 次の二つが成り立つことである。

(F5) $x \in C$, $y \in E$, $t > 0$ ならば $f(x, ty + (1-t)x) = tf(x, y)$ であり, かつ, $v \notin C$, $y \in E$ ならば $f(v, y) = -\infty$ である。

(F6) $y \in C$, $w^* \in E^*$ のとき, すべての $v \in C$ に対して $f(y, v) \geq \langle v - y, w^* \rangle$ ならば, すべての $v \in E$ に対して $f(y, v) \geq \langle v - y, w^* \rangle$ である。

これまでに得られた結果をまとめると, 次の定理を得る。

定理 4.4 ([3, Theorem 4.7]). E を回帰的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合とする。有効定義域が C と一致する極大単調作用素全体の集合を $\mathcal{M}$ とし, 定理 3.1 の条件 (F1) から (F4) および定理 4.3 の (F5) と (F6) を満たす $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数全体の集合を $\mathcal{F}$ で表す。$\mathcal{M}$ から $\mathcal{F}$ への写像 Φ を

$$\Phi(A) = f_A \quad (A \in \mathcal{M})$$

で定義する。ここで, f_A は式 (3.2) によって定義される $E \times E$ から $[-\infty, \infty]$ への関数である。このとき, Φ は単射である。さらに

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : D(A_f) = C\}$$

とすると, Φ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{F}_0$ への全単射である。

定理 4.4 において, さらに E が滑らかで狭義凸であると仮定すると, 定理 3.4 より, Φ はリゾルベントを保存することがわかる。つまり, $A \in \mathcal{M}$ に対して, A のリゾルベントと $\Phi(A)$ のリゾルベントが一致することになる。

5 応用

この節では, 均衡問題の解の近似に関する収束定理を証明する。その前に, 少し準備を要する。

C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする。このとき, P_C で H から C の上への距離射影を表す。つまり, 各 $x \in H$ に対して, $P_C x \in C$ であり $\|P_C x - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in C\}$ が成り立つ。

次の定理は, 上村-高橋 [12] による。

定理 5.1 ([12, Theorem 1]). H を実 Hilbert 空間, $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とし, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を仮定する。$\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $\{r_n\}$ を正の実数列とし

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \text{ および } \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。H の点列 $\{x_n\}$ を, 初期点 $x_1 = x \in H$ と

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)(I + r_n A)^{-1} x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義する。ここで, I は H 上の恒等写像, $(I + r_n A)^{-1}$ は A のリゾルベントである。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}x$ へ強収束する。

それでは, 定理 5.1 と前節までの結果を使って次の定理を証明しよう。この定理は, [8, Theorem 4.3] とよく似ている。

定理 5.2. H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, f を $H \times H$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とし, f は定理 3.1 の条件 (F1), (F2), (F3) および (F4) を満たし, $\mathrm{EP}(f) \neq \emptyset$ と仮定する。$\{\alpha_n\}$ と $\{r_n\}$ は定理 5.1 と同じものとする。C の点列 $\{x_n\}$ を, 初期点 $x_1 = x \in H$ と

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) F_{r_n} x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義する。ここで, F_{r_n} は r_n に関する f のリゾルベントである。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{EP}(f)}x$ へ強収束する。

証明. $A_f \subset H \times H$ を式 (3.1) によって定義される多価写像とする。定理 3.2 より, A_f は極大単調であり, ${A_f}^{-1}0 = \mathrm{EP}(f)$ が成り立つ。さらに, すべての $r > 0$ に対して $(I + rA_f)^{-1} = F_r$ が成り立つ。したがって, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_n x + (1-\alpha_n) F_{r_n} x_n \\ &= \alpha_n x + (1-\alpha_n)(I + r_n A_f)^{-1} x_n \end{aligned}$$

となる。ゆえに定理 5.1 より, $\{x_n\}$ は $P_{{A_f}^{-1}0}x = P_{\mathrm{EP}(f)}x$ へ強収束する。 $\square$

参考文献

[1] K. Aoyama and W. Takahashi, *Weak convergence theorems by Cesàro means for a nonexpansive mapping and an equilibrium problem*, Pac. J. Optim. **3** (2007), 501–509.

[2] 青山耕治, 髙橋涉, 不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理, 非線形解析学と凸解析学の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **1544** (2007), 40–48.

[3] K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. **15** (2008), 395–409.

[4] E. Asplund, *Averaged norms*, Israel J. Math. **5** (1967), 227–233.

[5] V. Barbu and Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, 2nd ed., Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 10, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.

[6] M. Bianchi and S. Schaible, *Equilibrium problems under generalized convexity and generalized monotonicity*, J. Global Optim. **30** (2004), 121–134.

[7] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[8] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.

[9] K. Fan, *Some properties of convex sets related to fixed point theorems*, Math. Ann. **266** (1984), 519–537.

[10] A. N. Iusem and W. Sosa, *New existence results for equilibrium problems*, Nonlinear Anal. **52** (2003), 621–635.

[11] A. N. Iusem and W. Sosa, *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Optimization **52** (2003), 301–316.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[14] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[16] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154–158 (French).

[17] A. Moudafi, *Second-order differential proximal methods for equilibrium problems*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), Article 18, 7 pp. (electronic).

[18] H. Nikaidô and K. Isoda, *Note on non-cooperative convex games*, Pacific J. Math. **5** (1955), 807–815.

[19] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383–390.

[20] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[21] R. T. Rockafellar, *On the virtual convexity of the domain and range of a nonlinear maximal monotone operator*, Math. Ann. **185** (1970), 81–90.

[22] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[23] A. Tada and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for a nonexpansive mapping and an equilibrium problem*, J. Optim. Theory Appl. **133** (2007), 359–370.

[24] W. Takahashi, *Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorems*, Nonlinear functional analysis and its applications, Part 2 (Berkeley, Calif., 1983), 1986, pp. 419–427.

[25] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[26] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[27] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.